

دار ماكجروهيل للنشر



نظرية اقتصاديات الوحدة أسلوب رياضي

تأليف

جيمس . م . هندرسون

أستاذ الاقتصاد - جامعة مينيسوتا

ريتشارد أ . كواندت

أستاذ الاقتصاد - جامعة برينستون

ترجمة

دكتور/متوكل عباس مهلهل

الأستاذ المساعد - الاقتصاد الرياضي

جامعة الملك عبد العزيز - المدينة المنورة

مراجعة

دكتور/محمد مسلم الردادى

أستاذ مشارك - الاقتصاد الرياضي

كلية الاقتصاد والتجارة

جامعة الملك عبد العزيز - جدة

دار ماكجرو هيل للنشر



نيويورك . سانت لويس . سان فرانسيسكو . أوكلاند . بوسطن . دولندورف . جوهانسبرج . لندن . مدريد .
مكسيكو . مونتريال . نيودلهي . بناما . باريس . ساو باولو . ستغافورا . سيدني . طوكيو . هونغ كونغ . القاهرة .

Microeconomic Theory
A. Mathematicat Approach

حقوق التأليف © ١٩٨٠ ، ١٩٧١ ، ١٩٥٨ دار ماكجروهيل
للنشر . إنك . جميع الحقوق محفوظة
الطبعة العربية ١٩٨٣ تصدر بالتعاون مع المكتبة الأكاديمية بالقاهرة
ABC ودار المريخ للنشر - المملكة العربية السعودية - الرياض
ص.ب ١٠٧٢٠

لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو اختزان مادته بطريقة
الاسترجاع أو نقله على أى وجه أو بأى طريقة سواء كانت الكترونية أو
ميكانيكية أو بالتصوير أو بالتسجيل أو خلاف ذلك إلا بموافقة الناشر على
هذا كتابة ومقدماتاً .

ISBN 0.07-019276-6

المحتويات

CONTENTS

١١	فأحة الكأاب
	PREFACE TO THE THIRD EDITION
١٥	الباب الأول :
	CHAPTER (1)
١٥	مقدمه
	INTRODUCTION
١٥	١ - ١ دور النظرأأ
	THE ROLE OF THEORY
١٦	١ - ٢ نظرأأ أقأأأأأأ الوأأأ
	MICROECONOMICS
١٨	١ - ٣ دور الرأأأأأ
	THE ROLE OF MATHEMATICS
١٩	الباب الثاني :
	CHAPTER (2)
١٩	نظرأأ سلوك المسأهلك
	THE THEORY OF CONSUMER BEHAVIOR
٢١	١ - ٢ مفأهم أساسأ
	BASIC CONCEPTS
٢٨	٢ - ٢ أأأ الأعلى للمنفعة
	THE MAXIMIZATION OF UTILITY
٣٥	٢ - ٣ أوال الطلب
	DEMAND FUNCTIONS
٤٢	٢ - ٤ الدأخل وأوقأ الفراغ من العمل
	INCOME AND LEISURE

٤٤	٥ - ٢ نتائج الدخل والتعويض
	SUBSTITUTION AND INCOME EFFECTS
٥٢	٦ - ٢ التعميم إلى n متغير
	GENERALIZATION TO n VARIABLES
٥٤	٧ - ٢ ملخص
	SUMMARY
٥٩	الباب الثالث :
	CHAPTER (3)
٥٩	موضوعات في سلوك المستهلك
	TOPICS IN CONSUMER BEHAVIOR
٥٩	١ - ٣ نظام الصرف الخطى
	A LINEAR EXPENDITURES SYSTEM
٦١	٢ - ٣ دوال المنفعة القابلة للجمع والانفصال
	SEPARABLE AND ADDITIVE UTILITY FUNCTIONS
٦٢	٣ - ٣ دوال المنفعة المتجانسة والمتألفة
	HOMOGENEOUS AND HOMOTHETIC UTILITY FUNCTIONS
٦٣	٤ - ٣ دوال المنفعة الغير مباشرة والإزدواجية في الإستهلاك
	INDIRECT UTILITY FUNCTIONS AND DUALITY IN CONSUMPTION
٦٨	٥ - ٣ نظرية الأفضلية الموضحة
	THE THEORY OF REVEALED PREFERENCE
٧٢	٦ - ٣ السلع المركبة
	COMPOSITE COMMODITIES
٧٣	٧ - ٣ فائض المستهلك
	CONSUMERS' SURPLUS
٧٧	٨ - ٣ مسألة الاختيار في حالات المجازفة التي تنطوى على الخطر
	THE PROBLEM OF CHOICE IN SITUATIONS INVOLVING RISK
٨٢	٩ - ٣ السلوك تحت عوامل عدم التأكد
	BEHAVIOR UNDER UNCERTAINTY
٨٧	١٠ - ٣ ملخص
٩٣	الباب الرابع :
	CHAPTER (4)

٩٣	نظريات المؤسسات والشركات التجارية والمالية
	THE THEORY OF THE FIRM
٩٥	٤ - ١ مفاهيم أساسية
	BASIC CONCEPTS
١٠٤	٤ - ٢ سلوك تحقيق الأمثلية
	OPTIMIZATION BEHAVIOR
١١٢	٤ - ٣ طلبات الدواخل
	INPUT DEMANDS
١١٥	٤ - ٤ دوال التكلفة
	COST FUNCTIONS
١٢٦	٤ - ٥ المنتجات المشتركة
	JOINT PRODUCTS
١٣٣	٤ - ٦ التعميم إلى m من المتغيرات
	GENERALIZATION TO m VARIABLES
١٣٧	٤ - ٧ ملخص
	SUMMARY
١٤٣	الباب الخامس :
	CHAPTER (5)
١٤٣	موضوعات في نظرية المؤسسة
	TOPICS IN THE THEORY OF THE FIRM
١٤٣	٥ - ١ دوال الإنتاج المتجانسة
	HOMOGENEOUS PRODUCTION FUNCTIONS
١٥٠	٥ - ٢ دوال الإنتاج
	C.E.S. PRODUCTION FUNCTIONS
١٥٥	٥ - ٣ شروط كون وتكر
	THE KUHN—TUCKER CONDITIONS
١٥٨	٥ - ٤ الازدواجية في الإنتاج
	DUALITY IN PRODUCTION
١٦٠	٥ - ٥ الإنتاج تحت ظروف عدم التأكد

١٦٢	٤ - ٦ دوال الإنتاج الخطية
	PRODUCTION UNDER UNCERTAINTY
١٦٧	٥ - ٧ البرمجة الخطية
	LINEAR PRODUCTION FUNCTIONS
	LINEAR PROGRAMMING
١٧٧	٥ - ٨ ملخص
	SUMMARY
١٨١	الباب السادس :
	CHAPTER (6)
١٨١	توازن السوق
	MARKET EQUILIBRIUM
١٨٢	٦ - ١ افتراضات المنافسة المتكاملة
	THE ASSUMPTIONS OF PERFECT COMPETITION
١٨٤	٦ - ٢ دوال الطلب
	DEMAND FUNCTIONS
١٨٦	٦ - ٣ دوال العرض
	SUPPLY FUNCTIONS
١٩٣	٦ - ٤ توازن سوق السلع
	COMMODITY—MARKET EQUILIBRIUM
٢٠١	٦ - ٥ تطبيق على الضرائب
	AN APPLICATION TO TAXATION
٢٠٤	٦ - ٦ توازن سوق عناصر الإنتاج
	FACTOR—MARKET EQUILIBRIUM
٢٠٧	٦ - ٧ وجود ووحدانية التوازن
	THE EXISTANCE AND UNIQUENESS OF EQUILIBRIUM
٢١١	٦ - ٨ استقرار (ثبات) التوازن
	THE STABILITY OF EQUILIBRIUM
٢١٩	٦ - ٩ التوازن الحركي مع التعديل المتخلف
	DYNAMIC EQUILIBRIUM WITH LAGGED ADJUSTMENT
٢٢٢	٦ - ١٠ سوق المستقبل

CHAPTER (7)

- ٢٢٩ الاحتكار ، احتكار الشراء والتنافس الاحتكاري
MONOPOLY, MONOPSONY, AND MONOPOLISTIC COMPETITION
- ٢٣٠ ١ - ٧ الاحتكار : نظريات أساسية
MONOPOLY : BASIC THEORY
- ٢٣٦ ٢ - ٧ الاحتكار : سعر تمييزي
MONOPOLY : PRICE DISCRIMINATION
- ٢٣٩ ٣ - ٧ الاحتكار : تطبيقات
MONOPOLY APPLICATIONS
- ٢٤٦ ٤ - ٧ احتكار المشتري
MONOPSONY
- ٢٤٩ ٥ - ٧ التنافس الاحتكاري
MONOPOLISTIC COMPETITION
- ٢٥٣ ٦ - ٧ ملخص
SUMMARY

CHAPTER (8)

- ٢٥٧ الاحتكار الثنائي واحتكار القلة واحتكار بين طرفين
DUOPOLY, OLIGOPOLY, AND BILATERAL MONOPOLY
- ٢٥٨ ١ - ٨ الاحتكار الثنائي من احتكار القلة الإنتاج المتجانس
DUOPOLY AND OLIGOPOLY DIFFERENTIATED PRODUCTS
- ٢٦٨ ٢ - ٨ الاحتكار الثنائي واحتكار القلة تنوع المنتجات
DUOPOLY AND OLIGOPOLY : DIFFERENTIATED PRODUCTS
- ٢٧٤ ٣ - ٨ احتكار الشراء بواسطة مشترين واحتكار لا القلة في حالة الشراء
DUOPSONY AND OLIGOSONY
- ٢٧٦ ٤ - ٨ نظريات المجموعات (الألعاب)
GAMES THEORY
- ٢٨٨ ٥ - ٨ الاحتكار الثنائي (الاحتكار بين طرفين)
BILATERAL MONOPOLY

٢٩٢ ٨ - ٦ ملخص

SUMMARY

٢٩٧ الباب التاسع :

CHAPTER (9)

٢٩٧ توازن الأسواق المتعددة

MULTIMARKET EQUILIBRIUM

٢٩٩ ٩ ١ المقايضة (المبادلة البحتة)

PURE EXCHANGE

٣٠٥ ٩ ٢ تبال السلعتين

TWO—COMMODITY EXCHANGE

٣٠٩ ٩ ٣ الإنتاج والتبادل (المقايضة)

PRODUCTION AND EXCHANGE

٣١٦ ٩ ٤ وحدة المقايضة والنقود

THE NUMERIRE AND MONEY

٣٢٣ ٩ ٥ ملخص

٣٢٧ الباب العاشر :

CHAPTER (10)

٣٢٧ موضوعات في توازن الأسواق المتعددة

TOPICS IN MULTIMARKET EQUILIBRIUM

٣٢٨ ١٠ - ١ وجود (قيام) التوازن

EXISTENCE OF EQUILIBRIUM

٣٤٢ ١٠ - ٢ ثبات (استقرار) التوازن

STABILITY OF EQUILIBRIUM

٣٥٠ ١٠ - ٣ وحدانية التوازن

UNIQUENESS OF EQUILIBRIUM

٣٥٢ ١٠ - ٤ نموذج المدخلات والمخرجات

THE INPUT—OUTPUT MODEL

٣٦٠ ١٠ - ٥ ملخص

CHAPTER (11)

WELFARE ECONOMICS

PARETO OPTIMALITY

THE EFFICIENCY OF PERFECT COMPETITION

THE EFFICIENCY OF IMPERFECT COMPETITION

EXTERNAL EFFECTS IN CONSUMPTION AND PRODUCTION

TAXES AND SUBSIDIES

SOCIAL WELFARE FUNCTIONS

THE THEORY OF SECOND BEST

SUMMARY

CHAPTER (12)

OPTIMIZATION OVER TIME

BASIC CONCEPTS

MULTIPERIOD CONSUMPTION

INVESTMENT THEORY OF THE FIRM

٤٣٠ ١٢ - ٤ تحديد معدل الفائدة

INTEREST—RATE DETERMINATION

٤٣١ ١٢ - ٥ نظرية الاستثمار والدور الزمني

INVESTMENT THEORY AND THE ROLE OF TIME

٤٣٨ ١٢ - ٦ تقاعد وإبدال الأجهزة المتينة

RETIREMENT AND REPLACEMENT OF DURABLE EQUIPMENT

٤٤١ ١٢ - ٧ الموارد القابلة للنفاذ

EXHAUSTIBLE RESOURCES

٤٤٢ ١٢ - ٨ رأس المال (الإنسانى البشرى)

HUMAN CAPITAL

٤٤٦ ١٢ - ٩ ملخص

٤٥١ ملحق : مراجعة رياضية

APPENDIX : MATHEMATICAL REVIEW

٤٥١ ١ - ١ المعادلات الانية ، المصفوفات والمحددات

SIMULTANEOUS EQUATIONS, MATRICES AND DETERMINANTS

٤٥٨ ١ - ٢ حساب التفاضل والتكامل

CALCULUS

٤٧٢ ١ - ٣ النهايات العظمى والنهايات الصغرى

MAXIMA AND MINIMA

٤٨٦ ١ - ٤ التكاملات

INTEGRALS

٤٨٨ ١ - ٥ المعادلات الفرقية

DIFFERENTIAL EQUATIONS

٤٩١ ١ - ٦ المعادلات التفاضلية

DIFFERENTIAL EQUATIONS

٤٩٧ أجوبة التمارين ذات الأرقام الزوجية

ANSWERS FOR EVEN—NUMBERED EXERCISES

فاتحة الكتاب

لقد شهد القرنان الماضيان تطبيقات للطرق الرياضية في جميع فروع حقل الإقتصاد تقريبا . ولقد شملت هذه التطبيقات نظريات تحقق الأمثلية الفردية للوحدات وكذلك توازن السوق الداخلة ضمن إطار فرع حقل الإقتصاد ألا وهو إقتصاد الوحدات الصغيرة . ولقد صيغت النظريات التقليدية في إطار رياضى ثم أثبتت النتائج الكلاسيكية أو لم تثبت . فالاستفادة من علم الرياضيات وسع من نطاق اشتقاق نتائج جديدة متعددة ، وخصوصا في هذا الحقل لأن الافتراضات التى تقوم عليها تحقيق الحد الأعلى من الربح والمنفعة هى ذاتها تتصف بمعايير رياضية .

ففى المراحل الأولية من هذا التطور الرياضى .. نقسم الإقتصاديين إلى قسمين : المؤيد وغير المؤيد تحت المسمى الإقتصاديون الرياضيون والإقتصاديون الأدبيون أو الاقتصاديون الغير رياضيون .. ولكن لحسن الحظ فإن هذا الانقسام الحاد أخذ فى التصدع وسوف يزول تماما بمرور الزمن وأصبح من الواضح فى زمننا هذا أن كثيرا من الإقتصاديين وطلاب الإقتصاد أصبحوا يقدرون قيمة الرياضيات ويكيفوا أنفسهم مع مستوى متوسطا منها للاستفادة منها فى حقل الإقتصاد .

ومن الناحية الأخرى ، لقد تنبه كثير من الإقتصاديين الرياضيين إلى محدودية الرياضيات . ولعل من العادل القول بأنه قبل مضى زمن طويل من الآن وبصبح استخدام الطرق الرياضية فى علم الإقتصاد مسلم به .

وبزيادة ممارسة كثير من الإقتصاديين وطلبة الإقتصاد فى حقل الرياضيات فإن الأهمية سوف تتركز ليس على تعليم طلبة الإقتصاد الرياضيات الأولية والمتوسطة ولكن سوف تتركز على تعليمهم الإقتصاد فى قالب رياضى . فكتابنا هذا قد صمم للإقتصاديين وطلبة

الاقتصاد الذين تعلموا بعض المفاهيم الرياضية وتدريبوا عليها ولكنهم لم يمارسوا درجة كبيرة من الرياضيات المتقدمة . ولم نقصد بهذا الكتاب كمرجع للرياضيات لطلاب الاقتصاد . ولقد طورت المفاهيم الأساسية في إقتصاديات الوحدات الصغيرة بمساعدة بعض الرياضيات المتوسطة .

ولم يكن إختيار وتسلسل الأفكار الإقتصادية مبنيا على أساس ما يحتويه من مفاهيم رياضية إنما كان التسلسل حسب المفاهيم الإقتصادية . ولقد وضع هذا الكتاب للقارئ الذى يمتلك قليلا من العلم فى كلا الحقلين (حقل الإقتصاد والرياضيات) ولقد خصص للطلاب فى المراحل المتعددة جدا من دراستهم الدنيوية وكذلك طلاب مراحل الدراسات العليا فى الإقتصاد وكذلك الإقتصاديون المحترفون الذين يرغبون فى معرفة كيف تساعد الرياضيات المتوسطة فى فهم بعض الأفكار الإقتصادية . فمعرفة أحد العلمين معرفة متقدمة جيدة قد يغنى عن النقص فى المعرفة فى العلم الآخر . فالطلاب الذى تكون خلفيته ضعيفة فى إقتصاديات الوحدات الصغيرة سوف لا يقدر مشاكل هذا العلم أو محدوديات الطرق الرياضية ما لم يراجع بعض الكتابات الأدبية البحتة فى هذا المجال وسوف يجد بعضها فى قائمة المراجع المختارة الموجودة فى نهاية كل باب من أبواب هذا الكتاب.

إن إلمام الطالب بمحتوى فصلين دراسيين فى علم التفاضل والتكامل كفيلا بتحضيره لهذا الكتاب ^(١) . ولقد وضعنا فى الملحق مراجعة لبعض المفاهيم الرياضية المستخدمة فى شرح الأفكار المقدمة ، ولكنه ليس كافيا للطالب الذى لم يتعرض لحساب التفاضل والتكامل ولكنه سوف يقدم كمنعش للذاكرة أولئك الذين لهم علم بحساب التفاضل والتكامل . وبالإضافة لهذا فإن الملحق يحتوى على بعض المفاهيم التى لم تغط فى مواد التفاضل والتكامل المستخدمة فى هذا الكتاب مثل قاعدة كيرمير ، مضروب لافرانج وبعض المعادلات الفرقية .

فإذا رغب القارئ فى توسيع قاعدة معلوماته عن بعض الأفكار والمفاهيم المشروحة فى الملحق فعليه مراجعة بعض الكتب والمقالات المنصوص عليها فى قائمة المراجع الموجودة فى نهاية الملحق .

أما القارئ الذى ليس له إلمام بعلم التفاضل والتكامل فعليه مراجعة الأبواب الخمس عشر من الكتاب التالى :
R.G.D. ALLEN, MATHEMATICAL ANALYSIS FOR ECONOMISTS (LONDON: MACMILLAN, 1938).

وفى الختام يود المؤلفان أن يقدموا جزيل شكرهما لأولئك الاقتصاديين الأوائل الذين كان لهم شرف تقديم تطبيق الرياضيات فى علم الاقتصاد وخصوصا فى حقل إقتصاديات الوحدات الصغيرة ، مثل هيكس وبول سامولسون وعديد من الآخرين الذين ذكرت أسماؤهم فى نهاية كل باب من أبواب الكتاب ضمن قائمة المراجع المختارة .

جيمس هيندرسان

ريتشارد كوندت

تمت الترجمة والله الحمد على ذلك فى مساء يوم الإثنين العاشر من شهر ربيع الثانى من العام ١٤٠٣ هـ من هجرة المصطفى ﷺ الموافق الرابع والعشرون من شهر يناير من العام ١٩٨٣ م من الميلاد ..

فألله الحمد والشكر والصلاة والسلام على خير خلقه وأفضل رسله الحبيب محمد بن عبد الله ... والسلام ..

المترجم

(د . موكل عباس المهلهل)

الفصل الأول

مقدمة

لم يعرف الاقتصاد تعريفا واضحا للتغير المستعنى موضوعاته التى مالمبت تنفير مع المدارس الاقتصادية المختلفة •• ومن التعاريف العامة للاقتصاد ما عرفه به البعض بدراسة استخدام العناصر المحددة لتحقيق المطالب المختلفة ، وهذا التعريف يصبح كافيا اذا فسر بتوسع كاف لجعله يضم دراسة العناصر الغير موظفه ويقطى كذلك الحالات التى مطلباتها أختيرت عن طريق الاقتصاد بين أنفسهم • وبدقه أكثر يمكن تعريف الاقتصاد على أنه علم اجتماعى يشرح حركات الأفراد والشعوب فى عمليات انتاج وتبادل واستهلاك المنتجات والخدمات •

THE ROLE OF THEORY

١ - ١ دور النظريات :

ان من أهم أهداف الاقتصاد ، وكذلك معظم العلوم الاخرى ، هما التنبؤ والتوضيح ومن أجل الوصول الى هذين الهدفين ، فانه من الضروري التعرف على التحاليل النظرية والابحاث العددية والتى تظهر وكأنها متداخله فى بعضها فى بعض الأمثلة ، ولكنها فى الواقع متعيزة عن بعضها البعض • فالنظريات تستخدم الاستنتاجات المجردة بينما النتائج تعتمد على مجموعة الافتراضات الأولية بينما الدراسات العددية الصرفة تكون منطقية بطبيعتها • وكلاهما يكمل الاخر حيث أن النظريات تعد الدراسات العددية بالارشادات بينما الدراسات العددية تعد النظريات بالاختبارات اللازمة للافتراضات ونتائج النظريات •

ومن حيث المبدأ فان أى نظرية تحتوى على ثلاثة مجموعات من العناصر وهى :

(١) حقائق علمية أو فروض تلعب دور الكميات متغيرة القيمة (المجاهيل) ويفترض أنها تكون معطاة من خارج النطاق التحليلى •

(٢) متغيرات تحدد كميتها النظريات •

(٣) افتراضات سلوكية تعرف بمجموعة العمليات التى عوملتا لمعرفة قيمة المتغيرات •

أما نتائج المناقشات النظرية فانها تنص على ما ستكون عليه نتائج العمليات الاقتصادية عندما تتحقق الافتراضات الأولية ، بمعنى أنه اذا أعطينا الحقائق العلمية فان الافتراضات السلوكية سوف تتحقق •

وللمقارنة بين الافتراضات والنتائج التي تعطيلها النظريات والحقائق الملحوظة فإنه لابد من التدقيق والبحث العددي ولكن ليس بصورة المطابقة التامة بين الحقائق الملحوظة والنتائج التي تعطيلها النظريات وإلا فإننا فقدنا الغرض من النظريات والتي تمثل تبسيطا وتمعيما للواقع الملموس ولكنها لا تصف حالات معينة بعينها إنما عموما . ولهذا فإن التثبت من الحقائق العلمية والافتراضات السلوكية والمتغيرات في أبواب هذا الكتاب والتي تمثل حالات السوق الحقيقية قليلة جدا وإلا فإننا نحتاج إلى نظريات مستغنية لكل سوق منفرد وإذا أجرى فيه من عمليات اقتصادية هي بذاتها تأخذ طابع خاص في كل سوق وهذا النوع من النظريات التطبيقية له قيمة عند القيام ببحث واحسد ولكنه يفقد عموما عند تطبيقه على سوق تمثل مجموعة من الأسواق ويصبح من السهل جدا وصف الحالات الخاصة بعد معرفة الحالات العامة والتي توصلنا إليها من طريق استخدام النظريات الصرفة في معرفة ماذا يجري داخل العمليات الاقتصادية كنقطة انطلاق لخلفيات تساعد على فهم الحالات الخاصة فيما بعد .

٢ - ١ نظريات الاقتصاديات الوحدات : MICROECONOMICS

وكمعظم العلوم الأخرى فإن علم الاقتصاد ينقسم إلى أجزاء وأقسام ومن أقسامه الرئيسية علم اقتصاديات الوحدات ونظرياته ويشمل دراسة الحركات الاقتصادية للأفراد ومجتمعات الأفراد المعنية . أما القسم الرئيسي الآخر لعلم الاقتصاد فهو النظريات الاقتصادية الكلية والتي تشمل دراسة المجموعات ككل مثل التوظيف والدخل القومي من النظرة الكلية وليس من النظرة الوحدية كما في القسم الأول من علم الاقتصاد . وكلا القسمين يتعاملان في إيجاد الأسعار والدخول (جمع دخل) والاستثمارات الموارد الاقتصادية . فبينما نظرية اقتصاديات الوحدات تركز على تحليل الأسعار والأسواق بصفة فردية ، وكذلك توزيع موارد اقتصادية بعينها إلى استخدامات معينة ، تقوم النظرية الاقتصادية الكلية بالحصول على دخول الأفراد ضمن عملية التسعير العامة الأفراد كتشعب دخولها ببيع مواصل الإنتاج التي تدر أسعارها كما تدر الأسعار الأخرى أما في حالة النظرية الاقتصادية الكلية فإن هدفها هو الحصول على الدخل القومي ووظيف الموارد ككل وكذلك مميزات التسعير الكلية مع تركيز ثانوي فقط على الارتباطات بين أطراف المجاميع المختلفة .

وبما أن مشكلات تقرير الأسعار الفردية ليست من وظائف النظرية الكلية فإن العلاقة بين الوحدات الفردية والمجاميع ليست واضحة ولو كانت كذلك ، فإن التحليل سوف يكون تحت لواء نظريات الوحدات .

إن التبسيطات التي يمكن الحصول عليها من طريق المجاميع تجعل من الممكن وصف

مكانة ومطيات الاقتصاد وككل من طريق تجمعات قليلة مبسطة وهذا يكون مستحيلا اذا حافظنا على الاهتمام بالوحدات وسلوكها والأسعار النسبية .

وبالحفاظ على هذا الضيق بين شعب الموضوع المختلفة ، فان هذا الكتاب سوف يكون محصورا على تحليل عرض لنظريات اقتصاديات الوحدات .

فمن خلال الباب الثانى إلى الباب الخامس سوف نركز على نظريات سلوك الافراد فى اقتصاد تنافس تام (كامل) . أما سلوك المستهلك الفردى فسوف نتناقص من خلال الباب الثانى والثالث ، وأما سلوك المنتج الفردى فمن خلال الباب الرابع والباب الخامس . وفى هذا التحليل فان أسعار المنتجات المباشرة أو المشتراة فانها سوف تفرض على أنها معطاه ولا يمكن للأفراد التأثير عليها . أما مقادير المنتجات المباشرة والمشتراة فانها تشمل المتغيرات التى تقررهما هذه النظريات . فمن خلال الباب السادس سوف نتعرض للسوق من التنافسية التامة (الكاملة) لسلعه واحدة ونقرر سعرها من طريق التصرف الحر لمشتري أو بائعى هذه السلعة ، فهنا نعتبر أن أسعار السلع الأخرى معطاه .

ومن الأمور التى تجعل نظريات اقتصاديات الوحدات أكثر مرونة هو سماحها بتغيرات عدة للافتراضات التى بنيت عليها هذه النظريات .

وكمثال لهذا فان الافتراض الذى ينص على أنه ليس باستطاعة فرد واحد التأثير على الأسعار أو على تحركات الافراد الآخرين ، قد عدل فى الباب السابع والباب الثامن من هذا الكتاب . وبالرغم من التغيرات لهذا الافتراض فانه يوجد تشابه قريب بين التحليل فى الباب السابع والباب الثامن واسبقهما من الأبواب الأولية . وحتى هذه النقطة من النقاش ، فان التحليل فى هذه الأبواب يحالج مشكلة المستهلكين والمنتجين مع الأسواق التى تحتوى على سلعة واحدة فقط (ما عدا معالجة قصيرة لمشكلة احتكار القلة المعززة) .

ولقد أهملت العلاقة بين جميع الأسواق فى هذه الأبواب ، ولكنها مولجت فى البابين التاسع والعاشر والذان يركزان على توازن الأسواق العدة بحيث أن جميع الأسعار تنقرر جميعا فى نفس الوقت .

أما الأبواب الأخيرة من هذا الكتاب ، فقد ظلت اثنين من أهم فروع نظريات اقتصاديات الوحدات . فالباب العاشر يشر بى على مسألة اقتصاديات الرفاهية والتى تتعلّق بالارضاء للأجابة على " ما الذى ينبغي أن يكون عليه الوضع الاقتصادى ؟ " وأن درجة التثبت بين النظرية والحقيقة مهم جدا فى هذا الفرع من الاقتصاد .

فانما كان شخصا مهتما بالوصف المطلق ، فان الطارق بين الحقيقة والنظرية يدل على أن النظرية خاطئة فى هذه الحالة لهذا الفرض المعين ، ولكن عندما تصبح النظرية مثال الرفاهية فان مثل هذا الطارق يؤدى الى النتيجة بأن الحالة الحقيقية خاطئة ولا بد من تعديل الواقع .

وأخيرا فإن الافتراض بوجود عالم ثابت لا يخطط فيه المستهلكون والمستهلكون للمستقبل ،
قد خفف التركيز عليه في الباب الثاني عشر •

٩ - ٣ دور الرياضيات : THE ROLE OF MATHEMATICS

إن النظريات الموجودة في هذا الكتاب قد وضعت في قالب رياضي يسمح
باستخدامها كأداة لتسهيل عمليات الاشتقاق والعرض ويجعل من الرياضيات نهرا سائلا
لترجمة النقاش الكلامي إلى أطر متكاملة شاملة في صورة رياضية وهذا مما يوسع جعبة
الاقتصاديون ويسهل لهم بعض الاستنتاجات من بعض الافتراضات الأولية ما كان يوسعهم
الحصول عليها لو كانت على شكل افتراضات لفظية (كلامية) •

ولقد كانت التحاليل اللفظية (الكلامية) أول المراحل في تاريخ تطور علم الاقتصاد
ونظرياته ولكن مع اكتشاف العلاقات الكمية ووضع النظريات الاقتصادية في أطر رياضية
جعل المناقشات اللفظية أكثر صعوبة وأصبحت مله ولقد توسع استعمال أقسام الرياضيات
نظرا للتعقيدات التي طرأت على المتغيرات الاقتصادية وأصبح علم حساب المثلثات غير
كافي لترجمة هذه المتغيرات نظرا لتعدد ها مما جعل الاقتصاديين يلجأون لفروع
الرياضيات الأخرى مثل التحليل الرياضي ، نظرية المجموعات ، والجبر • ولكن هذا
لا يعني أن نرى وراء ظهورنا كل التحاليل اللفظية وإنما يمكن استخدامها في التفاصيل
وذكر بعض الانضباطات على النظريات وهذه الأفكار الرياضية التي أستخدمت في هذا
الكتاب رجعت في آخره وننصح القارئ بمراجعتها ، أو حتى المرور عليها ، قبل قراءة
الباب الثاني •

الفصل الثاني

نظريات سلوك المستهلك

ان افتراض صرف المستهلك بعقل ورمانة ومعرفة تامة لما يجرى حوله هو نقطة الانطلاق فى نظريات سلوك المستهلك لانه يفترض فيه ان يكون على علم تام بكل البدائل الموجودة وان يختار منها لتحقيق الرغبة المستقاة منها باكبر قدر ممكن وان يكون قادرا على تقييمها . وكل هذه المعلومات والتي تخص الرغبة هى المستخلصة من استهلاك هذه السلع المختلفة تذكر فى دالة المنفعة للمستهلك .

ولقد خلت مفاهيم المنفعة ومألة تعظيمها من كل وصف حسى او احاشى . فالقول بأن المستهلك يستخلص اكثر منفعة من امتلاك السيارة عن امتلاكه لبدلة يعنى انه اذا خير بين الاثنين فانه سوف يختار بالتأكيد السيارة على البدله . ولكن هذا لا يعنى ان المستهلك سوف يختار الاشياء التى تعطيه اكثر منفعة تحت جميع الظروف فقد يضطر لان يأخذ اللقاح ضد الجدري ، اذا كان هناك تهديد بظهور اعراض هذا المرض ، ويستخلص منها فائدة او منفعة جمه بالرغم انه لا يحمل على اية لذة من اخذه اللقاح او المعاناة المستترة بها .

وفى القرن التاسع عشر اعتبر كثير من الاقتصاديين (مثل : ستانلى جيفونز ليمون فالراز والفرد مارشال) ان المنفعة قابلة للقياس بمعنى ان المستهلك قادر على ان يعين لكل سلعة يستهلكها او خليط من السلع رقم معين يوضح مقدار المنفعة التى يحصل عليها من استعماله لهذه السلع واسموه القياس الجوهري (cardinal measure) واعتبروه كقياس الوزن وانه يمكن معالجته والتصرف فيه على نفس طريقة الاوزان . وعلى سبيل المثال ، افترض ان المنفعة من السلعة (١) تقدر بخمسة عشر وحدة وان المنفعة من السلعة (ب) هى ٤٥ وحدة ، فالمستهلك يعبر عن تفضيله للسلعة (ب) ثلاثة مرات اكثر من السلعة (١) والمقارنة بين فروقات المنفعة معترف بها ونستطيع القول بان السلعة (١) تفضل على السلعة (ب) مرتين بقدر ما تكون السلعة (س) مفضلة على السلعة (S) . وفى حالة استهلاك وحدات اضافية من السلع المستهلك فان مقدار المنفعة

المضافة سوف يتناقض مع زيادة الاستهلاك وهذا يعكس سلوك المستهلك والذي يمكن استخلاصه مما سبق . فلنفترض أن المستهلك واجهته مسألة شراء كمية من التفاح بسعر ريالين فانه لن يشتري التفاح اذا كان مقدار المنفعة التي سوف يستلمها بدفعه لقيمة التفاح أكبر من مقدار المنفعة التي سوف يحصل عليها من التفاح .

فإذا افترضنا أن مقدار المنفعة من الريال الواحد هو خمسة وحدات منفعية (utils) وأنها تستمر تقريباً ، ثابتة لبعض التغيرات في الدخل ، وأن المستهلك يتحمل على علوة من المنفعة باستهلاك تفاحة اضافية على مجموع التفاح المستهلك حسب الجدول الآتي :

الوحدات	منفعة اضافية
التفاحة رقم (١)	٢٠
التفاحة رقم (٢)	٩
التفاحة رقم (٣)	٧

المستهلك سوف يشتري على الأقل تفاحه واحده لانه سوف يعطى ٥ وحدات منفعية في مقابل الحصول على ٢٠ وحدة منفعية وهكذا يزيد في مجموع منفعة (١) وسوف لا يشتري تفاحه ثانياً لان المنفعة المفقوده

أكبر من المنفعة المكتسبه . وعلى وجه العموم ، فان المستهلك سوف لا يضيف الى استهلاكه وحدة استهلاك اخرى اذا كان هذا ينقص من مجموع منفعة وسوف يستهلك كمية أكبر اذا تحقق من ازدياد في كميته منفعة من هذه الزيادة في الاستهلاك فلوان سعر التفاح انخفض الى ١ ريال من الريال فانه سوف يشتري الان ، تفاحتان بدلاً من واحدة ، لأن انخفاض السعر أدى الى زيادة الكمية المشتراة وبهذا الاحساس تنتبى النظريات بسلوك المستهلك . وهذه النظرية للمنفعة القاسه انما كانت مبنية على افتراضات معرقله من الممكن الحصول على نفس النتائج باستخدام افتراضات اقل عرقله وسوف لا تقوم باستخدام المنفعة القاسه في بقية هذا الباب ولا نفترض ان استهلاك كمية أكثر من اى سلعة يؤدى الى انخفاض المنفعة .

فإذا كان المستهلك يتحمل على منفعة أكثر البديل (١) من البديل (ب) فانه يقال بان المستهلك يفضل (١) على (ب) (٢) . وافترض السلوك السليم للمستهلك يعادل النصوص الاتيه :

(١) لجميع احتمالات تبادل السلع (١) و (ب) فان المستهلك على علم بانه اصماً ان

(١) السعر للتفاحة الواحدة هو ٢ ريال والمستهلك يفقد ٥ وحدات منفعية لكل ريال صرفه ، وعليه فان مجموع الوحدات الفائتة هو ١٠ وحدات بينما مجموع الوحدات المكتسبة هو + ٢٠ وحدة منفعية .
(٢) أن كلمة "يفضل" "prefer" يمكن اعتبارها خالية من الوصف الحسى أو الاحاسى .

يفضل (أ) على (ب) أو (ب) على (أ) أو أنه غير متحيز لأي منهما •
 (٢) طيه فقط ان يختار بين التفاضلات الثلاث في الفقرة (١) و (٣) إذا كان المستهلك يفضل السلع (أ) على (ب) ، والسلع (ب) على (س) فإنه ، بالتأكيد يفضل (أ) على (س) وهذا يضمن تناسق تفضيل المستهلك بين السلع أي ان المستهلك يمتلك خاصية التمدد (*transitive*) بمعنى أنه إذا كان المستهلك يفضل الحصول على سيارة عن الحصول على بدلة ملابس ، وبدلة ملابس على قطعة من الشوريه ، فإنه بالتأكيد يفضل الحصول على السيارة عن قطعة الشوريه • وهذا يتطلب من المستهلك ان يصنف ، على درجات ، السلع حسب ترتيب التفاضل بينها ولا يحتاج ، في هذه الحالة ، لقياس عددي وإنما يحتاج الى مقياس ترتيبى (*ordinal*) للسلع التي يفضل الحصول عليها ودالة المنفعة (*utility function*) سوف تعبر عن هذا القياس الترتيبى للأشياء المستهلك وسوف تتسبب رقما معينا لكل كمية من السلع الاستهلاكه المنطقه ، ولكن هذه الأرقام سوف لا تمكن الا فقط ترتيب غاغل السلع • فإذا كانت منفعة السلعة (أ) هي الرقم ١ ومنفعة السلعة (ب) هي ٤٥ فيمكن القول بأن السلعة (ب) أفضل على السلعة (أ) ولكنها هدية المعنى إذا قلنا ان السلعة (ب) أفضل بثلاث مرات على السلعة (أ) ولقد اكتشفت هذه الطريقة في بداية هذا القرن ولقد أصبح من الممكن والاسهل وضع السلوك السليم للمستهلك بطريقة ترتيبيه لاطلاقه لها بعرات التفضيل إذ أنه ليس من الضروري وضع تفاضل المستهلك بصورة قياسيه إذ ان الافتراض الاضعف (وهو وجود ترتيب للسلع المفضله بدون مقياس عددي) توصل الى نفس النتيجة بدون فرض او عدم فهم • فالمستهلك في هذه الحالة يكون لديه قائمة بالسلع المفضله لديه مرتبه حسب درجة تفضيلها والتي يمكن شراؤها بمقدار من النقود يساوى دخله • فعندما يستلم المستهلك دخله ، فإنه بكل بساطه يستطيع شرا " مجموعة السلع التي يفضلها وحسب ترتيبها من الأفضل الى الأقل تفضيلا وبهذا فإنه لا يحتاج الى مقياس عددي للمنفعة •

٢ - ١ مفاهيم أساسية :

(١) طيعة دالة المنفعة :

اعتبر الحالة المبسطه والتي تحدد فيها القدرة الشرائية للمستهلك لسلعتين فقط والتي تحددها دالة المنفعة الترتيبية

(*ordinal utility function*)

$$U = f(q_1, q_2) \quad [1 - 2]$$

بحيث ان q_1 ، q_2 يعبران عن كمية السلعتين المستهلكتين Q_1 ، Q_2 ويفترض في هذه الداله ان تكون دالة متصله (*continuous*) ولها اشتقاق جزئى

متصل من الدرجة الاولى والثانية

(first- and- second order partial derivative .)

(١)

ولها ذلك دالة منتظمة منضبطة شبه - مقعرة

(regular strictly quasi-concave function.)

بالاضافة الى ان الاشتقاق الجزئى للدالة (٢-١) دائما موجب وهذا يعنى ان المستهلك سوف يرغب دائما فى الحصول على كميات اكبر من كلا السلعتين . ونعرف مدى الدالة بأنه مجموع معدلات الاستهلاك الغير سالب (بمعنى ان معدل الاستهلاك امسا يكون باستهلاك سلعة او عدم استهلاك سلعة) وفى بعض الاحيان يكون العدد محدودا على المستويات الموجبة فقط للاستهلاك .

وان دالة المنفعة للمستهلك ليست فريدة (unique) ويمكن تمثيلها بأى دالة متزايدة (increasing) وذات قيمة فردية (single-valued)

للكميات q_1, q_2 والرمز U المعطى لى خليط معين من السلع يوضح ان هذا الخليط من السلع مفضل على اى خليط اخر بارقام اقل ، واقل غنضيا من السلع التى لها ارقام اعلى ومستوى المنفعة التى يحمل عليها المستهلك من اى سلعة تعتمد على طول الفترة الزمنية التى يستغرقها فى استهلاك هذه السلعة او الخلط من السلع . فاستهلاكه عشر قطع من الحلوى فى خلال ساعة او فى خلال شهر يعطى مستويات مختلفة من المنفعة وعليه فانه لا يوجد وقت بعينه تكون دالة المنفعة من خلاله ولذلك فان دالة المنفعة تكون معرفة بالنسبة للإستهلاك خلال فترة زمنية معينة وهذه الفترة الزمنية يجب ان لا تحدد بزمن قصير جدا يمنع المستهلك من تحقيق رغباته فى التمتع بمختلف السلع الاستهلاكية . ولكن فى نفس الوقت لا يجب ان تعرف دالة المنفعة لفترة زمنية طويلة جدا والا فان هذا يؤدي الى تغيير مظهر (شكل) الدالة لان تذوق المستهلك قد يختلف فى فترة طويلة كهذه ، ولهذا فان اى فترة زمنية مناسبة كافية فى حالة سلوك المستهلك تحت تأثير نظرية عدم الحرك حيث ان عنصر الزمن غير داخل ضمن متغيرات الدالة انما يعتبر ثابت من الثوابت (ما نعينه هنا هو static theory) بحيث ان دالة المنفعة معرفة بالنسبة الى فترة زمنية واحدة وان طرق مصروفات المستهلك الاكثر مثالية تنمى نفس التحليل مع هذه الفترة الزمنية الواحدة ولا يمكن ادخال حساب احتمال تحويل هذه

(١) يقال للدالة بانها دالة منضبطة شبه - مقعرة فى المجال اذا كان

$$2f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0.$$

لجميع قيم $0 < \beta < 1$

المصروفات الاستهلاكية من فترة زمنية الى اخرى (١)

منحنيات السواء Indifference Curves

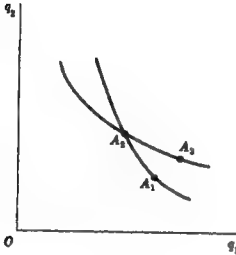
يستطيع المستهلك الحصول على مستويات منتظمة من المنفعة من خليط من السلع الاستهلاكية Q_1 و Q_2 التي يحصل عليها وتصبح دالة المنفعة على النحو التالي ، اذا اعطينا المستوى الذي يبلغه المستهلك باستخدام بعض السلع

$$U^0 = f(q_1, q_2) \quad (2-2)$$

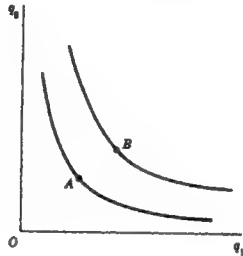
بحيث ان f_1 ، f_2 كمية ثابتة بما ان دالة المنفعة دالة متصلة ، فان معادلة (2-2) تتحقق باى عدد ممكن من الخليط للسلع الاستهلاكية Q_1 و Q_2 . ولنفترض ان المستهلك يحصل على مستوى معين من المنفعة (U^0) من استهلاك ٥ وحدات من السلعة Q_1 و ٣ وحدات من السلعة Q_2 فاذا افترضنا ان استهلاك من السلعة Q_1 انخفض من ٥ الى ٤ وحدات بدون زيادة في استهلاك من السلعة Q_2 فان مستوى المنفعة سوف ينخفض بالتأكيد ولكن يمكن تعويضه عن فقدان وحدة من Q_1 بزيادة في استهلاك للسلعة Q_2 ولكن مثلا ٣ وحدات وهذا سوف يجعله غير متحيزا بين الرغبة الاولى (٥ وحدات Q_1 و ٣ وحدات Q_2) والرغبة الثانية (٤ وحدات من Q_1 و ٦ وحدات من Q_2) بمعنى انه لا يعانق في الحصول على أى رغبة من الرغبتين على وجه السواء . وبغض الطريقه نستطيع الحصول على مستويات اخرى للمنفعة التي من الممكن الحصول عليها باستهلاك كميات من مجاميع (خليط) مختلف من نفس السلع المستهلكة ، وبذلك نحصل على الحل الهندسي (locus) لجميع تبادلات السلع التي يحصل المستهلك من خلالها على نفس المستوى من المنفعة وهذا الحل الهندسي يكون منحنى السواء (indifference curve) وتسمى مجموعة المنحنيات السواء لنفس مستوى المنفعة بخريطة السواء (indifference map) ولرسم منحنى السواء فاننا نمثل الكميات q_1 وكذلك q_2 للسلع المستهلكة على إحداثيات الشكل (2-1) وكل منحنى من منحنيات السواء يمر خلال جميع النقط في الربع الموجب من السطح q_1 و q_2 وكلما اتجه منحنى المستوى في اتجاه شمال شرقي كما كان مستوى المنفعة اكبر فالتحرك من النقطة A الى نقطه B

(١) لا تعتبر التحاليل ما اذا يحدث بعد انقضاء فترة الدخل الحالية يفترض أن المستهلك يقوم بعمل حسابات فقط لهذه الفترة الزمنية وحساب دخله فيها ويميد حساباته بعد انتهاء الفترة الأولى ويعمل حساباته للفترة التي عليها (لأن النقاش لا يزال في حالة شوب) وان كان في استطاعة المستهلك أن يفترض فان حساباته للفترة الزمنية سوف تتكون من دخله زائدا كمية النقود التي اقترضها خلال نفس الفترة الزمنية التي اكتسب فيها دخله وبالعكس في حالة أنه وفر جزءا من دخله ولم يصرفه على الاستهلاك (راجع الباب الثاني عشر الجزء الثاني)

يزيد من الكميات المستهلكة من Q_1 ، Q_2 ، وعليه فان نقطة تمثل منحنى "سوا" لمستوى أعلى من المنفعة .



شكل (٢ - ٢)



شكل (١ - ٢)

ولا يمكن لمنحنيات السوا ان تتقاطع كما في شكل (٢-٢) لاننا افترضنا ان المستهلك يحصل على المنفعة U_1 من استهلاك خليط من السلع الممثل في A_1 والمنفعة U_2 من الخليط A_2 . وكذلك U_2 من A_3 فنعد النقطة A_3 يتتبع المستهلك بسلع اكثر من السلع عند النقطة A_1 ، وعليه فـ $U_2 > U_1$ (بمعنى ان المنفعة من النقطة A_3 اكبر من المنفعة من النقطة A_1) ولكن A_1 ، A_2 على نفس المنحنى ولذلك فان $U_1 = U_2$. وكذلك فان A_2 ، A_3 على نفس المنحنى ، ولذلك فان $U_2 = U_3$ ، وبطبيعة الحال فان $U_1 = U_2 = U_3$. عكس ما افترضنا في البدايه من ان $U_1 < U_2$ ، فوجدنا ان $U_1 = U_2 = U_3$ ، A_3 ، A_1 على نفس المنحنى فلا يمكن اذا للمنحنيات ان تتقاطع كما في الشكل (٢-٢) .

اما من ناحية الافتراض بان دالة المنفعة يجب ان تكون شبه - مقعرة منطبقة (strictly quasi-concave) يحدد شكل منحنى السوا :
ولنفترض ان هناك نقطتان مميزتان على احد منحنيات السوا بحجم
ان $U^0 = f(q_1^0, q_2^0) = f(q_1^1, q_2^1)$.
فافتراض ان الدالة شبه - مقعرة يتطلب ان :

$$U[\lambda q_1^0 + (1-\lambda)q_1^1, \lambda q_2^0 + (1-\lambda)q_2^1] > U^0$$

لجميع قيم $0 < \lambda < 1$ وهذا يعنى ان جميع النقاط الداخليه الواقعة على جزئ من اى خط يصل بين نقطتين على منحنى سوا* ، تقع على منحنيات سوا* تمثل مستويات أعلى من المنفعة ونقول بان منحنيات السوا* محد به فى اتجاه نقطة الاصل .

معدل تعويض السلع . RCS The Rate of Commodity Substitution

بتطبيق قانون الاشتقاق الكلى على دالة المنفعة نحصل على الاتى :

$$dU = f_1 dq_1 + f_2 dq_2 \quad (٢-٣)$$

بحيث ان f_1 و f_2 يمثلان الاشتقاق الجزئى للمنفعة (U) فيما يتعلق بالكميات q_1 و q_2 . فالتغير الكلى فى المنفعة (مقارنة بالحالة الابتدائية) والذي تم بسبب التغيرات فى الكميات q_1 و q_2 هو تقريبا التغير فى q_1 (بمعنى dq_1) مضروباً فى التغير فى المنفعة (f_1) كنتيجة لتغير وحده من q_2 زائداً التغير فى q_2 (بمعنى dq_2) مضروباً فى التغير فى المنفعة (f_2) كنتيجة لتغير وحدة من q_2 .

والان، لنفترض ان المستهلك تحرك على واحد من منحنيات السوا* الخاصه به بتخفيضه. بعضاً من Q_1 مقابل الحصول على كمية اكبر من Q_2 فاذا كان استهلاكه من Q_1 انخفض بمقدار dq_1 (ولذلك تعامل dq_1 على اساس انها اقل من صفر لانها بتتناقص بمعنى $dq_1 < 0$) فيكون ناتج الخسارة للمنفعة هو تقريباً يساوى ($-dq_1 \cdot f_1$) ويكون ناتج الكسب فى المنفعة ، بسبب الحصول على كمية اكبر من Q_2 مقابل التنازل عن بعض Q_1 ، هو تقريباً يساوى ($f_2 dq_2$) لنفس الاسباب . وبأخذ اجزاء صغيرة بصورة غير محدده ، فان حاصل جمع الكميتين $f_1 dq_1 + f_2 dq_2$ لابد وان يكون صفراً فى النهايه (اى بمعنى ، اننا قمنا باخذ النهايه لدالة المنفعة) لان التغير الكلى فى المنفعة على منحنى السوا* الواحد لابد وان يكون صفراً حسب تعريف منحنيات السوا* (١) وبما اننا نستخدم دوال المنفعة الترتيبية، فان كميات ($f_1 dq_1$) وكذلك ($f_2 dq_2$) تكون مجهوله وغير معروفه ولكن لا تزال الحقيقه ان $dU = 0$ ، ثابتة وطيه فان :

$$f_1 dq_1 + f_2 dq_2 = 0 \quad \text{تعطى}$$

$$-\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{f_1}{f_2} \quad (٣-٤)$$

(١) تخيل أن دالة المنفعة عبارة عن سطح فى الفضاء الثلاثى three-dimensional space. فعملية كون اشتقاقها الكلى (معادلة ٣-٤) هو معادلة سطح التماس tangent plane للسطح فى الفضاء الثلاثى عند نقطة ما وهذا ما يعمل استخدامنا لكلمة "تقريباً" فى النقاش .

فمن المعادلة السابقة ، يتضح لنا ان ميل منحني السوا* (وهو dq_2/dq_1) هو المعدل الذي يستطيع عنده المستهلك وبرغبته ابدال Q_1 بكمية اكبر من Q_2 لكل وحدة من وحدات Q_1 من اجل البقاء على نفس مستوى المنفعة المرغوب فيه أو المعطى . وعلاقة السالب الموجودة امام الميل ($-dq_2/dq_1$) - ترمز الى تعويض السلعة Q_1 من اجل Q_2 وتساوى خارج قسمة الاشتقاق الجزئية لدالة المنفعة (١) ومقلوب (او معكوس) معدل تعويض السلع (RCS) هو المعدل الذي يستطيع المستهلك من خلاله ان يحافظ على نفس مستوى المنفعة من خلال تنازله عن بعض وحدات Q_1 مقابل زيادة في وحدات Q_2 .

وفي التحليل القياسي فان الاشتقاق الجزئية f_1 وكذلك f_2 تصرف بأنها معدل المنفعة الحدى للسلع Q_1 و Q_2 و *marginal utilities of the commodities* وسوف نحافظ على هذا التعريف بالرغم من اننا لا نستخدم المعيار القياسي وانما نستخدم المعيار الترتيبى في المفاضلات ولكننا سوف لا نمضى هذا المعدل معنى قياس بمعنى ان المقدار العددي للمعدلات الحدية MU يكون خاليا من اى معنى ولا نفترض ان المستهلك يدركا لوجود المعدل الحدى ولكن فقط ، الاقتصادى هو الذى يحتاج أن يعرف أن معدل التعويض للسلع بالنسبة للمستهلك (RCS) مساويا لنسبة المعدلات الحدية للمنفعة (MU) (بمعنى أن $RCS = MU$) وعلامات ونسب المعدلات الحدية لها تقاسير ومعانى فى التحاليل الترتيبية ، فمثلا العلامة الموجبة أمام (f_1) تدل على أن أى زيادة فى (q_1) سوف تزيد من مستوى منفعة المستهلك وتجعله ينتقل الى منحني سوا* أعلى مما كان عليه .

وبما أن دالة المنفعة معرفة على أنها دالة شبيهة - مقعرة منضبطة فان اللامتناهية التالية والتي تحصر القيمة فى عدم مساواة فقط (بدون مساواة معا) تتحقق عند كل نقطة داخل مدى الدالة :

$$2f_1f_2f_3 - f_1^2f_3 - f_2^2f_3 > 0 \quad (٢-٥)$$

وبغاضل أكثر لمعادلة (٢-٤) فاننا نحصل على معدل التفسير لميل منحني وهو كالنالى (٢) :

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = -\frac{1}{f_1} (f_{11}f_2 - 2f_1f_2f_3 + f_{22}f_1) \quad (٢-٦)$$

- (١) يسمى معدل تعويض السلع فى كتابات علم الاقتصاد عادة معدل التعويض الحدى (الهامشى) : *the marginal rate of substitution* : ويعرف عادة بأنه الزيادة فى المنفعة الناتجة من زيادة فى استهلاك بمعدل وحدة واحدة (ويرمز له بالرمز MRS) وللزيادة فى المعرفة راجع كتاب هيكر تحت عنوان " القيمة ورأس المال " .
- (٢) لاحظ ان معادلة (٢-٦) نتجت من اخذ الاشتقاق الكلى لميل منحني السوا* بدلا من الاشتقاق الجزئى .

اللامتناهية (٢-٥) تضمن أن الجزء ، داخل القوس على الطرف الأيمن من المعادلة (٢-٦) يكون سالبا واما أن ($f_2 > 0$) فانه يتطلب شبه التغير المنتظم على طينا بأن ميل منحنى السوا السالب يصبح أكبر مقدارا من الناحية الجبرية وأقل قيمة بالنسبة لقيمة المطلقة عند تعويض Q_2 بدلا من Q_1 ويصبح المنحنى أكثر انبساطا وأن RCS (وهو يساوى القيمة المطلقة لميل المنحنى) يتناقص. وكلما تحرك المستهلك منحنى السوا ، فانه يتحصل على كمية أكثر من Q_1 وكمية أقل من Q_2 وطيه فان المعدل الذى من خلاله تظهر رغبة المستهلك فى التضحية بكمية من Q_2 مقابل كمية أكبر من Q_1 يأخذ فى التناقص فتأخذ ندرة وجود Q_2 فى التزايد وتأخذ قيمتها النسبية relative value. فى الارتفاع بالنسبة للمستهلك كلما ازدادت ونسبة Q_1 له .

التحقق من وجود دالة المنفعة : Existence of the Utility Function

انه ليس من البديهي الجزم بوجود دوال ذات قيم حقيقية
(real-valued functions)
تخدم كدوال منفعية لجميع المستهلكين وأن تفضيلات المستهلك لا بد وأن تحقق شروط معينة من أجل تمثيلها بدالة من دوال المنفعة وشروط الكفاية التالية بهب أن تتوفر تسهل التحقق من وجود دالة منفعة للمستهلك .
(١) ان مجموعات السلع المختلفة المتوفرة للمستهلك يكون لكل واحدة منها علاقة بالمجموعة الأخرى وترمز لها بالحرف R .والذى يعنى العبارة التالية " يكون على الأقل فضلا مطلقا " وتكون لها الصفات الآتية :

- (أ) العلاقة R تكون علاقة كاملة (complete) بمعنى أنه لاى زوج من مجموعات السلع A_1 ، A_2 واما أن يكون ($A_1 R A_2$) أو ($A_2 R A_1$) كلاهما معا .
(ب) العلاقة R تكون علاقة تعد (transitive) بمعنى أنه إذا كان $A_1 R A_2$ وكذلك $A_2 R A_3$ فانه اذا $A_1 R A_3$
(ج) العلاقة R تكون علاقة انعكاسية (reflexive) بمعنى أن $A_1 R A_1$ بغض النظر عما تكون عليه A_1 .

- (٢) ان مجموعات السلع المختلفة والمتوفرة للمستهلك مرتبطة (connected) بمعنى أنه اذا كانت المجموعة A_1 والمجموعة A_2 متوفرة للمستهلك فانه يمكن الحصول على خط متصل يربط بين مجموعات السلع المتوفرة للمستهلك A_1 ، A_2 .
(٣) اذا أعطينا بعض المجموعات من السلع ولكن A_1 فانه يمكن الحصول على مجموعات أخرى على الأقل تكون أفضليتها فى المجموعة مثل أفضلية A_1 عند المستهلك وكذلك فانه يمكن الحصول على مجموعة أخرى من السلع ليست أكثر أفضلية من A_1 ومثل هذه المجموعات

تكون مغلقة (closed) بمعنى أنه لو أخذنا أعدادا كبيرة جدا من مجموعات سلع لتكون متتالية تعول إلى مجموعة نهائية من السلع ولكن A وأنه إذا كان كل عنصر من عناصر هذه المتتالية له على الأقل أنفلية A_i عند المستهلك ففي هذه الحالة تكون A أيضا على الأقل مغلقة مثل A_1 وهذه الخاصية (خاصة الاغلاق) تضمن أعمال أنفلية المستهلك وعدم وجود أي تخطي أو قفز "jumps" وعلى سبيل المثال ، فانه إذا كان هناك مجموعتان من السلع يختلفان عن بعضهما اختلافا طفيفا بحيث أن أحدهما مغلقة على مجموعة من السلع A_1 فان المجموعة الأخرى تكون على الأقل مغلقة مثل A_1 .

وقد يظهر للبعض أن شروط السابقة طرية لدرجة أنها تكون دائما متحققة ولكن من السهل ذكر بعض الأنفليات التي لا تحقق الشروط السابقة . فلنفترض أن هناك سلعتان

$$Q_1, Q_2 \text{ وأن هناك مجموعتان من السلع } A_1 = (q_1^{(1)}, q_2^{(1)})$$

واعتبر أن المستهلك يفضل أحد السلع أو المجموعات حسب

$$A_2 = (q_1^{(2)}, q_2^{(2)})$$

القاعدة التالية : A_1 مغلقة على A_2 إذا كان إما $q_1^{(1)} = q_1^{(2)}$ or $q_2^{(1)} > q_2^{(2)}$ وكذلك

$q_1^{(1)} > q_1^{(2)}$ ففي مثل هذه الحالة ، يكون ترتيب الأنفلية مصنفا (*lexicographic*)

ولا توجد له دالة ضمنية لأن الترتيب المصنف يخالف القاعدة الثالثة من الشروط السابقة .

فإذا اعتبرنا المجموعة $A = (q_1, q_2)$ وافترضنا أن Δq_1 وكذلك Δq_2 عرزم إلى

الـ "أجزاء" (التقسيمات) الموجبة من المجموعة A ، وحسب الترتيب المصنف فإن المجموعة

($(q_1 + \Delta q_1, q_2 - \Delta q_2)$) تكون مغلقة على المجموعة A . فإذا اخترنا قيم

موجبة معدده للتقسيمات ($\Delta q_1, \Delta q_2$) واعتبرنا العنصر رقم i من

اللانهاية لمجموعات السلع هو :

$$A_i = (q_1 + (i/\Delta q_1), q_2 - \Delta q_2)$$

فانه من الواضح أن A_i يكون مغفلا على A لأي عنصر من عناصر المتتالية ولكن

بأخذ نهاية المتتالية $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = (q_1, q_2 - \Delta q_2)$ يتضح لنا أن نتيجة هذه

النهاية أدنى من مخالفة بذلك الشرط الثالث من الشروط السابقة .

THE MAXIMIZATION OF UTILITY

٢ - ٢ الحد الأعلى للمنفعة

يرغب المستهلك العاقل دائما في شراء خليط من Q_1 و Q_2 والتي من خلالها

يستند إلى مستوى من المنفعة وهذه المسألة هي مسألة إيجاد الحد الأعلى للمنفعة

ولكن على كل حال ، فان دخله محدود ولا يستطيع شراء كميات غير محدودة من السلع

ويمكن التعبير عن ضوابط ميزانية المستهلك على النحو التالي :

$$y^0 = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

بحيث أن y يمثل دخله (المحدود) و p_1, p_2 يمثلان أسعار Q_1, Q_2 بالتوالى فنقدار ما يصرفه على Q_1 هو $(p_1 q_1)$ زائدا ما يصرفه على Q_2 هو $(p_2 q_2)$ يساوى مقدار دخله (y)

شروط الدرجة الأولى والثانية The First- and Second-Order Conditions

يرغب المستهلك في الحصول على الحد الأعلى لدالة المنفعة (٢-١) والمقيدة بالضايق (٢-٧) وللحصول على الحد الأعلى نتبع طريقة لاقرانج بتكوين دالة لاقرانج •

$$(٢-٨) \quad V = f(q_1, q_2) + \lambda(y^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2)$$

بحيث أن λ ضابط (مضروب) لم يتعين بعد •

يمكن الحصول على شروط الدرجة الأولى بوضع اشتقاقات الجزئية الأولى للمعادلة (٢-٨) بالنسبة للمجاهيل q_1, q_2, λ مساوية للصفر أى بمعنى :

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = f_1 - \lambda p_1 = 0$$

$$(٢-٩) \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = f_2 - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = y^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$$

وبعد تبسيط المعادلات السابقة ونقل الحد الثانى من المعادلتين الى الطرف الايمن ثم قسمه ناتج المعادلة الاولى على الثانية نحصل على :

$$(٢-١٠) \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

وهذه المعادلة توضح لنا النسبة بين المنفعة الحدية (الهـاشـمـة

Marginal utility وأسعار السلع بحيث ان نسبة المنفعة الحدية تساوى نسبة

الاسعار فى حالة الحصول على الحد الاعلى maximum وطا $RCS = f_1/f_2$

فان شرط الدرجة الاولى للحد الاعلى يتحقق بمساواة النسبة بين الاسعار و RCS • ويمكن إعادة كتابة المعادلتين الاوليين من (٢-٩) لتصبح

$$(٢-١١) \quad \frac{f_1}{p_1} = \frac{f_2}{p_2} = \lambda$$

وهذه المعادلة تعبر عن الحقيقة القائلة بان المنفعة الحدية مقسومة على السعر

يجب ان تكون واحدة لجميع السلع. وهذه النسبة تعطى المعدل الذى من خلاله

يستطيع المستهلك ان يتحصل على منفعة اكثر اذا صرف ريال اضافى على سلعة معينة فلذا

تحصل المستهلك على منفعة اكثر من صرفه ريال اضافى على Q_1 بدلا من Q_2 فانه فى

هذه الحالة لا يمكن الحصول على الحد الاعلى للمنفعة ولكنه يستطيع تحقيق ..منفعة اكثر

بتحويل بعضا من مصروفاته من شراء Q_2 إلى شراء Q_1 .
(Lagrange multiplier)
على انه المنفعة الحدية لدخل المستهلك (marginal utility of income)
وبما اننا افترضنا ان المنفعة الحدية للسلع موجبه فذلك المنفعة الحدية للدخل .

ولضمان الحصول على الحد الاعلى للمنفعة للمستهلك فلا بد من تحقق شرط
الدرجة الثانيه كما كان ولا بد من تحقيق شرط الدرجة الاولى . فاذا رمزنا للمشتقات
الجزئيه الثانيه لدالة المنفعة بالحروف f_{11} ، f_{22} وكذلك للمشتقات الجزئيه الثانيه
المتماكسه cross بالرمز f_{12} ، f_{21} فان شرط الدرجة الثانيه للحصول
على الحد الاعلى يتطلب ان تكون محدوده هيسين المتاخمة (bordered Hessian
determinant) موجبه على النحو التالي :

$$(12-2) \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

ويحل (١٢-٢) نحصل على :

$$(13-2) \quad 2f_{12}p_1p_2 - f_{11}p_2^2 - f_{22}p_1^2 > 0$$

وبالتعويض
نحصل على
(١٤-٢) $2f_{12}f_1f_2 - f_{11}f_2^2 - f_{22}f_1^2 > 0$
من (٩-٢) والضرب بالعدد $\lambda^2 > 0$

واللامتناويه في (١٤-٢) والتي هي نفسها المعادله (٥-٢) تحقق افتراض شبه التقمعر
المنتظم وهذا الافتراض يضمن ان شرط الدرجة الثانيه يتحقق عند اى نقطه يتحقق
عندها شرط الدرجة الاولى . وهذا اللامتناويه في (١٤-٢) هي ، ايضا ، الشرط
الذي يجب ان يتحقق للحصول على حلول شاملة ذات قوة اسيه واحده للمعادله في
(٢-٥) $global\ univalence\ of\ solutions$ وهكذا نجد ان شبه
التقمعر المنتظم يضمن لنا ايضا حلول الحد الاعلى القيد للمنفعة تكون فريده او وحيدة .

مثال : افترض ان دالة المنفعة معطاة على النحو التالي $U = q_1q_2$ وان
الاسعار $p_1 = 2$ $p_2 = 5$ ريال وان دخل الفرد للفترة الزمنييه هو
١٠٠ ريال وان ميزانيته مقيد . بالقيد : $100 - 2q_1 - 5q_2 = 0$

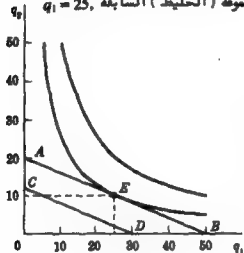
الحل : نكون دالة لاقرانج $V = q_1q_2 + \lambda(100 - 2q_1 - 5q_2)$
ونضع اشتقاقها الجزئيه مساويه للصفر بحيث ان

$$q_2 - 2\lambda = 0$$

$$q_1 - 5\lambda = 0$$

$$100 - 2q_1 - 5q_2 = 0$$

وبحل الثلاث المعادلات الخطية نحصل على $q_1 = 25$, $q_2 = 10$, and $\lambda = 5$. وشرط الدرجة الثانية يتحقق إذا قام القارئ بجميع عمليات التفاضل وبهذا فإن المستهلك حصل على الحد الاقصى للمنفعة باستهلاكه المجموعة (الخليط) السابقة $q_1 = 25$, $q_2 = 10$.



شكل (٢ - ٣)

الشكل (٢-٣) يحتوي على

تمثيل هندسي لهذا المثال ان خط السعر

price line هو الممثل AB

الهندسي للقيد على ميزانية المستهلك ويوضح

جميع التبادل من Q_1 و Q_2 والتي

يستطيع المستهلك شرائها ومعادلاته

هي $100 - 2q_1 - 5q_2 = 0$.

فباستطاعة المستهلك ان يشتري ٥٠ وحدة

من Q_1 اذا كان لن يشتري شيئاً من Q_2

ويستطيع كذلك شراء ٢٠ وحدة من Q_2

اذا كان لا يريد شراء شيء من Q_1 ، وهكذا نستطيع الحصول على خطوط سعر مختلفة

لكل مستوى محتمل لدخل الفرد، فلو كان دخله هو ٦٠ ريال فإن خط السعر هو

rectangular hyperbolas (١)

ومحنيات السوا في هذا المثال

والمستهلك يرغب في الوصول الى اعلى منحنى سوا يكون له على الاقل نقطة واحدة مشتركة

مع خط دخله AB وبذلك يصل الى نقطة التوازن E والتي يكون عندها خط دخله مماساً

لمنحنى السوا، وان اى انتقال الى اى جهة من نقطة التوازن E ينتج عنه تناقص في

مستوى المنفعة. وميل خط السعر الثابت (وهو $-p_1/p_2 = -\frac{1}{2}$) لابد وان

يساوى ميل منحنى السوا. ويتكون نسب الاشتراكات الجزئية لدالة المنفعة وميل

منحنيات السوا (في هذا المثال تساوى $-q_2/q_1$) وبالتالي تساوى

(في هذا المثال يساوى $\frac{q_2}{q_1}$) والذي يساوى النسبة بين

الاسعار كما هو المطلوب وبذلك يكون شرط الدرجة الثانية قد تحقق وان منحنيات السوا

معدبه وان RCS في تناقص عند نقطة الاتزان E :

$$-d^2q_2/dq_1^2 = -2q_2/q_1^3 < 0.$$

(١) ونقدم هنا بالمقاطع الزائده المستطيله التي خطوط اقترابها asymptotes.

تنطبق على محور الاحداثيات coordinate axes.

The Choice of a Utility Index

اختيار دليل المرفعة

ان الارقام التي تعينها دالة المنفعة للمجموعات المختلفة من السلع ليست في حاجة الى ان تاخذ طابع تقاييس لاهميتها ولكنها تخدم كدليل او مؤشر index لرغبات المستهلك . ولنفترض اننا نريد ان نقارن المنفعة التي يحصل عليها المستهلك من حصوله على سلع واثوبين ومن المنفعة من حصوله على سلعتين وخمسة اثواب ونفترض اننا نعرف ان المستهلك يفضل المجموعة الاخيرة على الاولى فالارقام التي نعطيها لهذه المجموعات لغرض التعرف على مدى فعالية رغبته في الحصول على السلع انما اختيرت اعتباطا arbitrary بفهم ان الفرق بينها خال من اي معنى او احساس .

فلو وضعنا الرقم ٣ للمجموعة الاولى والرقم ٤ للثانية لكان هذا دليلا كافيا على تفضيل المستهلك للمجموعة الثانية وهكذا لأي رقم مادام يوضح رغبة المستهلك في الحصول على المجموعة الثانية . فاذا كان هناك مجموع من الارقام تتناسب مع المجاميع المختلفة من السلع Q_1 و Q_2 وتكون كدليل للمنفعة فان اي تحويل متزايد لها يخدم ايضا كدليل للمنفعة (١) ونستطيع ان تحول دالة المنفعة الاصلية $U = f(q_1, q_2)$ الى دليل منفعة بتطبيق تحويله متزايد موجب على الدالة الاصلية $W = F(U) = F[f(q_1, q_2)]$

وهذا نحصل على دليل جديد للمنفعة وهو $W = F(U)$ بحيث ان دالة $F(U)$ تكون دالة متزايدة للمجهول (U) ومن الممكن اثبات ايجاد الحد الاعلى للدالة $W = F(U)$ مقيدة لميزانية المستهلك مطابقا تماما لايجاد الحد الاعلى للدالة U مقيدة ايضا بميزانيته المستهلك على النحو التالي : تخيل ان مجموعة السلع (q_1^0, q_2^0) هي المجموعة التي تحدد الحد الاعلى الوحيد للدالة $U = f(q_1, q_2)$ والعقيدة بميزانية المستهلك ونفترض ان هناك مجموعة اخرى من السلع $(q_1^{(1)}, q_2^{(1)})$ ايضا تحقق ميزانية المستهلك ، فاذا ، وبافتراض ان : $f(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}) > f(q_1^0, q_2^0)$ لاي رغبة من $(q_1^{(1)}, q_2^{(1)})$

ولكن من تعريف التزايد ، monotonicity

$$\text{نحصل على } W(q_1^0, q_2^0) = F[f(q_1^0, q_2^0)] > F[f(q_1^{(1)}, q_2^{(1)})] = W(q_1^{(1)}, q_2^{(1)})$$

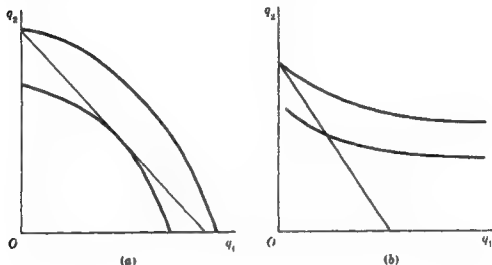
وهذا يثبت وجود حد اعلى لدالة المنفعة (q_1^0, q_2^0) $W(q_1^0, q_2^0)$

(١) الدالة $F(U)$ تكون تحويلة متزايدة موجب positive monotonic transformation

للمجهول U اذا كان $F(U_1) > F(U_2)$ متى ما كانت $U_1 > U_2$.
(٢) امثلة تعطي من خلال التحولات $W = aU + b$ بحيث ان a is positive وكذلك من خلال $W = U^2$ بحيث ان جميع ارقام المنفعة غير سالبة .

حالتين خاصتين :

ان شروط الدرجة الاولى (معادلة ١-٢) لا تكون ضرورية دائما للحصول على حدا اعلى للدالة، وشكل (١٤-٢) المجاور يصور حالتين استثنائيتين .



شكل ١٤-٢

الحالة الاولى : انظر الشكل (١٤-٢)

في الحالة تكون منحنيات السوا^١ مقعرة بدلا من ان تكون محدبة وهذا يعنى ان شرط شبه - مقعر الدالة لم يتحقق . ومن الشكل يتضح ان منحنيات السوا^١ تتحنى بعيدا عن نقطة الاصل وان RCS في ازدياد مطرد ولكن شرط الدرجة الاولى للحد الاعلى محقق عند نقطة التماس بين خط السعر ومنحنى السوا^١ ولكن شرط الدرجة الثانية لا يتحقق لان هذه النقطة تمثل حدا دنى للمنفعة في منطقة محلية local وان المستهلك يستطيع زيادة منفعته بالتحرك من نقطة التماس في اتجاه اى من المحورين ولا يستهلك الا سلعة واحدة فقط عند نقطة الحد الاعلى فاذا كان المستهلك ينفق كل دخله على هذه السلعة فقط فباستطاعة شراء y^0/p_1 وحدة من Q_1 او شراء y^0/p_2 وحدة من Q_2 . وعلى ذلك فانه اما ان يشتري Q_1 فقط او Q_2 اعتمادا على ان

$$f(y^0/p_1, 0) \geq f(0, y^0/p_2).$$

وفي المثال المعطى في شكل (١٤-٢) لا يحق للمستهلك ان يشتري الا Q_2 .

الحالة الثانية : انظر الشكل (١٤-٢ ب)

فى هذه الحالة تكون منحنيات السوا^١ على الشكل المطلوب ولكنها فى كل مكان اقل

انحداراً steep من خط السعر وطيه فانه لا يوجد اى احتمال للتماس بين خط السعر ومنحنيات السوا* وشرط الدرجة الاولى لا يتحقق بسبب التغيرات $q_1 \geq 0$ وكذلك $q_2 \geq 0$. وللمره الثانيه فان الحد الاعلى للمستهلك يعطى على اساس انه حل ركسى corner solution. ولا يمكنه شراء سوى السلعه Q_2 عند الحد الاعلى. ولكن اذا افترضنا ان دالة النفعه المعطاه فى الشكل (٢-٤ب) اما ان تكون مقعرة بانقباض strictly concave او ان لها تحويله متزايدة موجبه ، ففى هذه الحاله يمكن تطبيق شروط كون - تكرر Kuhn-Tucker وتصبح المسأله على النحو التالى:

ان المستهلك يرغب فى الحصول على الحد الاعلى للنفعه مقيدة بالانقباضات اللامتساويه inequality constraints. الاقيه :

$$y^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 \geq 0 \quad q_1 \geq 0 \quad q_2 \geq 0$$

ويمكن للمستهلك بعدم صرف دخله وان متطلبات الاستهلاك الغير سالبه nonnegative consumption وضحت هنا عاما واصبحت مريحه explicit وان دالة لقرنج هى نفسها المعطاة فى المعادله (٢-٨) وتصبح متطلبات شروط كون - تكرر^(١) كالتالى:

$$\begin{aligned} V_1 &= f_1 - \lambda p_1 \leq 0 & q_1 V_1 &= 0 \\ V_2 &= f_2 - \lambda p_2 \leq 0 & q_2 V_2 &= 0 \\ V_3 &= y^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 \geq 0 & \lambda V_3 &= 0 \end{aligned}$$

بحيث ان V_1 تمثل المشتقات الجزئيه للمعادله (٢-٨) فاذا كان $f_1 > \lambda p_1$ فانه باستطاعه المستهلك زياده منفعة بزياده q_1 واذا كان $f_1 < \lambda p_1$ فانه يستطيع زياده منفعة بتخفيض q_1 الا اذا $q_1 = 0$ ففى مثال الشكل (٢-٤ب) :

$$V_1 < 0 \quad \text{وكذلك} \quad V_2 = 0. \quad \text{فاذا} \quad f_1/f_2 < p_1/p_2$$

ان اخر معادلتين من معادلات شروط كون - تكرر تنص على ان (وهى المنفعه الحديه لدخل الفرد marginal utility of income تساوى صفرا اذا افترضنا على المستهلك ان يصرف اقل من دخله عند التوازن equilibrium ، ولكن هذا لا يحدث ما دنا نفترض ان المنفعه الحديه تكون دائما موجبه .

(١) شروط كون - تكرر هى شروط كفاية وضرورية necessary and sufficient للدول المقعرة المعطاة اذا تحققت شروط القيود ، وشروط القيود هذه يفترض ان يكن محققه لجميع الامثله فى هذا الكتاب .

DEMAND FUNCTIONS

٢ - ٣ دوال الطلب

Ordinary Demand Functions

معادلات الطلب العادية :

إن دالة الطلب العادية للمستهلك توضح العلاقة بين كمية السلع التي يرغب المستهلك في شراؤها وأسعار هذه السلع ودخل المستهلك. وسنبحث هنا العلاقة دالة الطلب العادية ولكنها عادة تسمى دالة الطلب فقط (وفي بعض الأحيان تسمى دالة طلب مارشال نسبة للعالم الاقتصادي مارشال) إلا إذا كان هناك ضرورة لتسميتها بغير هذا التسمية .

ومن الممكن الحصول على هذه الدالة من عملية التحليل لاجهاد الحد الاقصى للمنفعة . نفرض الدرجة الاولى (معادلة ١-٢) تتكون من ثلاثة معادلات في ثلاثة مجهول هي q_1 و q_2 مع افتراض تحقق شروط الدرجة الثانية ونستطيع الحصول على دوال الطلب بحل هذا النظام من المعادلات (معادلة ١-٢) لاجاد مجهول هذه المعادلات بدلالة q_1, q_2 in terms of وكمية السلعة المشتراة p_1, p_2 تعتمد اعتمادا مباشرا على اسعار عامة السلع وعلى دخل المستهلك .

مثال : افترض ان دالة المنفعة هي $U = q_1 q_2$ وان قيد الميزانية هو $y^0 = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 0$ ويتكون معادلة لاقرانج $V = q_1 q_2 + \lambda (y^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2)$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = q_1 - p_2 \lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = y^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$$

وبحل المعادلات الجزئية لنتم (q_1, q_2) نحصل على دوال الطلب التالية

$$q_1 = \frac{y^0}{2p_1} \quad q_2 = \frac{y^0}{2p_2}$$

وهذه الدوال تعتمد على ان يكون المستهلك باستمرار رافيا في الحصول على الحد الاقصى للمنفعة من السلع التي يستهلكها . فاذا اعطينا دخل المستهلك واسعار السلع فاننا نستطيع الحصول على الكميات المطلوبة من المستهلك عن طريق دوال الطلب والطبع فان هذه الكميات من نفسها الكميات التي تحملنا عليها من دوال المنفعة وتعويض $y^0 = 100, p_1 = 2, p_2 = 5$ في دوال الطلب نحصل على $q_1 = 25$ و $q_2 = 10$.
نأما كما وجدناها في الفصل (٢-٢) .

ونستطيع الاستدلال على خاصيتين من خواص دوال الطلب المهمة :

(١) طلب أى سلعة من السلع هو دالة ذات قيمة منفردة single-valued function

بدلالة الاسعار والدخل •

(٢) دوال الطلب تكون متجانسة homogeneous من درجة صفر في الاسعار والدخل وهو يعنى اننا اذا تغيرت جميع الاسعار والدخل بنفس النسبة فان الكميات المطلوبة تظل كما هي بدون تغيير •

والخاصية الاولى لهذه الدوال تنبع من خاصية شبه - المتقعر المنضبط لدالة المنفعة حيث ان هناك حد اعلى واحد فقط مطابقا لخليط معين من السلع باسعار ودخل معلوم (١) .

ولاثبات الخاصية الثانية لدوال الطلب ، نفترض ان جميع الاسعار والدخل تغيرت بنفس النسبة واصبح قيد ميزانية المستهلك كالتالى :

$$ky^0 - kp_1q_1 - kp_2q_2 = 0$$

• بحيث ان k هو عامل التناسب factor of proportionality
وبحيث تصبح المعادلة (٢-١) كالتالى :

$$k(y^0 - p_1q_1 - p_2q_2) = 0$$

وتصبح شروط الدرجة الاولى كالتالى :

$$f_1 - \lambda kp_1 = 0$$

(٢-١٥)

$$f_2 - \lambda kp_2 = 0$$

$$ky^0 - kp_1q_1 - kp_2q_2 = 0$$

والمعادلة الاخيره فى مجموعة المعادلات (٢-١٥) هى الاشتقاق الجزئى لدالة لقرانج (٧) بالنسبة الى ضروب (منافع) لقرانج Lagrange multiplier .
ويسن كتابتها على النحو الاتي :

$$k(y^0 - p_1q_1 - p_2q_2) = 0$$

وبما ان $k \neq 0$ ، فان المعادلة السابقة تصبح

$$y^0 - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$$

وبهدف k من المعادلتين الاوليتين من (٢-١٥) بتدريك الحدود الثانية الى الطرف الايمن من المعادلتين وقسمه المعادلة الاولى بالثانية نحصل على : $\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2}$

(١) اذا كانت دالة المنفعة فقط شبه - مقعرة بدون انضباط فان جزأ من منحنيات السواك يكون على شكل خط مستقيم وان الحد الاعلى للمنفعة لا يكون وحيدا وان هناك اكثر من كمية واحدة توافق الاسعار المعطاه وفى هذه الحالة لا يكون لدينا علاقة طلب ونسجها طلب تطابقى أو معاقل (demand correspondence)

وهذه المعادلتين الأخيرتين هما نفسهما المعادلة (٢-٧) والمعادلة (٢-١٠) وطى هذا فإن دالة الطلب لمجموعة السعر والدخل يمكن اشتقاقها من نفس المعادلات كما فى حالة مجموعة السعر والدخل (p_1, p_2, y^0) ومن السهل التحقق من اثبات شروط الدرجة الثانية لمجموعة السعر والدخل. (kp_1, kp_2, ky^0) وهذا يثبت أن دوال الطلب متجانسة من درجة صفر فى الأسعار والدخل فإذا تغيرت جميع الأسعار ودخل المستهلك بنفس السرعة فإن الكميات المطلوبة من المستهلك لا تتغير، وهذا يعطينا بعض المؤشرات التى يمكن قياسها عددياً، عن سلوك المستهلك فهو سوف لا يتصرف كما لو كان أغنى (أو أفقر) فى حدود دخله الحقيقى (real income) وإذا كان الدخل والأسعار كلها ارتفعت بنفس النسبة وبما يرفعه المستهلك هو زيادة فى دخله النقدى (money income) بافتراض أن جميع المتغيرات الأخرى ثابتة (ceteris paribus) ولكن فوائدها وحمية إذا تغيرت الأسعار بنفس النسبة، فإذا كان مثل هذه التغيرات النسبية لم تغير فى سلوك المستهلك وتركت تصرفاته كما هى فإنه فى هذه الحالة لا يوجد عنده "وهم نقدي" "money illusion".

Compensated Demand Functions

دوال الطلب التعويضية

تخيل حالة ما تقوم فيها الدولة باقتطاع جزء من دخل المستهلك من طريق فرض ضرائب أو زيادة دخله من طريق صرف معونات له بطريقة بحيث لا يتغير مستوى المنفعة بعد هذا التغير فى الأسعار، وتخيل أن هذا تم عن طريق دفع مبلغ معين دفعة واحدة بحيث أنها تعطى المستهلك دخلاً كافياً فقط لتحقيق المستوى المنفعى البدائى، ودوال الطلب التعويضية للمستهلك تعطى كميات السلع التى سوف يقوم المستهلك بشراؤها بدلالة أسعار السلع تحت هذه الشروط ويمكن الحصول على هذه الدوال وبإيجاد الحد الأدنى (minimum) لمصروفات المستهلك تحت قيد الشرط بأن منفعته تكون عند المستوى المحدد (U^0)

مثال : ولنفترض الآن، أن دالة المنفعة هى $U = q_1 q_2$. وتكون المعادلة

$$Z = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \mu (U^0 - q_1 q_2)$$

ونضع مشتقاتها الجزئية تساوى صفراً لنحصل على :

$$\frac{\partial Z}{\partial q_1} = p_1 - \mu q_2 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial q_2} = p_2 - \mu q_1 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \mu} = U^0 - q_1 q_2 = 0$$

وبإيجاد q_1 و q_2 نحصل على دوال الطلب التمييزية التالية :

$$q_1 = \sqrt{\frac{U^0 p_2}{p_1}} \quad q_2 = \sqrt{\frac{U^0 p_1}{p_2}}$$

ويمكن للقارئ إثبات أن هذه الدوال متجانسة من درجة صفر في الأسعار .

منحنيات الطلب : Demand Curves

فانه اذا جرت العادة على أن نكتب دالة الطلب العادية للمستهلك للسلع كالتالي :

$$q_1 = \phi(p_1, p_2, y^0)$$

أو بافتراض أن p_2 ، y^0 متغيرات معطاه ، فان الدالة تصبح كالتالي :

$$q_1 = D(p_1)$$

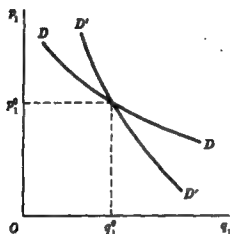
وثالبا مايفترض أن دالة الطلب لها خاصية المقلوب أو المعكوس an inverse أنه يمكن وضع السعر بدلالة الكمية بطريقة فريدة (unique) وهذا المقلوب (أو المعكوس) لدالة الطلب (وهو $p_1 = D^{-1}(q_1)$) هو نفسه دالة بحيثىث أن

$$p_1 = D[D^{-1}(q_1)] = q_1$$

ويعتمد شكل دالة الطلب على خواص دالة المنفعة للمستهلك وقد جرت العادة على افتراض أن منحنيات الطلب يكون لها ميل سالب ، بمعنى أنه كلما قل السعر ، كلما ازدادت الكمية المطلوبة ولا يتغير هذا الافتراض الا في حالات غير اعتيادية ومثال ذلك حالة التباهى أو الفاخر بالاحتهلاك (أو مايسمى باستهلاك الفاخر أو المفاهسة) (ostentatious consumption) وهذا يعنى أنه اذا كان المستهلك يتحصل على منفعة من أسعار عالية فان ميل دالة الطلب قد يكون موجبا وطبيعة تغيرات الأسعار المؤدية الى تغيرات في الكميات المطلوبة مشروحة شرحا وافيا في الجزء (٥٢) من هذا الباب ولكن في بقية الكتاب فافتراضنا نفترض دائما أن دوال الطلب لها ميل سالب .

ومنحنى الطلب التمييزي للمستهلك للسلعة Q_1 يمكن الحصول عليه بنفس الأسلوب السابق بافتراض أن p_2 و U^0 مجهولين معطيين . وفي الجزء (٥٢) ننبأ أن كون منحنيات المساواة معد به يضمن لنا أن منحنيات الطلب التمييزية دائما تكون مائلة الى أسفل (downward sloping) .

شكل (٥٢) يعدلنا بعض الأشكال المحتملة لمنحنيات الطلب التمييزية والعادية فنحنى الطلب العادي نرمز له بالرمز (DD) ومنحنى الطلب التمييزي بالرمز (D'D') ونفهم



(شكل ٢٠)

المجاهيل عند نقطة تقاطعها (q_1^0, p_1^0)
تحقق الدالتين معا وأن مستوى المنفعة
المتحقق لمنحنى الطلب العادي يساوى
المستوى المطلوب لمنحنى الطلب التعويضى
وأن الدخل الأدنى من أجل منحنى الطلب
العادي • وعند أسعار أعلى من p_1^0
التعويضى يساوى الدخل المحدد من أجل
منحنى الطلب

يكون الدخل التعويضى للمستهلك موجبا وأن منحنى الطلب التعويضى يعطى كميات أكبر
عند كل سعر، ولكن عند أسعار أقل من p_1^0 فإن الدخل التعويضى يكون سالبا
والمنحنى المقابل له سوف يعطى كميات أقل عند كل سعر •

مرونة الدخل والسعر للطلب : Price and Income Elasticities of Demand

تعرف المرونة الخاصة للطلب للسلعة $Q_1(\epsilon_{11})$ own elasticity of demand
على المعدل النسبى للتغير الذى يطرأ على قسوما على المعدل النسبى للتغير الذى
يطرأ على سعر السلعة الخاص بحيث يكون p_2, y^0 ثابتين ونرمز للمرونة الخاصة
بالرمز ϵ_{11} :

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial(\ln q_1)}{\partial(\ln p_1)} = \frac{p_1}{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial p_1} \quad (1 - 2)$$

فإذا وجدنا قيمة عددية كبيرة للمرونة فإن هذا يعنى أن الكمية المطلوبة تكون
متجاوبة نسبيا للتغيرات فى السعر، والسلع التى تكون قيمة مرونتها العددية عالية
($\epsilon_{11} < -1$) تسمى بالسلع الكالية بينما السلع الأخرى التى تكون قيمة مرونتها
العددية صغير ($\epsilon_{11} > -1$) تسمى بالسلع الضرورية أما مرونة السعر بالنسبة
للطلب فإنها أرقام خالصة مستقلة تماما عن الوحدات التى تقيم بها الأسعار والمنتجات
وتكون المرونة (ϵ_{11}) سالبة إذا كان ميل منحنى الطلب المقابل لها إلى أسفل •
وطاقة منصرفات المستهلك بالمرونة يمكن توضيحها بالطريقة الآتية :

لتفرض أن منصرفات المستهلك للسلع Q_1 هى ($p_1 q_1$) فلو أردنا أن نعرف ما هو

معدل التغير الذى سوف يطرأ عليه بالنسبة لسعر هذه السلع فالتنا تأخذ الاشتقاق الجزئى للمصرف بالنسبة للسعر كما يلى :

$$\frac{\partial(p_1 q_1)}{\partial p_1} = q_1 + p_1 \frac{\partial q_1}{\partial p_1} = q_1 \left(1 + \frac{p_1}{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial p_1} \right) = q_1 (1 + \varepsilon_{11})$$

ف نجد أن مصروفات المستهلك على السلع Q_1 سوف تزداد مع p_1 عندما تكون المرونة أكبر من ناقص واحد ($\varepsilon_{11} > -1$) وتظل غير متغيرة (أى ثابتة) إذا كانت المرونة تساوى ناقص واحد ($\varepsilon_{11} = -1$) وتكون المصروفات أقل إذا كانت المرونة أقل من ناقص واحد ($\varepsilon_{11} < -1$) .

وتوضع لنا مرونة السعر المختلطة للطلب (A cross-price elasticity of demand) لدالة الطلب العادية التغير النسبى فى احدى كميات السلع الى التغير النسبى فى سعر الكميات الاخرى ، فعلى سبيل المثال :

$$\varepsilon_{21} = \frac{\partial(\ln q_2)}{\partial(\ln p_1)} = \frac{p_1}{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial p_1} \quad (١٧-٢)$$

وقد تكون هذه المرونة موجبه وقد تكون سالبة .

فاذا أخذنا التفاضل الكلى (total differential) لقيد الميزانية (١٧-٢) افترضنا أن $dy^0 = dp_2 = 0$ فاننا نحصل على الاتى :

$$p_1 dq_1 + q_1 dp_1 + p_2 dq_2 = 0$$

وبالضرب فى $p_1 q_1 q_2 / y^0 q_1 q_2 dp_1$ وتغيير فى بعض الحدود نحصل على

$$\alpha_1 \varepsilon_{11} + \alpha_2 \varepsilon_{21} = -\alpha_1 \quad (١٨-٢)$$

حيث أن $\alpha_1 = p_1 q_1 / y^0$ و $\alpha_2 = p_2 q_2 / y^0$ وهما فى الواقع يمثلان نسب مجموعات المصروفات للسلعتين Q_1 ، Q_2 وتسمى هذه المعادلة (١٨-٢) بشرط كونوت الاجامالى (Counnot aggregation condition) فاذا أعطينا (أو وصلنا الى معرفة) مرونة السعر الخاصة لطلب السلعة Q_1 فاننا نستطيع تعيين مرونة السلع الخليط لطلب السلعة Q_2 من طريق استخدام المعادلة (١٨-٢) فاذا كان $\varepsilon_{11} = -1$ فان $\varepsilon_{21} = 0$ ، وانما كان $\varepsilon_{11} < -1$ فان $\varepsilon_{21} > 0$ وأخيرا اذا كان

$$\varepsilon_{11} > -1 \quad \text{فلن} \quad \varepsilon_{21} < 0 .$$

وبالمثل يمكن تعريف المرونة الخاصة والخليطة للأسعار فى حالة الطلب لـدوال طلب التعميضية بالتعويض من دوال الطلب العادية بدوال الطلب التعميضية نفس المعادلتين (١٥-٢) و (١٧-٢) ولكن معادلة (١٨-٢) لا تتحقق فى حالة دوال

الطلب التعويضية ، فبأخذ التفاضل الكامل لدالة المنفعة فى المعادلة (١-٢) ووضع $dU = 0$ نحصل على :

$$f_1 dq_1 + f_2 dq_2 = 0$$

وباستخدام الدرجة الأولى $p_1/p_2 = f_1/f_2$ وبالضرب فى $p_1 q_1 q_2 / y^0 q_1 q_2 dp_1$ وتغيير بعض الحدود نحصل على :

$$(١٩-٢) \quad \alpha_1 \epsilon_{11} + \alpha_2 \epsilon_{21} = 0$$

حيث أن مرونة السعر التعويضية (compensated price elasticities) رمز لها بالرموز ϵ_{11} و ϵ_{21} . وبما أن $\epsilon_{11} < 0$ فإنه من (١٩-٢) يتضح أن $\epsilon_{21} > 0$

مثال : وبالمودة الى المثال $U = q_1 q_2$ فان المرونة الخاصة والخليطة للأسعار لدالة الطلب العادية هى :

$$\epsilon_{11} = -\frac{p_1}{q_1} \frac{y^0}{2p_1} = -\frac{p_1}{y^0/2p_1} \frac{y^0}{2p_1} = -1$$

$$\epsilon_{21} = \frac{p_1}{q_2} = 0$$

وهذه حالة خاصة لان ليس جميع دوال الطلب تكون مرونتها الخاصة أو الخليطة تساوى الوحدة أو صفر ولا حتى مرونتها تكون ثابتة وعلى وجه العموم فان المرونة تكون عادة بدلالة p_1, p_2, y^0 وكذلك (a function of p_1, p_2, y^0) . ويستطيع القارئ أن يثبت لنفسه أن المرونة التعويضية فى هذا المثال هى $\epsilon_{11} = -1$ وأن $\epsilon_{21} = 0$.

ونعرف الآن مرونة الدخل (income elasticity) للطلب والخاصة بدالة الطلب العادية على أنها التغير النسبى الذى يطرأ على مشتريات السلع بالنسبة الى التغير النسبى فى الدخل بأخذ الأسعار ثابتة .

$$(٢٠-٢) \quad \eta_1 = \frac{\partial(\ln q_1)}{\partial(\ln y)} = \frac{y}{q_1} \frac{\partial \phi(p_1, p_2, y)}{\partial y}$$

بحيث أن η_1 ترمز الى مرونة الدخل لطلب السلعة q_1 . وقد تكون هذه المرونة سالبة ، أو موجبة أو صفراً ولكنها عادة يفترض أن تكون موجبة .

وبأخذ التفاضل الكامل لقيد الميزانية (٢-٢) نحصل على

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 = dy$$

وبالضرب في y/q_1 وضرب الحد الأول على الشطال بالكمية q_1/q_1 والحد الثاني على الشطال بالكمية q_2/q_2 والقسم على dy نحصل على

$$(21-2) \quad \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 = 1$$

وتسمى بشرط انجيل الاجمالى (Engel aggregation condition) • وتنص على أن الدخل موازنة بنسب المنصرفات الكلية تساوى الوحدة ولا يمكن اشتقاق مروقات الدخل لدوال الطلب التعويضية لأن الدخل ليس متصرا من عناصر هذه الدوال •

٢ - ٤ الدخل وأوقات الفراغ من العمل INCOME AND LEISURE

إذا كان دخل المستهلك عبارة من قيمة العمل الذى قام به ، فان أكبر كمية من العمل الذى يمكنه القيام به يمكن اشتقاقها من عطيات ايجاد الحد الأعلى للمنفعة وكذلك يمكن اشتقاق منحنى الطلب للمستهلك من هذه العطيات أيضا ولنفترض أن منفعة المستهلك تعتمد على دخله وعلى وقت الفراغ من العمل فتصبح دالة المنفعة :

$$(22-2) \quad U = g(L, y)$$

بحيث أن L ترمز الى وقت الفراغ من العمل ومن البديهي ، طبعاً أن الدخل ووقت الفراغ مرغوب فيهما من المستهلك • ففي اجزا" هذا الباب السابقة افترضنا أن المستهلك يتحصل على المنفعة من السلع الاستهلاكية التى يشتريها من دخله ولكن تركيب المعادلة (22-2) يفترض أن المستهلك يقوم بشراء السلع المختلطة بأسعار ثابتة وان دخله سوف يعامل على انه يمثل قوة الشراء على وجه العموم (للتفصيل نرى هذا الموضوع راجع الجزء السادس من الباب الثالث (3-6))

وللحصول على معدل تعويضى الدخل بوقت الفراغ من العمل ، نفاضل y بالنسبة لـ L :

$$-\frac{dy}{dL} = \frac{g_1}{g_2}$$

فاذا رمزنا لكمية العمل التى يقوم بها المستهلك بالرمز w ومعدل الاجر wage rate بالرمز r فانه حسب التعريف :

$$(23-2) \quad L = T - w$$

حيث ان T تمثل الوقت المتوفر للمستهلك (وعلى سبيل المثال ، اذا كانت الفترة المعرف من اجلها دالة المنفعة هى يوم واحد فان ساعة $T = 24$

وفيد الميزانية هو :

$$y = rW \quad (٢٤-٢)$$

ويعتبر (٢٣-٢) و (٢٤-٢) في (٢٢-٢) نحصل على :

$$U = g(T - W, rW) \quad (٢٥-٢)$$

وللحصول على الحد الأعلى للمنفعة، نضع اشتقاق (٢٥-٢) بالنسبة للعمـل

يساوى صفر (ونستخدم هنا قاعدة اشتقاق الدوال المركبة composite-function

$$\frac{dU}{dW} = -g_1 + g_2 r = 0$$

وعليه فان :

$$-\frac{dy}{dL} = \frac{g_1}{g_2} = r \quad (٢٦-٢)$$

والتي تنص على ان معدل تعويض الدخل بوقت الفراغ من العمل يساوى معدل الاجر وشرط الدرجة الثانية ينص على :

$$\frac{d^2 U}{dW^2} = g_{11} - 2g_{12}r + g_{22}r^2 < 0$$

وينصح من المعادلة (٢٦-٢) انها علاقة فيما يخص بالعمل W ومعدل الاجر r وانها وضعت حسب قاعدة سلوك المستهلك الفردي في ايجاد الحد الاقصى للمنفعة، وعليه فان هذه المعادلة (٢٦-٢) تمثل منحنى العرض للمستهلك supply curve وتنص على مقدار ما يبذله من عمل مقابل معدل اجورات مختلفة وبما ان العرض للعمل يكتفى "او يعادل الطلب للدخل"، فان (٢٦-٢) تعطينا، بطريق غير مباشر، منحنى الطلب بالنسبة لدخل المستهلك.

مثال : افترض ان دالة المنفعة معرفته للفترة الزمنية ومقدارها يوم واحد ومعطاه بالدالة

$$U = 48L + Lr - L^2$$

ويعتبر $L = T - W$ في المعادلتين السابقتين نحصل على

$$U = 48(T - W) + (T - W)Wr - (T - W)^2$$

وبوضع الاشتقاق يساوى صفر نحصل على

$$\frac{dU}{dW} = -48 - Wr + r(T - W) + 2(T - W) = 0$$

وعليه فان

$$W = \frac{T(r+2) - 48}{2(r+1)}$$

ويمكننا الحصول على y بالتعويض في المعادلة (٢٤-٢) وشروط الدرجة الثانية

يتحقق لان

$$\frac{d^2 U}{dW^2} = -2(r+1) < 0$$

لاى اجر موجب *

وفي الحالة المراهنة ، نجد ان دالة العرض للفرد supply function

تتميز بما يلي :

(١) عندما يصبح اجر الشخص مساويا صفرا فان الفرد سوف لا يقوم بالعمل ففى خلال

الفترة الزمنية المحددة وهى ساعة $T = 24$

(٢) سوف يقوم الفرد بزيادة عدد الساعات التى يعمل خلالها بزيادة الاجر لان

$$dW/dr = 0$$

(٣) سوف لا يحمل الفرد اكثر من ١٢ ساعة فى اليوم الواحد ، بغض النظر عما يصبح

عليه الاجر من قيمة عالية ، لان نهاية W عندما \rightarrow تقترب من ٥٥ هـى ١٢

$$\lim_{W \rightarrow 55} W = 12. \quad \text{بمعنى ان}$$

٢ - ٥ نتائج الدخل والتعويض SUBSTITUTION AND INCOME EFFECTS

The Slutsky Equation

معادلة سلزكى :

ان تحاليل المقارنة الثانية والساكنه (افتراض عدم التطور فيها)

Comparative statics analysis

تختبر نتائج تلقى المتغيرات المعطاه من خارج النظام exogenous variables

(مثل الاسعار والدخل فى الحالة المراهنة) على قيم الحل للمتغيرات المعطاه من

داخل النظام endogenous variables (وبالتحديد ، الكميات) *

فالتغيرات فى الاسعار والدخل . سوف تقوم فى العادة ، بتعديل نمط منصرفات المستهلك

وبالرغم من هذا فان الكميات الجديدة (وكذلك الاسعار والدخل) سوف تحقق شروط

الدرجة الاولى فى المعادلة (٢٤-١) ومن اجل الحصول على مقدار تأثير تغيرات السعر

والدخل على مشتروات المستهلك ، فاننا نترك جميع المتغيرات تتغير فى نفس الوقت ،

بأخذ الضاغل الكامل للمعادلة (٢-٩) :

$$\begin{aligned} f_{11} dq_1 + f_{12} dq_2 - p_1 d\lambda &= \lambda dp_1 \\ (٢٧-٢) \quad f_{21} dq_1 + f_{22} dq_2 - p_2 d\lambda &= \lambda dp_2 \\ -p_1 dq_1 - p_2 dq_2 &= -dy + q_1 dp_1 + q_2 dp_2 \end{aligned}$$

ومن أجل الحصول على المتغيرات الثلاثة dq_1 ، dq_2 ، $d\lambda$ من نظام الثلاث معادلات السابقة فإنه يجب أن نعامل حدود الطرف الايمن كنوابت • وصف المعاملات الذى كونته معادلات (٢٧-٢) هو نفسه فى محددة هيسيان المحددة bordered Hessian determinant فى المعادلة (٢٢-٢) وبالرمز لهذه المحددة بالحرف \mathcal{D} وللعامل العرافى cofactor (للعنصر فى الصف الاول من العمود الاول بالحرف \mathcal{D}_{11} وللعامل العرافى للعنصر فى الصف الاول من العمود الثانى بالحرف \mathcal{D}_{12} وهكذا فان حل المعادلة (٢٧-٢) باستخدام قاعدة كرامر Cramer's rule (راجع الجزء A-1 من الفهرس فى اخر الكتاب) يكون على النحو التالى :

$$(٢٨-٢) \quad dq_1 = \frac{\lambda \mathcal{D}_{11} dp_1 + \lambda \mathcal{D}_{21} dp_2 + \mathcal{D}_{11} (-dy + q_1 dp_1 + q_2 dp_2)}{\mathcal{D}}$$

$$(٢٩-٢) \quad dq_2 = \frac{\lambda \mathcal{D}_{12} dp_1 + \lambda \mathcal{D}_{22} dp_2 + \mathcal{D}_{21} (-dy + q_1 dp_1 + q_2 dp_2)}{\mathcal{D}}$$

ونفسه طرئى معادلة (٢٨-٢) بالكليه dp_1 وافترض ان p_2 ، y لا يتغيران ، فاننا نحصل على :

$$(٣٠-٢) \quad \frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{\mathcal{D}_{11} \lambda}{\mathcal{D}} + q_1 \frac{\mathcal{D}_{11}}{\mathcal{D}}$$

والاشتقاق الجزئى على الطرف الايسر من المعادلة (٣٠-٢) يعطينا معدل التغير لمشتروات المستهلك من Q_1 بالنسبة للتغيرات فى p_1 بافتراض ان جميع الاشياء الاخرى متساوية ، ويصبح كذلك معدل التغير بالنسبة للدخل على النحو التالى :

$$(٣١-٢) \quad \frac{\partial q_1}{\partial y} = -\frac{\mathcal{D}_{11}}{\mathcal{D}}$$

والتغيرات فى اسعار السلع تغير من مستوى المنفعة للمستهلك حيث انه جد توازن جديد يضع المستهلك على منحنى استواء اخر •

اعتبر الان ، تغير فى السعر عوض منه المستهلك بتغير فى دخله بحيث يتحركه على

منحنى السوا* الذى كان عليه قبل التغيير وهذا يعنى ان اى تغيير فى سعر اى سلعة سوف يصاحبه زيادة فى دخل المستهلك بحيث ان $d'J = 0$ وكذلك $f_1 dq_1 + f_2 dq_2 = 0$ من المعادلة (٢-٢) وما ان $f_1/f_2 = p_1/p_2$ فان $f_1 dq_1 + p_2 dq_2 = 0$ حقيقة كذلك وعليه، فان من المعادلة الاخيرة فى (٢-٢) ، نحصل على $-dy + q_1 dp_1 + q_2 dp_2 = 0$ وكذلك

$$(٢٢-٢) \quad \left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1} \right)_{L=const} = \frac{\partial_{11}A}{\partial}$$

ونستطيع، الان ، اعادة كتابة معادلة (٢-٢) على النحو التالى :

$$(٢٣-٢) \quad \frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1} \right)_{U=const} - q_1 \left(\frac{\partial q_1}{\partial y} \right)_{U=const}$$

وهذه المعادلة (٢٢-٢) تعرف بمعادلة سلزكى . فالكيفية $\partial q_1 / \partial p_1$ تمثل ميل منحنى الطلب العادى للسلع Q_1 ويمثل الحد الاول من الجانب الايمن ميل منحنى الطلب التعويضى للسلع Q_1 .

وكبدل لعملية تعويض المستهلك عن ارتفاع اسعار بعض السلع ، فان المستهلك

يعطى دخلا كافيا لشراء الخليط من السلع بحيث ان

$$dy = q_1 dp_1 + q_2 dp_2$$

وهذه هي المعادلة التى قادتنا الى المعادلة (٢٢-٢) وفى هذه الحالة فان :

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1} \right)_{q_1, q_2=const} = \frac{\partial_{11}A}{\partial}$$

والذى يمكن تعويضها بدلا من الحد الاول على الجانب الايمن فى (٢٢-٢) وقد يبنادر الى الذهن من اول وهله ، ان الطريقتين المختلفتين لتعويض المستهلك نتيجة لارتفاع الاسعار ادا الى نفس النتائج ولكنهما يعرفان فقط نفس الاشتاق ومن الممكن ان يتسود الى نتائج مختلفة تماما لاي حركة فى نطاق زمنى محدود ومن الممكن حدث المستهلك على نفس منحنى السوا* فى الحالة المحددة ولكنه ليس من الممكن حثه على شراء نفس الخليط من السلع اذا تغيرت الاسعار النسبيه وكل التحاليل التالية هنا مترتبة على المعادلة (٢٣-٢) .

ومن الممكن وضع معادلة سلزكى بدلالة مرونة الدخل والسعر الموضحة فى الجزء ٢-٢ من هذا الباب . فبضرب المعادلة (٢٣-٢) بالكيفية p_1/q_1 وبضرب

الحد الاخير من الطرف الايمن بالكيفية y/y نحصل على :

$$(٢٤-٢) \quad \varepsilon_{11} = \xi_{11} - \alpha_1 \eta_1$$

وهذه المعادلة تنص على ان مرونة السعر لمنحنى الطلب العادى تساوى مرونة السعر لمنحنى الطلب التعويضى ناقصا مرونة الدخل العائليه ضروب فى نسبة مجموع المنصروفات التى دفعت لشراء Q_1 وعلى هذا فان منحنى الطلب العادى سوف يكون له مرونة طلب اكبر من منحنى الطلب التعويضى ، بمعنى ان ε_{11} سوف يكون اكثر سالبية عن ξ_{11} اذا كانت مرونة الدخل للطلب موجبه .

نتائج مباشرة : Direct Effects

بالنظر فى المعادلة (٢٢-٢) نجد ان الحد الاول من الجانب الايمن للمعادله يوضح المعدل الذى يستطيع المستهلك من خلاله تعويض Q_1 بسلم اخرى عندما يتغير سمر Q_1 ويستطيع ان يتحرك على منحنى السوا المعطاء وتسمى هذه الظاهرة بنتيجة لتعويض substitution effect^(١) اما الحد الثانى من الجانب الايمن للمعادلة فانه يوضح المعدل الذى يتغير عدده مشتروات المستهلك من Q_1 عندما تحدث تغيرات فى دخله مع بقاء الاسعار ثابتة ، وتسمى هذا بنتيجة الدخل income effect ومجموع المعدلين يعطى المعدل العام للتغيرات فى Q_1 مع تغيرات p_1 وفى الوضع الراهن نجد ان ضروب لاقرانج يمثل اشتقاق المنفعة بالنسبة للدخل مع بقاء الاسعار ثابتة والكميات متغيره . ومن دالة المنفعة (١-٢)

نجد ان $\partial U / \partial y = f_1(\partial q_1 / \partial y) + f_2(\partial q_2 / \partial y)$ وتعويض $f_1 = \lambda p_1$ وكذلك $f_2 = \lambda p_2$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \lambda \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} \right) = \lambda \quad \text{نجد ان :}$$

وهذا بسبب ان : $y:1 = p_1(\partial q_1 / \partial y) + p_2(\partial q_2 / \partial y)$ عن الاشتقاق الجزئى لقيد الميزانية (٧-٢) بالنسبة للتغير وهذا يؤكد النتيجة التى توصلنا اليها من المعادلة (١١-٢) نفس وقت مبكر من هذا الباب .

وبحل المعادلة (٢٧-٢) للقيمة $d\lambda$ نحصل على

$$(٢٥-٢) \quad d\lambda = \frac{\lambda \partial_{12} dp_1 + \lambda \partial_{22} dp_2 + \partial_{1y}(-dy) + q_1 dp_1 + q_2 dp_2}{\partial}$$

(١) ولتست سهاها العالم سلتزكى تغيرات المتبقى residual variability للسلمة التى عليها الطلب .

فإذا افترضنا الآن أن الدخل المتغير الوحيد ، بمعنى أن $dp_1 = dp_2 = 0$ فان المعادلة (٣٥-٢) تصبح

$$(٣٦-٢) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = -\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} = -\frac{f_{11}/f_{22} - f_{12}^2}{\Delta}$$

وبما أن Δ موجب فان معدل التغير في المنفعة الحدية للدخل (marginal utility of income) سوف يكون له نفس علامة المقدار $-(f_{11}/f_{22} - f_{12}^2)$. وهذه سوف تكون سالبة اذا كانت دالة المنفعة مقعرة بانضباط ولكن للدوال المنفعة الترتيبية أفترض شبه - المتغير المضبوط وطيه فان النظرية لا يمكن أن تنتج اذا كانت المنفعة الحدية للدخل في ازدياد أو في انخفاض مع التغيرات التي تطرأ على الدخل .

ولإثبات أن اشارة نتيجة التعويض substitution effect تكون دائما سالبة وأن منحني الطلب التعويضي يكون دائما مائلا الى أسفل ، نستخدم المعادلة (٣٢-٢) لإيجاد نتيجة التعويض وهي $\partial_{11}\lambda/\partial p_1$ بحيث أن محددة Δ تكون موجبة لانها هي نفسها في المعادلة (١٢-٢) وبتحليل ∂_{11} نجد أن $\partial_{11} = -p_1$ والتي توضح تماما أنها سالبة .

ان التغير في الدخل الحقيقي real income قد يسبب في إعادة توزيع موارد المستهلك حتى ولو أن الأسعار لم تتغير أو أنها تغيرت بنفس النسبة . فنتيجة الدخل (وهي تساوي $-q_1(\partial q_1/\partial y)_{prices=const}$) قد تكون موجبة أو سالبة فالنتيجة النهائية للتغير في السعر على شراء السلع تكون غير معروفة ومع هذا فاننا نستطيع أن نستخلص النتيجة الآتية :

كلما صغرت الكمية المطلوبة من السلع Q_1 كلما قلت أهمية نتيجة الدخل . وتسمى السلعة Q_1 سلعة أدنى inferior good اذا كانت مشتريات المستهلك منها تنخفض كلما ارفع دخل المستهلك ويرفع استهلاكها كلما انخفض دخله بينما تصرف سلعة جيغوفن (A Giffen good) فانها سلعة أدنى لها نتيجة دخل بالكبر الكافي للتعويض عن نتيجة التعويض السالبة ولجعل المقدار $(\partial q_1/\partial y)$ موجبا وهذا يعني أنه كلما انخفض سعر Q_1 فان شراء المستهلك للسلعة Q_1 ينخفض تباعا لها . وقد يحدث هذا اذا كان المستهلك فقيرا لدرجة أن جزءا كبيرا من دخله يصرف على سلعه مثل البطاطا والتي يحتاجها للمعيشة . فلنفترض الآن أن أسعار البطاطا انخفضت فنجد أن المستهلك الذي لا يشغف بالبطاطا كثيرا يشعر وكأن دخله الحقيقي ازداد نتيجة لانخفاض سعر البطاطا وطيه فانه سوف يقوم بشراء كمية أقل من البطاطا ويشتري سلع أخرى احب اليه نسبة بما بقي لديه من دخل نتيجة لانخفاض سعر البطاطا .

مثال : ان معادلة سلتزكي يمكن اشتقاقها لدالة المنفعة التي ذكرت في الأمثلة العاضية ولهذا الفرض نضع قيد ميزانية المستهلك في الشكل العام المطلق

$$V = q_1 q_2 + \lambda (y - p_1 q_1 - p_2 q_2) \quad y - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئية لهذه الدالة مساوية لصفر نحصل على المعادلات الآتية :

$$q_2 - \lambda p_1 = 0$$

$$q_1 - \lambda p_2 = 0$$

$$y - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$$

ومنها نحصل على المعادلات الآتية بأخذ الاشتقاق الكامل لها :

$$dq_2 - p_1 d\lambda = \lambda dp_1$$

$$dq_1 - p_2 d\lambda = \lambda dp_2$$

$$-p_1 dq_1 - p_2 dq_2 = -dy + q_1 dp_1 + q_2 dp_2$$

فاذا رمزنا لمحدودة عوامل هذه المعادلات بالحرف \mathcal{D} وكذلك رمزنا للعامل المرافق للعنصر في الصف رقم i والعمود رقم j بالحرف \mathcal{D}_{ji} فاننا نحصل على الآتي :

$$\mathcal{D} = 2p_1 p_2$$

$$\mathcal{D}_{11} = -p_1^2$$

$$\mathcal{D}_{21} = p_1 p_2$$

$$\mathcal{D}_{31} = -p_2$$

ويستخدم طريقة كرامر Cramer's rule يمكن الحصول على dq_1 على النحو التالي :

$$dq_1 = \frac{-p_2^2 \lambda dp_1 + p_1 p_2 \lambda dp_2 - p_2 (-dy + q_1 dp_1 + q_2 dp_2)}{2p_1 p_2}$$

وبافتراض أن سعر السلعة الأولى فقط هو القابل للتغير ، نحصل على :

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -\frac{p_2 \lambda}{2p_1} - \frac{q_1}{2p_1}$$

ولكن نحصل على قيمة λ فاننا نموض بقيم q_1 وقيم q_2 من المعادلتين الأولىين من معادلات شروط الدرجة الأولى في المعادلة الثالثة ونحصل على قيم λ بدلالة y, p_1, p_2 وهكذا تكون $\lambda = y/2p_1 p_2$ وبتمويض هذه القيمة في المعادلة

$$(y = 100, p_1 = 2, p_2 = 5) \quad \text{وكذلك القيم} \quad \frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -\frac{p_2 \lambda}{2p_1} - \frac{q_1}{2p_1}$$

وكذلك قيمة الموازنة للمجهول q_1 (وتساوى (25)) نحصل على الاجابة العددية الآتية :

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -12.5$$

ومعنى هذه الاجابة هو أنه اذا بدأنا من حالة التوازن البدائية فان السعر p_1 اذا تغير ، يفرق أن جميع المجهولات الأخرى على وضعها لم تتغير ، فان مشتريات المستهلك سوف تتغير بمعدل وقدرة 12.5 وحده ق Q_1 لكل ريال تغير في سعر Q_1 ، واتجاه هذا التغير في مشتريات المستهلك هو مكن اتجاه التغير في السعر . فالتغيير $-p_2\lambda/2p_1$ هو نتيجة التعويض substitution effect ، وقيمة في المثال الحالي هي 6.25- . أما التغيير $-q_{11}/2p_1$ هو نتيجة الدخل income effect ، وقيمة الحالية هي 6.25- .

Cross Effects

التأثير المتداخل :

ان معادلة سلتيكي (٢٣-٢) وتشيل مرونتاتها في المعادلات (٢٤-٢) يمكن امتدادة ليشمل التغيرات في الطلب لسلمة واحدة كنتيجة للتغيرات في السعر للسلع الأخرى ، وتكون على الأنماط العامة التالية :

$$\begin{aligned} \text{الأسعار} = \text{تأثير} \left(\frac{\partial q_i}{\partial y} \right) q_i = \text{تأثير} \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j} \right) \frac{\partial p_j}{\partial y} + q_i \frac{\partial q_i}{\partial y} = \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j} \right) \frac{\partial p_j}{\partial y} + q_i \frac{\partial q_i}{\partial y} \quad (27-2) \\ \varepsilon_{ij} = \xi_{ij} - \alpha_j \eta_i \quad (28-2) \end{aligned}$$

لجميع $i, j = 1, 2$ ، وإشارات النتائج المتداخلة $(i \neq j)$ غير معروفة عادة . فإذا كانت $S_i = \partial q_i / \partial y$ تمثل نتيجة التعويض عندما تتعدل كمية السلمة كنتيجة للتغيرات في السعر j ، وما ان Q محدده متطابقة ^(١) symmetric determinant فان $Q_{12} = Q_{21}$ ، وكذلك $Q_{11} = Q_{22}$. وهذا يعني ان نتيجة التعويض على السلمة في الترتيب i كنتيجة للتغير في السعر في الترتيب j هو نفسه على السلمة في الترتيب j كنتيجة للتغير في السعر في الترتيب i (٢) .

وهذه النتيجة تستدعي الانتباه فتخيل ان طلب المستهلك للشاي يزداد بمعدل كبير من الشاي لكل قرش زيادة في سعر القهوة ومن الممكن ان نستنتج من هذا ان مشتروا من القهوة سوف تزداد بمعدل كبير من القهوة لكل قرش زيادة في سعر الشاي Q_1 compensated demand elasticities . كنتيجة للتغيرات في السعرتين p_1 ، p_2 نحصل على الآتي ،

$$\xi_{11} + \xi_{12} = \frac{p_1 Q_{11} \lambda}{q_1 Q} + \frac{p_2 Q_{21} \lambda}{q_1 Q} = \frac{\lambda (p_1 Q_{11} + p_2 Q_{21})}{q_1 Q} = 0$$

وما ان $(p_1 Q_{11} + p_2 Q_{21})$ يساوي الصفر ، لانه مفكوك المحددة في المعادلة (٢٧-٢)

(١) يقال للمحددة A determinant بأنها متماثلة — symmetric اذا كانت مصفاتها

array متماثلة حول قطرها الرئيسي principal diagonal .

(٢) نقصد هنا بالترتيب i ، j التعبير i th و j th (المترجم)

بالنسبة للعوامل المرافقة cofactors (المغايرة) وهي العوامل المرافقة لعناصر العمود الأول مصروبة في سالب عناصر العمود الأخير) فإن مرونة التعويض السالبة للسلمة Q_1 بالنسبة للسعر p_1 تساوى القيمة المطلقة لمرونة التعويض الموجبة للسلمة Q_2 بالنسبة للسعر p_2 .

وإذا جمعنا مرونة الطلب العادية للسلمة Q_1 بصفه سالبة كنتيجة للتفسيرات في السعيرين p_1 و p_2 كما هي معطاة في المعادلة (٢٨-٢) نحصل على :

$$(\epsilon_{11} + \epsilon_{12}) - (\epsilon_{21} + \epsilon_{22}) = -(\epsilon_{11} + \epsilon_{12}) + (\alpha_1 + \alpha_2)\eta_1 = \eta_1$$

فناستخدم المعادلة (٢٩-٢) والمعادلة $(\alpha_1 + \alpha_2 = 1)$ نحصل على النتيجة التي تنص على ان مرونة الدخل لطلب سلعة ما يساوى سالب حاصل جمع مرونة السعر العادية لطلب السلعة نفسها بالنسبة لسعرها وبالنسبة للأسعار الأخرى.

Substitutes and Complements

السلع البديلية والتكاملية

يقال لسلعتين انهما تبادليتان اذا كانت معا تحققان للمستهلك نفس الرغبات ويضال انهما تكامليتان اذا كانت تستهلكان معا من اجل تحقيق بعض الرغبات المحددة وهذه بالطبع تعريفات غير مفيدة تماما ولكن تجارب الحياة اليومية قد تضى بعض الأمثلة الغبولة منها ان الشاي والقهوة ، في معظم الاحيان سلعتان تبادليتان سيما القهوة والسكر سلعتان متكاملتان وتعطينا معادله سلفزكى (٢٧-٢) تعريفا اكثر دقة ومع السلع التبادلية والتكاملية عن طريق حد التعويض المتبادل cross-substitution في المعادلة وعلى هذا فان السلعتين Q_1 ، Q_2 تكونان تبادليتان اذا كانت نتيجة التعويض (وهر، $\partial Q_1 / \partial Q_2$) موجبه وتكونان تكامليتان اذا كانت نتيجة التعويض سالبة .

فإذا كانت السلعتان Q_1 و Q_2 تبادليتان (في مفهوم تجربة الحياة اليومية) وإذا كانت ايضا التغيرات التعويضية في دخل المستهلك تحافظ في وضعه على منحني سوا معين ، فان اى تغير في سعر سوف يكون حافزا للمستهلك ليعوض Q_2 بدلا من Q_1 وعليه فان $(\partial Q_1 / \partial p_1)_{U=const} > 0$ ولنفس الاسباب فان $(\partial Q_2 / \partial p_1)_{U=const} < 0$ في حالة السلعة التكاملية (١).

ليس كل السلع متكاملة بعضها البعض ولذلك فان التبادل فقط هو الحادث في مثل حالة الصفيان الراهند واشاب هذه النظريه كما يلي:

(١) وهذا صحيح اذا ساس لبعض التعريفات فعندما تكون α_1 و α_2 $(\partial Q_1 / \partial p_1)_{U=const}$ فان السلعتان Q_1 و Q_2 تكونان مستقلتان .

نضرب معادلة (٣٠-٢) في p_1 ومعادلة (٣١-٢) في y ومعادلة (٣٢-٢) لقيم $i=1$ و $j=2$ في p_2 ثم نجمع لنحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_{11}\lambda}{\partial} p_1 + q_1 \frac{\partial_{31}}{\partial} p_1 + \frac{\partial_{21}\lambda}{\partial} p_2 + q_2 \frac{\partial_{31}}{\partial} p_2 - \frac{\partial_{31}}{\partial} y \\ = \frac{1}{\partial} [\partial_{11}\lambda p_1 + \partial_{21}\lambda p_2 - \partial_{31}(y - p_1 q_1 - p_2 q_2)] \\ = \frac{1}{\partial} [\partial_{11}\lambda p_1 + \partial_{21}\lambda p_2 - \partial_{31}(0)] = 0 \end{aligned}$$

والسبب في ان المحصور داخل القوس يساوى صفرا هو انه مفكوك لحدود مواهل مغايره كما في المعادله (٣٩-٢) ويتموض $S_{ij} = \partial_{ij}\lambda/\partial$ نحصل على :

$$(٤١-٢) \quad S_{11}p_1 + S_{12}p_2 = 0$$

ومن المعروف ان نتيجة التموض للسلعة Q_1 كتتيجه لتغيرات في السعر p_1 (وهي في المعادله تساوى S_{11}) تكون سالبه وعلى هذا فان المعادله (٤١-٢) تتطلب ان تكون S_{12} موجب و هذا يعنى بالنسبه لتعريفات التبادل والتكامل ان Q_1 و Q_2 في الضرورى ان يكونا سلعتان تبادليتان .

وتعرف السلعتان i و j بأنهما تبادليتان بالجملة *gross substitutes* او تكامليتان بالجملة *gross complements* حسب اشارة $\partial q/\partial p_i$ من السلع (او البضائع) ان يكونا تبادليتان بالنسبه للحد S_{ij} وفي نفس الوقت يكونا تكامليتان بالجملة وكذلك في حالة وجود عدد n من السلع فانه ايضا يحتمل ان تكون السلع تكامليه بالنسبه للحد S_{ij} وتكون كذلك في نفس الوقت تبادليه بالجملة .

مثال : في حالة وجود سلعتان والمعطاء بدالة المنفعة $U = q_1 q_2 - q_2$ بحيث ان مجال الدالة هو $q_1 > 1, q_2 > 0$ وبايجاد الحد الاطلى تحت قيد ميزانية المستهلك نتحصل على دالة الطلب $q_2 = (y - p_1)/2p_2$ والمحققة للمجال $p_1 < y$ وهنا $\partial q_2/\partial p_1 < 0$ ولجعل السلعتان تكامليتان بالجملة وبالرغم من انها تبادليتان بالنسبه للحد S_{12} .

٢ - ٦ التعميم إلى n متغير : GENERALIZATION TO n VARIABLES

بدلا من التحاليل السابقه في حالة سلعتان ، نعمم النقاش ليمبح عدد المتغيرات n بدلا من اثنين وهذا التعميم سوف لا يكون بصفه موسعه ولكن الخطوات الاولى متشابهه . وفي حالة وجود عدد n من السلع فان دالة المنفعة تكون على النحو التالي :

$$U = f(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

وكذلك قيد الميزانية يكون على النحو التالى:

$$y - \sum_{i=1}^n p_i q_i = 0$$

فإذا كنا نأخذ دالة لا قترانج نحصل على:

$$V = f(q_1, q_2, \dots, q_n) + \lambda \left(y - \sum_{i=1}^n p_i q_i \right)$$

وبوضع الاشتقاق الجزئى لدالة لا قترانج مساوية لصفر نحصل على:

$$(٤٢-٢) \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} = f_i - \lambda p_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

وهذه الشروط فى (٤٢-٢) يمكن تعديلها لتتنس على المساواة لجميع السلع التى لها منفعة حديه marginal utility مقسومة على السعر. وهنا أيضا فان اشتقاق V بالنسبة لضروب لا قترانج λ يمثل قيد الميزانية للمستهلك ويوجد مجموع $(n+1)$ من المعادلات فى $(n+1)$ من المجاهيل (وهى عدد n من q بالاضافه الى λ) $(n+1) =$ ويمكن الحصول على منحنيات الطلب للعدد n من السلع بحل المعادلات لقيم q ويمكن كتابة الشروط فى معادله (٤٢-٢) بطريقة بدليه:

$$-\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

لجميع i, j وهذا يعنى ان معدل تعويض السلعه i للسلعه j يجب ان يساوى خارج قسمه الاسعار p_i/p_j وشروط الدرجة الثانيه يجب تحقيقها للتأكد من اى مجموعه من السلع، والتى تحقق شروط معادله (٤٢-٢) هى مجموعه ذات حد اعلا optimal ويجب كذلك ان تكون محددات هيسيان المجاورة bordered Hessian determinants متبادليه فى اشاراتها (بمعنى ان تكون موجبه ومره سالبه وهكذا) على النحو التالى:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & -p_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & -p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & 0 \end{vmatrix} < 0,$$

$$\dots, (-1)^n \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} & -p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} & -p_n \\ -p_1 & -p_2 & \dots & -p_n & 0 \end{vmatrix} > 0$$

وهى بالطبع تعميم للشروط فى معادله (١٢-٢).

ويمكن ايضا تعميم افتراض تحدب convexity منحنيات السواء من مجال ذو بعدين two dimensions الى سطوح فى مجال بعدد n من الابعاد. واول شرط من

شروط الدرجة الثانية في حالة n من الأبعاد هو نفسه شرط الدرجة الثانية في حالة المجال ذو البعدين والذي أوضحنا أنه ينتج في انخفاض RCS بين السلع. أما في حالة n من الأبعاد فإنه ينتج في انخفاض RCS بين كل زوجين من السلع. وتحقيق شروط الدرجة الثانية يأتي بضمان وجود شرط شبه - المتقصر المضبط لدالة المنفعة .
والنظريات الأخرى يمكن تعميمها كذلك فمثلاً، معادلات سلتزكي في (٢٧-٢) وكذلك (٢٨-٢) تتحقق لجميع $i, j = 1, \dots, n$ وتعميم معادلة (٢١-٢) ينتج عنه المعادلات التالية :

$$\sum_{j=1}^n S_{ij} p_j = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (٢٢-٢)$$

ويتبع من هذا أيضاً أنه لا يمكن أن تكون جميع السلع مكافئة لبعضها البعض، مع العلم بأنه بعض أزواج من هذه السلع يمكن أن تكمل بعضها البعض بمعنى أن بعض $S_{ij} < 0$ لقيم $j \neq i$. وكذلك يمكن تعريف التبادل والتكامل بالجمله على نفس النمط السابق .
ويمكن أيضاً تعميم العلاقات الخاصة بالعرونة . فالنمط لها في حالة العدد n من السلع للمعادلات في (١٨-٢) و (١٩-٢) و (٢١-٢) يكون :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \varepsilon_{ij} = -\alpha_i \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \eta_j = 1$$

وتعميم المعادلات في (٢٩-٢) وكذلك (٣٠-٢) تكون على النحو التالي :

$$\sum_{j=1}^n \xi_{ij} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$-\sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} = \eta_i \quad i = 1, \dots, n$$

SUMMARY

٢ - ٧ ملخص

لقد قام ملها^١ الاقتصاد في القرن التاسع عشر بوضع نظريات المستهلك وسلوكه على الافتراض القاسي بتقدير لكمية النفقة التي يحصل عليها المستهلك من سلعة ما ولكن هذا الافتراض القاسي للنظريات هجر مع بداية هذا القرن وتفترض أن المستهلك قادر على ترتيب السلع حسب الانفعالية في نظام محدد . وهذا الترتيب يوصف من الناحية الرياضية عن طريق دالة المنفعة الترتيبية والتي نعين رقماً أعلى للسلع الأكثر رغبة عند المستهلك الذي يفترض أن لديه دالة منفعة شبه - منحرفة بانضباط تام مؤداه إلى انخفاض في معدل تعويض السلع (RCS) .

ولقد وجدنا ان القاضيه الاساسيه لنظريه سلوك المستهلك فى ايجاد الحد الاعلى للمنفعة • وحيث ان دخله محدود لذا فان المستهلك يحاول ايجاد الحد الاعلى للمنفعة تحت شرط قيد ميزانيته والذي يعبر عن محدوديه دخله رياضيا • وبالطبع فان معدل تمويش السلع RCS للمستهلك يجب ان يساوى نسبة الاسعار للحد الاعلى للمنفعة •

وبلغة الرسم فان مجموعه السلع والتي تغطى للمستهلك هذه الاعلى من المنفعة تقع على النقطه التي يلامس عندها خط دخله مع منحنى السواء • وشرط الدرجة الثانيسه تتحقق بضمان افتراض التحدب •

ونجد ايضا ان دالة المنفعة ليست وحيدة او فريده من نوعها لان اى دالة تقوم بدور وصف افضليات المستهلك يمكن الحصول على دالة اخرى تقوم بنفس الغرض عن طريق التحويلات بشرط ان تكون تحويله تزايديه موجب بالنسبه للدالة الاولى ولكن بعض انواع التحويلات لا يحافظ على الترتيب المعين لافضليات المستهلك ولهذا فان دالة المنفعة تكون فريده من نوعها وحتى الحصول على تحويله تزايديه موجب لنجعل منها دالة غير وحيدة •

ويمكن بالطبع الحصول على دوال الطلب العاديه للسلع من شروط الدرجه الاولى للحصول على الحد الاعلى للمنفعة وهى تعطى الكميات المطلوبة بدلالة جميع الاسعار ودخل المستهلك وهذه الدوال وجد انها ذات قيمة فريده ومتجانسه من درجه صفريه الاسعار والدخل ، بمعنى ان اى تغير تناسبى فى جميع الاسعار ودخل المستهلك لا يغير الكميات المطلوبة • اما دوال الطلب التعميضي للمستهلك فقد ركبت على الفرض بان دخله قد ازداد او تناقص ، كنتيجة لتغير فى السعر من اجل الحفاظ على رغبه المستهلك على مستوى المنفعة الذى بد • به وهذه الدوال تعطى الكميات المطلوبة بدلالة جميع الاسعار وهى ايضا دوال ذات قيمة فرديه متجانسه من درجه صفريه الاسعار • وتحصلنا كذلك على منحنى الطلب بوضع الكمية المطلوبة بدلالة سعرها الخاص على افتراض ان المتغيرات الاخرى فى دالة الطلب تعامل كما لو كانت معطاء (ثابتة غير متغيرة) ولقد مررنا مروناات السعر لدوال الطلب المختلفه الانواع وعرفنا ايضا ، مروناات الدخل لدوال الطلب العاديه •

وعلى وجه العموم وجدنا ان كمية العمل التى يقوم بها المستهلك تأثر طرسي مستوى المنفعة والتي يمكن الحصول عليها عن طريق ايجاد الحد الاعلى للمنفعة وشروط التوازن تشبه للشروط التى تتحقق عند اختيار الحد الاعلى من مجموعات السلع المختلفه والمعرضه للمستهلك ليختار منها •

ومن الممكن معرفة رد الفعل عند المستهلك للتغيرات في دخله وأسعار السلع من طريق نتائج الدخل والتعويض فتأثير أى تغير في سعر معطى يمكن تحليله الى مركبين هامين احدهما نتيجة التعويض والتي تقيس المعدل الذى يعوض به المستهلك سلعة مكان اخرى يتحرك عبر نفس منحنى السواء والثانى هو نتيجة الدخل كصنيف متبقى فاذا تغير سعر سلعة ما ، فان الكمية المطلوبة سوف تتغير في الاتجاه المعاكس اذا اجبر المستهلك على التحرك عبر نفس منحنى السواء وفى الحالة تكون نتيجة التعويض سالبة ، ولكن اذا كانت نتيجة الدخل موجبه فان السلعة المطلوبة تسمى سلعة superior good اما اذا كان مجموع النتيجتين (نتيجة الدخل والتعويض) موجبه فان السلعة المطلوبة تسمى سلعة جيئين Giffen good . ولقد مررنا بتبادل وتكامل السلع من طريق اشارة نتيجة التعويض بالنسبة لسلعة ما عندما يتغير سعر سلعة اخرى على النحو التالى :

اذا كانت نتيجة التعويض التداخلى موجبه فهذا يعنى تبادلية السلع ، اما اذا كان سالبا فهذا يعنى تكاملها . ومررنا ايضا ، مجمل التبادل والتكامل من طريق التأثير الكامل لتغير الاسعار على الكميات المطلوبة وفى نهاية الباب ، همتا النظريات الى عدد من السلع بدلا من اغراض وجود سلعتين فقط .

EXERCISES

2-1 Determine whether the following utility functions are regular strictly quasi-concave for the domain $q_1 > 0$, $q_2 > 0$: $U = q_1 q_2$; $U = q_1^2 q_2$; $U = q_1^2 + q_2^2$; $U = q_1 + q_2 + 2q_1 q_2$; $U = q_1 q_2 - 0.01(q_1^2 + q_2^2)$; and $U = q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3$.

2-2 Let $f(q_1, q_2)$ be a strictly concave utility function, and let $q_j^{(j)} = (q_1^j + q_2^j)/2$, $j = 1, 2$, where superscripts denote particular values for the variables. Prove that

$$f(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}) - f(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}) > f(q_1^{(1)}, q_2^{(2)}) - f(q_1^{(2)}, q_2^{(1)})$$

2-3 Find the optimum commodity purchases for a consumer whose utility function and budget constraint are $U = q_1^{1/2} q_2$ and $3q_1 + 4q_2 = 100$ respectively.

2-4 The locus of points of tangency between income lines and indifference curves for given prices p_1, p_2 and a changing value of income is called an income expansion line or Engel curve. Show that the Engel curve is a straight line if the utility function is given by $U = q_1^\gamma q_2$, $\gamma > 0$.

2-5 Show that the utility functions $U = Aq_1^\alpha q_2^\beta$ and $W = q_1^\gamma q_2^\delta$ are monotonic transformations of each other where A, α, β and γ, δ are positive.

2-6 Let a consumer's utility function be $U = q_1^\gamma q_2^{1/2} + 1.5 \ln q_1 + \ln q_2$ and his budget constraint $3q_1 + 4q_2 = 100$. Show that his optimum commodity bundle is the same as in Exercise 2-3. Why is this the case?

2-7 Construct ordinary and compensated demand functions for Q_1 for the utility function $U = 2q_1 q_2 + q_2^2$. Construct expressions for ϵ_{11} , ϵ_{12} , and η_1 .

2-8 Derive the elasticity of supply of work with respect to the wage rate for the supply curve for work given by the example in Sec. 2-4.

2-9 Prove that Q_1 and Q_2 cannot both be inferior goods.

2-10 Verify that $S_{11}p_1 + S_{12}p_2 = 0$ for the utility function $U = q_1^\gamma q_2$.

2-11 Let $U = f(q, H)$ be a utility function the arguments of which are the quantity of a commodity (q) and the time taken to consume it (H). The marginal utilities of both arguments are positive. Let W be the amount of work performed, $W + H = 24$ (hours), r be the wage, and p be the price of q . Formulate the appropriate constrained utility maximization problem. Find an expression for dH/dr . Is its sign determined unambiguously?

2-12 Imagine that coupon rationing is in effect so that each commodity has two prices: a dollar price and a ration-coupon price. Assume that there are three commodities and that the consumer has a dollar income y and a ration-coupon allotment z . Also assume that this allotment is not so liberal that any commodity combination that he can afford to purchase with his dollar income can also be purchased with his coupons. Formulate his constrained-utility-maximization problem assuming a strictly concave utility function. Derive conditions for a maximum. Interpret the conditions from an economic point of view. Find a sufficient condition which guarantees that the imposition of rationing does not alter the consumer's purchases.

SELECTED REFERENCES

- Debreu, Gerard: *Theory of Value* (New York: Wiley, 1959). The theory of the consumer is discussed in chap. 4 from an advanced and modern mathematical point of view.
- Friedman, M.: *Essays in Positive Economics* (Chicago: University of Chicago Press, 1953). "The Marshallian Demand Curve," pp. 47-59. An analysis of the various types of demand functions and demand curves.
- Georgescu-Roegen, N.: "The Pure Theory of Consumer Behavior," *Quarterly Journal of Economics*, vol. 50 (August, 1936), pp. 545-593. A mathematical analysis of ordinal utility theory.
- Hicks, J. R.: *Value and Capital* (2d ed., Oxford: Clarendon Press, 1946). Chaps. I-III contain an exposition of ordinal utility theory. The mathematical analysis is in an appendix.
- Linder, S. B.: *The Harried Leisure Class* (New York: Columbia University Press, 1970). An analysis of the effect on consumption of the time required for consumption activities. The mathematical analysis is in an appendix.
- Marshall, Alfred: *Principles of Economics* (8th ed., London: Macmillan, 1920). Chaps. I-IV, book III, contain a nonmathematical discussion of wants, utility, marginal utility, and demand from the cardinalist viewpoint.
- Samuelson, P. A.: *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). Chaps. V and VII contain a comprehensive analysis of utility theory using fairly advanced mathematics.
- Slutsky, E. E.: "On the Theory of the Budget of the Consumer," *Giornale degli Economisti*, vol. 51 (July, 1915), pp. 1-26. Also reprinted in American Economic Association, *Readings in Price Theory* (Homewood, Ill.: Irwin, 1952), pp. 27-56. The article upon which the modern mathematical theory of consumer behavior is based. Fairly difficult mathematics.
- Theil, H.: *Theory and Measurement of Consumer Demand* (Amsterdam: North-Holland, 1975). The mathematics of demand theory is developed in the first three chapters, using calculus and matrix algebra.

لفصل الثالث

موضوعات في سلوك المستهلك

TOPICS IN CONSUMER BEHAVIOR

لنقد تم التوسع في نظريات سلوك المستهلك الاساسية ، والتي عديم شرحها في الباب الثاني ، في هذا الباب من جميع الجبهات لتغطي سلوك المستهلك للحصول على الحد الاقصى للمنفعة لبعض دوال المنفعة المختلطة الانواع .

في الجزء ١-٣ نوقشت دالة المنفعة المولدة لدوال المنصرفة الخطية القدرة $estimable\ linear\ expenditure\ functions$ اما في الجزء ٢-٣ فقد عرفت دوال المنفعة التجميعية والانفصالية $Separable\ and\ additive$ مع خواصها . وفي الجزء ٣-٣ فقد نوقشت خواص دوال المنفعة المتجانسة والمتالفه $homothetic$ ولقد عرفت دوال المنفعة بدلالة الاسعار والدخل في الجزء ٤-٣ وكذلك اى علاقات اخرى بين المنفعة ودوال الطلب . أما في الجزء ٥-٣ فان نظريات الافضلية الفصح منها $revealed\ preference$ وشم نظريات اخرى هامة تتبع من سلوك المستهلك الملاحظ قد تم جمعها واختصارها في الجزء ٥-٣ .

في الجزء ٦-٣ لقد تم اثبات ان مجموعة من السلع يمكن ان تعامل كسلعة فردية مركبة $single\ composite\ commodity$ اذا كانت اسعار هذه السلع تتغير دائما بنفس النسبة اما مقياس " فائز المستهلك " $consumer's\ surplus$ والتي اكتسبها المستهلك من استهلاك سلعة ما فقد نوقشت في الجزء ٧-٣ . ولقد توسع في نظرية سلوك المستهلك لتغطي الاختيار تحت ظروف عدم التاكيد $uncertainty$ في الجزء ٨-٣ وهذه التحاليل جلبت على مسائل التأمين في الجزء ٩-٣ .

٣ - ١ نظام الصرف الخطي : A LINEAR EXPENDITURE SYSTEM

ولسنيين عدة قام علماء الاقتصاد النظريون بمعالجة وتحليل سلوك المستهلكين للحصول على اعلى مرتبة للمنفعة وقام في نفس الوقت علماء الاقتصاد التطبيقيون $econometricians$ بتقدير طلبات ومنصرفة المستهلك بدون اعمال مع بعضهم البعض الا القدر البسيط

فالنظريون Theorists يقدّمون بعض الأمثلة التي لا تساعد كثيرا في العمل التطبيقي، والتطبيقيون يعطون تقديرات لبعض العلاقات التي ليس لها ارتباط، إلا القليل، بطريقة الحصول على الحد الأعلى للمنفعة، ولكن لحسن الحظ، فقد قصرت الهوة بين الاثنين وقدّمت أمثلة لها قاعدة نظرية سليمة تسمح بالتقديرات التطبيقية عليها. ونعطي هنا مثالا لهذا.

مثال : افترض ان دالة المنفعة ^(١) هي كالتالي :

$$U = \alpha_1 \ln(q_1 - \gamma_1) + \alpha_2 \ln(q_2 - \gamma_2)$$

في المجال $q_1 > \gamma_1, q_2 > \gamma_2$ ويمكن تعريف المجاهيل على انها الكميات الموجبة للحد الأدنى من المعيشة minimum subsistence quantities وكذلك المجاهيل فاننا نفترض انها موجبة. وبتطبيق التحويلة التزايدية الموجبة positive monotonic

transformation $U' = U/(\alpha_1 + \alpha_2)$ لتحصل على $U' = \beta_1 \ln(q_1 - \gamma_1) + \beta_2 \ln(q_2 - \gamma_2)$

وتسمى العوامل β_1, β_2 (بحيث ان $\beta_1 + \beta_2 = 1$) عوامل المشاركة "share" وتكون الدالة Z بحيث ان :

$$Z = \beta_1 \ln(q_1 - \gamma_1) + \beta_2 \ln(q_2 - \gamma_2) + \lambda(y - p_1 q_1 - p_2 q_2)$$

ونضع اشتقاقها الجزئية مساوية للصفر لتحصل على :

$$\frac{\partial Z}{\partial q_1} = \frac{\beta_1}{q_1 - \gamma_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial q_2} = \frac{\beta_2}{q_2 - \gamma_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$(1-3) \quad \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = y - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$$

ويمكن للقارئ ان يثبت تحقق شرط الدرجة الثانية وبتقييم المعادله (٢-٣٦) يستطيع القارئ، ايضا ان يثبت ان المنفعة الحديّة للدخل تكون في تناقص بالنسبة لهذا المثال وبحل معادلات (١-٣) للكميات القصوى نحصل على دوال الطلب

(١) هذه الدالة تعرف بدالة (كلاين - روبين Klein-Rubin) او ستون وقيري (Stone-Geary) راجع مقالة كلاين وروبين تحت عنوان "مؤشر المنفعة الثابت المستوى المعيشة" في دوريه مختصر الدراسات الاقتصادية Review of Economics Studies مجلد رقم ١٥ من عام ٤٨-١٩٤٧ على صفحات ٨٤-٨٧ وكذلك مقاله قيري في نفس الدوريه مجلد رقم ١٨ من عام ٤٩/٥٠ على الصفحات ٦٥-٦٦ تحت عنوان "ملاحظته على مؤشر المنفعة الثابت المستوى المعيشة" وكذلك راجع مقالة ستون تحت عنوان "انظمة المصروفات الخطية وتحاليل الطلب : تطبيقا على انظمة الطلب البريطاني في دوريه الاقتصاد Economic Studies مجلد ١٥ من عام ١٩٥٤ على صفحات ٥١١-٥٢٧.

التاليه :

$$q_1 = \gamma_1 + \frac{\beta_1}{p_1}(y - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2)$$

(१-२)

$$q_2 = \gamma_2 + \frac{\beta_2}{\rho_2} (y - p_1 \gamma_1 - p_2 \gamma_2)$$

ويضرب المعادلة الاولى في (٢-٣) بالسعر p_1 والثانية بالسعر p_2 نحصل على

$$p_1 q_1 = p_1 \gamma_1 + \beta_1 (y - p_1 \gamma_1 - p_2 \gamma_2)$$

(१-१)

$$p_3 q_3 = p_3 \gamma_3 + \beta_3 (y - p_1 \gamma_1 - p_2 \gamma_2)$$

وهذه المعادلات هي معادلات خطية (أي معادلات من الدرجة الاولى linear) بالنسبة للدخل والاسعار وعليه فانها مناسبة لتحليل الانحدار الخطي linear regression analysis .

٣ ٢ دوال المنفعة القابلة للجمع والانفصال :

SEPARABLE AND ADDITIVE UTILITY FUNCTIONS

لقد افترضنا في الباب الثاني ان دوال المنفعة لها صفات خاصة منها قابلية الاشتقاق وانها دوال متزايدة وانها كذلك شبه - مقعرة بانضباط تام واعطينا بعض الامثلة وكذلك في الجز' ١-٣ . وفي هذا الجز' وكذلك الجز' ٣-٣ نناقش خواص دوال المنفعة والتي تحقق بعض الافتراضات الاغاثية العامة .

ومن هذه الخواص ، خاصية قابلية الانفصال ونقول بأن دالة الضغفه لها خاصية الانفصال الشديد *strongly separable* في جميع متغيراتها المستقلة اذا كان يمكن كتابتها على النحو التالي :

$$(\varepsilon - 3) \quad U = F \left[\sum_{i=1}^n f_i(q_i) \right]$$

بحيث ان وكذلك تعلمان دالتان متزايدتان ومثال ذلك الداله

$$U = \ln(q^{\circ} + q^{\circ} + q^{\circ}).$$

ونقول بأن دالة الحنفعة لها قابلية الجمع *strongly additive* إذا كان يمكن كتابتها على النحو التالي :

$$(5-3) \quad U = \sum_{i=1}^n f_i(q_i)$$

بحيث ان f تمثل مجموعة دوال متزايدة وخاصة قابلة للجمع ما هي الا حالة خاصة لعقابلة الانفصال ومثال قابلية الجمع هو الدالة $q_1 + q_2 + q_3 \cdot U$ وان اي دالة منفعة والتي لها تحويلية متزايدة قابلة للجمع يمكن معادلتها على انها قابلة للجمع لكل النظريات القابلة للتطبيق في الدوال القابلة للجمع فالدالة $U = q_1 q_2$ قابلة للانفصال ولكنها لا تظهر على انها قابلة للجمع ولكن تحويلية اللورانتيم الطبيعي لها

$F(U) = \alpha \ln q_1 + \ln q_2$ قابل للجمع وكذلك في مضاد اللورانتيم الطبيعي للدالة :

• فانها قابله للجزم بشده $U = \ln(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$

وبفاضل المعادله (٢-٣) بالنسبه للكميات q_i و q_j ونقسمه اشتقاق بآخر نحصل

$$\text{على :} \quad RCS = \frac{F_j f_i}{F_i f_j} = \frac{f_j}{f_i} \quad (٦-٣)$$

ويتبع من المعادله ان المنفعة الحديه ، بوجه عام ، لكل سلعه تعتمد اعتمادا تاما على كميات جميع السلع الاخرى . ولكن المعادله (٦-٣) توضح ان RCS بين Q_i و Q_j تعتمد فقط على الكميات q_i و q_j ونتيجة لهذا فان امتراض قابلية الانفصال بشدة يسمح لنا بالتحاليل الزوجيه والتي لم تكن ممكنه في الحاله العامة .

ودالة المنفعة القابله للجمع لها الخاصية التي تنص على ان جميع الاشتقاقات الجزئية المتداخلة تساوى صفرا بمعنى ان $U/\partial q_i \partial q_j = 0$ لجميع قيم $i \neq j$ وان شرط شديد لتتضمن المنطق في حالة وجود متغيرين هو : $f_{12}f_{21} + f_{22}f_{11} < 0$

وتعرف دالة المنفعة بانها قابله للانفصال بضعف *weakly separable* اذا كان من الممكن تقسيم المجاهيل الى مجموعتين او اكثر مثل (q_1, \dots, q_k) وكذلك (q_{k+1}, \dots, q_n)

$$U = F[f_1(q_1, \dots, q_k) + f_2(q_{k+1}, \dots, q_n)] \quad \text{بحيث ان :}$$

وتعرف الدالة بانها قابله للجمع بضعف *weakly additive* اذا كان :

$$U = f_1(q_1, \dots, q_k) + f_2(q_{k+1}, \dots, q_n)$$

ونقصد بالانفصال هنا ان جميع RCS لكل ازواج المتغيرات داخل المجموعة الواحدة لا تتأثر بالكميات للمتغيرات خارج مجموعتها ، ونقصد ، كذلك بقابلية الجممان جميع الاشتقاقات المتداخلة ، لازواج المتغيرات في المجموعات المنتفدة تساوى صفرا .

٣ ٣ دوال المنفعة المتجانسة والمتألفة :

HOMOGENEOUS AND HOMOTHETIC UTILITY FUNCTIONS

نعرف دالة المنفعة بانها متجانسة من درجة k اذا كان :

$$f(tq_1, \dots, tq_n) = t^k f(q_1, \dots, q_n) \quad (٧-٣)$$

بحيث ان k ثابت و t اى رقم حقيقي موجب بحيث ان (tq_1, \dots, tq_n) تكون ضمن مجال الداله والاشتقاقات الحزثيه لدالة متجانسه من درجة k تكون ايضا متجانسه ولكسن من درجة $k-1$ وبفاضل المعادله (٧-٣) حزثيا بالنسبه للمتغير q_i مستخدمين قاعدة دالة الدالة (١) the function of a function rule

$$t f_i(tq_1, \dots, tq_n) = t^k f_i(q_1, \dots, q_n) \quad \text{من الناحية البسرى لنحصل على :}$$

(١) راجع الجزء 2-A في نهاية الكتاب للتعرف على هذه القاعدة .

وهذا نحصل على RCS للسلع Q_1 و Q_2 كالآتي :

$$\frac{f_1(q_1, \dots, q_n)}{f_2(q_1, \dots, q_n)} = \frac{f_1^{1-k}(q_1, \dots, q_n)}{f_2^{1-k}(q_1, \dots, q_n)} = \frac{f_1(q_1, \dots, q_n)}{f_2(q_1, \dots, q_n)}$$

مبينا ان RCS لم يتغير بالنسبة للتغيرات النسبية في مستويات الاستهلاك وانه كذلك ، اذا كان المستهلك لا يفرق بين مجموعتين من السلع من حيث الافضلية فانه سوف لا يفرق ايضا من حيث الافضلية ، بين اى مجموعتين اخريتين هما بمثابة تكرار للمجموعة الاولى (راجع تعرين ٢-٣) .

اما بالنسبة الى منحنيات السواء^{*} ، والى مثل ، هنا الدالتان مختلفتان من دوال المنفعة فانها واحدة اذا كانت احدى الدالتين دالة متزايدة مطردة بالنسبة للدالة الثانية ، وبالتالي فان خواص الدوال المتجانسة ، هي نفسها خواص جمع الدوال التزايدية المطردة للدوال المتجانسة^{*} وهذه الدوال المنفعيموالى تدخل ضمن اطار هذا النمط العام والذي يضم الدوال المتجانسة ، تسمى دوال متآلفة *homothetic* فاذا كانت دالة المنفعة من الدوال المتآلفة فان معدلات تعويض السلع سوف يعتمد على كميات السلع النسبية بدلا من كميات السلع المطلقة ويمكن معرفه ما اذا كانت دالة منفعة معينه دالة متآلفة بنحس معادلات RCS وعلى سبيل المثال ، فان الدالة $U = a - 1/q_1 q_2$ ليست دالة متجانسة ولكنها دالة متآلفة حيث ان : $f_1/f_2 = aq_2/q_1$.

٣ - ٤ دوال المنفعة الغير مباشرة والازدواجية في الاستهلاك :

INDIRECT UTILITY FUNCTIONS AND DUALITY IN CONSUMPTION

دوال المنفعة الغير مباشرة : Indirect Utility Functions

اذا افترضنا ان $v_1 = p/y$ فان شرط قيد ميزانية المستهلك يمكن كتابته الان على النحو التالى :

$$1 = \sum_{i=1}^n v_i q_i \quad (٨-٣)$$

وبما ان الحلول التى تؤدي الى الحصول على الحد الاعلى متجانسة من درجة صفر بالنسبة للدخل والاسعار فان هذه التحويله فى (٨-٣) لمن عقد المعادله الاصليه شيئا وانما الفرض هو لوضع الاسعار فى وضعها الطبيعى او الاتيادى فمعادله (٨-٣) بالاضافه الى داله المنفعه $U = f(q_1, \dots, q_n)$ تعطى شروط الدرجه الاولى الاتيه

للحصول على الحد الاطى :

$$f_i - \lambda v_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

(٩-٣)

$$1 - \sum_{i=1}^n v_i q_i = 0$$

ونتحصل على دوال الطلب العادي بحل المعادلات (٩-٣)

$$(١٠-٣) \quad q_i = D_i(v_1, \dots, v_n)$$

وعليه نعرف دالة المنفعة الغير مباشرة $g(v_1, \dots, v_n)$ على النحو التالى :

$$(١١-٣) \quad U = f[D_1(v_1, \dots, v_n), \dots, D_n(v_1, \dots, v_n)] = g(v_1, \dots, v_n)$$

وهذه الدالة تعطى الحد الاطى للمنفعة بدلالة الاسعار الاعتيادية او الطبيعية *normalized prices* وتعكس درجة الحصول على هذا الحد وكذلك تعكس اسعار السوق

بينما دالة المنفعة العادي تصف افضليات المستهلك مستقلة بذلك عن ظاهرة السوق .
وتتطبيق قاعدة الدالة - المركبة ^(١)

على المعادلة (١١-٣) نحصل على

$$(١٢-٣) \quad g_i = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial q_j}{\partial v_i} = \lambda \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial q_j}{\partial v_i} \quad j = 1, \dots, n$$

حيث ان المتساويات الثانية مبني على المعادلة (٩-٣) وباخذ الاشتقاق الجزئى للمعادلة (١٢-٣) بالنسبة للمجهول v_i نحصل على :

$$\sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial q_j}{\partial v_i} = -q_i \quad j = 1, \dots, n$$

وعلى هذا فان المعادلة (١٢-٣) تتطلب ان :

$$(١٣-٣) \quad q_i = -\frac{g_i}{\lambda} \quad j = 1, \dots, n$$

والتي تسمى " بمعادلة روى *Roy's identity* وطلبات السلع المتالى ترتبط باشتقاقات دالة المنفعة الغير مباشرة وكذلك القيمة المثل لمضروب لاقترانج (وهى المنفعة الحدية للدخل) وتميؤض المعادلة (١٣-٣) فى اخر معادلة من معادلات (٩-٣) نحصل على :

$$q_i = \frac{g_i}{\sum_{j=1}^n v_j g_j} \quad j = 1, \dots, n \quad ; \quad \lambda = -\sum_{j=1}^n v_j g_j$$

وهذه تعطىنا نموذجاً بديلاً لمعادلة روى

والان افترض مسألة تتطلب الحصول على الحد الامثل بحيث ان المطلوب هو ايجاد الحد الأدنى لمعادلة (١١-٣) تحت شرط معادلة (١٢-٣) على ان تكون الاسعار الاعتيادية كمغيرات والكميات متغيرة القيمة ولذلك تكون الدالة ^(٢) :

$$Z = g(v_1, \dots, v_n) + \mu \left(\sum_{i=1}^n v_i q_i - 1 \right)$$

(١) ارجع الجزء A-2 فى اخر الكتاب للتعريف على هذه القاعدة .
(٢) يمكن لقارى ان يتحقق من ان مضروب لاقترانج فى هذه الحالة يكون موجبا .

وبوضع اشتقاقها مساوية للصفر نحصل على :

$$\frac{\partial Z}{\partial v_i} = g_i - \mu q_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

(١٤-٣)

$$\frac{\partial Z}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n v_i q_i - 1 = 0$$

ونحصل على معكوس دوال الطلب "Inverse demand functions" بحل معادلة (١٤-٣) من اجل الاسعار بدلالة الكميات على النحو التالي :

(١٥-٣)

$$v_i = V_i(q_1, \dots, q_n)$$

واخيرا ، نعرف دالة المنفعة المباشرة $h(q_1, \dots, q_n)$ كالآتي :

$$(١٦-٣) \quad U = g[V_1(q_1, \dots, q_n), \dots, V_n(q_1, \dots, q_n)] = h(q_1, \dots, q_n)$$

وهذا يعطى موازنة للصالة المباشرة والتي فيها كانت الكميات متغيره والاسعار لها قيم متغيره .

Duality Theorems

نظريات الازدواجية :

يمكن وصف العلاقات بين دوال المنفعة المباشرة والغير مباشرة بمجموعة من النظريات الازدواجية ونعطي هنا بعض النظريات التوضيحية بدون اثبات .
النظرية الاولى : افترض ان f تمثل دالة محدودة تزايديه شبه - مقعرة بانضباط متشبهه مع الافتراض الداخلي^(١) interior assumption والداله g التي تقررت بالمعادلة (١١-٣) هي دالة محدوده تناقصيه شبه - محدبه^(٢) بانضباط بالنسبه للاسعار الموجبه .

النظرية الثانيه : افترض ان g تمثل دالة محدوده تناقصيه شبه - محدبه بانضباط بالنسبه للاسعار الموجبه . فان الداله h التي تقررت بالمعادلة (١٦-٣) تكون دالة محدوده تزايديه شبه - مقعرة بانضباط منظم .

النظرية الثالثه : وعلى حسب الافتراضات السابقه فان :

$$h(q_1, \dots, q_n) = g[V_1(q_1, \dots, q_n), \dots, V_n(q_1, \dots, q_n)]$$

(١) ينص الافتراض الداخلي على ان متفعة اى مجموعة من السلع والتي بها ، كمية او اكثر مساويه للصفر تكون اقل من المنفعة لاي مجموعة من السلع والتي تكون كمياتها كلها موجبه .

(٢) تعرف الداله $g(v)$ بحيث ان v تمثل كمية متجهية vector لها n من الحدود بانها شبه - محدبه اذا كان :
• $g(\lambda v^{(1)} + (1-\lambda)v^{(2)}) < \max[g(v^{(1)}), g(v^{(2)})]$

لجميع $0 < \lambda < 1$ وكذلك لجميع ازواج النقاط $v^{(1)}, v^{(2)}$ ضمن مجال الداله.

وكذلك

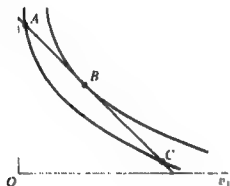
$$g(v_1, \dots, v_n) = h[D_1(v_1, \dots, v_n), \dots, D_n(v_1, \dots, v_n)]$$

فدالة المنفعة المباشرة والتي عرفت من طريق دالة المنفعة الغير مباشرة تكون بالضغط مثل دالة المنفعة المباشرة والتي هي نفسها التي عرفت دالة المنفعة الغير مباشرة .

ولقد شقت الازدواجية في الاستهلاك الطريق الى ارتباط وثيق بين الطلب ودوال المنفعة من اجل عمل دراسات تطبيقية على الطلب، وأنه يمكن في بعض الاحيان التخطي من دوال الطلب الى دالة المنفعة الغير مباشرة باستخدام محايدة روى، ومن ثم الى دالة المنفعة المباشرة المطابقة، ويمكن ايضا الاستعانة بالازدواجية في التحاليل المقارنة الساكنة، ونجد ايضا نظائر لدالة المنفعة الغير مباشرة في خواص التالف وقابلية الانفصال وقابلية الجمع ولهذا فانه من الممكن القيام بتحليل نظرية عديده بدلالة دالة المنفعة المباشرة او الغير مباشرة وحسب ايها اسهل .

مثال : افترض المثال المعطى لدالة المنفعة الغير مباشرة $g = u - v_1^2 v_2$ حيث ان منحنيات السواء* الشبه - محدب معطاء على الشكل (١-٣) والتي تشبه الى حد كبير منحنيات الشبه - مقعرة والمعطاة على الشكل (١-٢) السابق وعلى كل حال فنان منحنيات السواء* تكون محدبة في كلا الحالتين وبالرغم من هذا فانه يوجد فرق رئيسي بينهما . ففي شكل (١-٣) تزداد المنفعة كلما تحرك المستهلك تجاه نقطة الاصل وان جميع النقاط الداخلية للخط AC تعطي مستويات للمنفعة أقل من المستويات والتي تعطيها النقطتين والفرق بين شبه -

١٢



شكل (١-٣)

المقعر وشبه المحدب هو نفس الاتجاه الذي تزداد فيه المنفعة وليس نفس شكل منحنيات السواء* . ونقطة B تعطي الحد الأدنى للمنفعة تحت شرط ميزانية المستهلك والمصورة في الشكل (١-٣) . ويمكن الحصول على منحنيات الطلب لهذا المثال باستخدام المعادلة (١٣-٣) كما يلي :

$$(١٧-٣) \quad q_1 = \frac{2}{3v_1} \quad q_2 = \frac{1}{3v_2}$$

وبعملية الحصول على الحد الأدنى لدالة معينه يمكن للقارئ ان يتحقق من ان معكوس

دوال الطلب تكون كالتالى :

$$v_1 = \frac{2}{3q_1} \quad v_2 = \frac{1}{3q_2}$$

وكذلك نجد أن دالة المنفعة المباشرة المطابقة هي :

(١٨-٣)

$$U = a - \left(\frac{2}{3q_1} \right)^2 \frac{1}{3q_2} = a - \frac{4}{27q_1^2 q_2}$$

وهذه دالة تزايدية شبه - مقعرة بانضباط .

ولقد لوحظ في الاطلة الماضية ان دالة المنفعة $U^* = q_1^2 q_2$ تولد دوال الطلب المعطاه في (١٧-٣) وطيه فان المعادله (١٨-٣) لابد وان تكون تحويليه تزايديه مطرده لهذه الداله والتحويليه في هذه الحاله هي :

$$U = a + \frac{4}{27} \left(-\frac{1}{U^*} \right)$$

واخير نلاحظ ان :

$$U = a - \frac{4}{27(2/3v_1)^2(1/3v_2)} = a - v_1^2 v_2$$

والتي تقرر الازدواجيه .

Utility-Expenditure Duality

ازدواجية المنصرفات والمنفعة :

لنفترض ان المطلوب هو الحصول على الحد الادنى للمنصرفات والتي هي من الضروري للحصول على مستوى معين من المنفعة فمتى ما نتحصل عن طريق الحل على q_i فاننا نتحصل على دوال الطلب التعويضي (راجع الجزء ٢-٣) فاذا عوضنا في $\sum_{i=1}^n p_i q_i$ بحلول q_i فاننا سوف نحصل على دالة المنصرفات $E(p_1, \dots, p_n, U^*)$ والتي تعطى الحد الادنى للمنصرفات والضروريه للحصول على مستوى معين من المنفعة ومن السهوله اثبات ان E تكون دالة متجانسه بدرجة واحد بالنسبة للاسعار وانها متزايديه باطراد بالنسبه لـ U^* ويمكن ايضا اثبات ان دالة المنصرفات ، والمطابقة لدالة المنفعة شبه - المقعرة بانضباط منتظم والتي لا تقبل اى تشبع ، تكون مقعرة بالنسبة للاسعار . واخيرا فان سلمة شيفارد Shephard's lemma تنص على ان الاشتقاقات الجزئيه للداله E بالنسبه للسعر في المرتبه i i th price هو داله الطلب التعويضي في المرتبه ويمكن اثبات هذه السلمه كالتالى ارمز لداله الطلب التعويضي في المرتبه i بالداله

$$q_i = q_i(p_1, \dots, p_n, U^*)$$

$$E(p_1, \dots, p_n, U^*) = \sum_{i=1}^n p_i q_i(p_1, \dots, p_n, U^*) \quad \text{فاذا}$$

$$\frac{\partial E}{\partial p_i} = q_i(p_1, \dots, p_n, U^*) + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial q_j(p_1, \dots, p_n, U^*)}{\partial p_i} \quad \text{وان}$$

ولكن الحصول على دوال الطلب التصيفية يتم من طريق الحصول على الحد الأدنى للمنصرفة لمستوى معطى من المنفعة وهو U^0 وعلى ذلك ، فإن التغير فى مجموع المنصرفة ، والناتج من تغير بسيط فى الاسعار ، يكون صفرا والثالى فان الحد الثانى من المعادله السابقه يكون صفرا وان

$$\partial E / \partial p_i = q_i(p_1, \dots, p_n, U^0).$$

مثال : فى المثال السابق توصلنا الى المعادلات (١٧-٣) و (١٨-٣) والتي سوف تعطينا هنا دوال الطلب التصيفية التالية :

$$q_1 = \frac{2^{1/3} p_1^{1/3} (U^0)^{1/3}}{p_1^{1/3}} \quad q_2 = \frac{p_2^{1/3} (U^0)^{1/3}}{2^{2/3} p_2^{1/3}}$$

ونحمل كذلك على دالة المنصرفة التالى :

$$E = p_1^{1/3} p_2^{1/3} (U^0)^{1/3} (2^{1/3} + 2^{-2/3})$$

ويمكن تحقيق مسلة شيفارد بسهولة بتفاضل E جزئيا بالنسبه p_2 ، p_1 على التوالى .

أن الازدواجيه بين دوال المنفعة والمنصرفة تكون مطابقة تماما للازدواجيه بين دوال التكلفة cost functions ودوال production functions وللحصول على شرح كامل راجع الجزء ٤-٥ .

٣ - ٥ نظرية الأفضلية الموضحة :

THE THEORY OF REVEALED PREFERENCE

لقد افترضنا فى الأجزاء السابقة ان المستهلك يمتلك دالة المنفعة ولكن نظرية الأفضلية الموضحة تسمح بالتنبؤ بسلوك المستهلك بدون مواصفات لدالة المنفعة واضحة عليه بشرط انها تتناع لبعض البدئيات البسيطة . بالاضافه الى ان وجود وطبيعية دالة المنفعة للمستهلك يمكن استنتاجها فى اختبارات المستهلك الملحوظة بين مختلف مجموعات السلع .

لنفترض انه يوجد عدد n من السلع وان مجموعة محددة من اسعار $p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0$ نرمز لها بالرمز p^0 وان الكميات المطابقة والتي اشتراها المستهلك يرمز لها بالرمز q^0 ولهذا فإن مجموع منصرفة المستهلك هى $p^0 q^0$ ونعرفها بانها المجموع $\sum_{i=1}^n p_i^0 q_i^0$ افترض وجود مجموعة من السلع البديلة q^1 والتي كان من الممكن للمستهلك شراؤها ولكنه لم يفعل وطيه فان التكلفة الاجمالية للسلع البديلة q^1 بسعر p^0 يجب ان لايتعدى التكلفة الاجمالية للسلع q^0 معنى أن :

$$p^0 q^1 \leq p^0 q^0 \quad (١٩-٣)$$

وبما ان q^0 تكون على الأقل ، بخلاف q^1 وبما ان المستهلك رفض اختيار q^1 فإن مجموعة السلع q^0 تكون "واضحة" وانها مفضلة على q^1 .

البديهية الضعيفة للأفضلية الموضحة : Weak Axiom of Revealed Preference

إذا افترضنا ان مجموعة السلع q^0 تكون مفضلة على مجموعة السلع q^1 فإن المجموعة الأخيرة q^0 لا تكون واضحة أبداً انها مفضلة على q^1 .

والطريقة الوحيدة التي بها يتضح لنا ان q^1 مفضلة على q^0 هي ان يكون المستهلك قد قام بشراء q^1 تحت ظروف اسعار معينة بحيث انه أيضاً يستطيع ان يشتري q^0 . وبعبارة أخرى ، نقول q^1 تكون "واضحة" انها مفضلة على q^0 إذا كان :

$$p^1 q^0 \leq p^1 q^1 \quad (20-3)$$

ولكن البديهية تنص على ان المعادلة (20-3) لا يمكن لها أبداً ان تتحقق إذا تحققت المعادلة (19-3) تتطلب عكس ما تتطلبه المعادلة (20-3) أو أن :

$$p^0 q^1 \leq p^0 q^0 \quad \text{تتطلب} \quad p^1 q^0 > p^1 q^1 \quad (21-3)$$

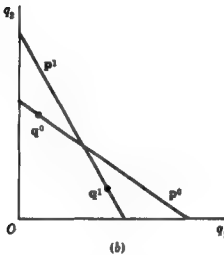
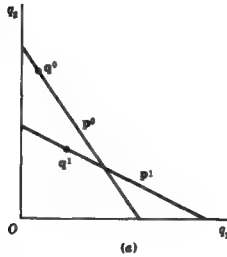
البديهية القوية للأفضلية الموضحة : Strong Axiom of Revealed Preference

إذا وجدنا ان q^0 مفضلة بوضوح على q^1 وهي بدورها مفضلة بوضوح على q^2 وهكذا حتى نصل إلى q^n والتي يجب أن لا تكون مفضلة بوضوح على q^0 وهذه البديهية تضمن خاصية التمدد transitivity للأفضلية الموضحة ولكنها أقوى شرط التمدد العادي .

لقد رفضنا في بداية هذا الباب الطريقة القياسية لنظرية المنفعة على أنه لا يوجد أي سبب لافتراض أن المستهلك يمتلك مقياس لقياس المنفعة الناتجة من الاستهلاك ولكن بنفس المنطق يستطيع أي شخص ان يتساءل عما إذا كان للمستهلك منحنيات "سواء" ولكن لحسن الحظ يمكن اثبات (1) أن المستهلك الذي يتقيد بالبديهيات السابقة لابد وأن يكون له منحنيات "سواء" والتي يمكن رسمها بدرجة عالية من الدقة بمواجهة المستهلك بمجموعات مختارة من أسعار مختلفة ومن ثم يلاحظ مشترواته فإذا لم يتقيد المستهلك بالبديهيات فيطلق عليه لقب "غير منطقي" "irrational" وفي هذه الحالة لا يكون للمستهلك منحنيات "سواء" لتصرفه الغير منطقي ولا يمكن تقدير شكل دالة المنفعة من طريق

(1) اثبات هذه النظرية صعب، ولن نذكره هنا ولكن للقارئ مراجعة مقالة هوتاكر تحت عنوان "الأفضلية الموضحة ودالة المنفعة" في دورية *Economica* مجلد (17) شهر مايو 1950 م على صفحات 159-174 .

مراقبة مشترياته وتصرفاته •



شكل (٣ - ٢)

ولشرح معنى البديهة الضعيفة في حالة وجود سلعتين نلجأ الى الشكل (٢-٣) .
 افترض ان المستهلك يشتري مجموعة من السلع p^0 عندما تكون الاسعار معطاه بالخطوط
 العرموز لها بالرمز q^0 إنه كذلك سوف يقوم بشرا' الكمية p^1 عندما تكون الاسعار مثله
 بالخطوط q^1 وفي كلا الحالتين على الشكل (٢-٣) كان من الممكن للمستهلك شرا' q^1
 عندما كانت الاسعار p^0 لأن q^1 تقع تحت الخط p^0 وباعطا' المستهلك هذه الاختبارات
 من الكميات حسب الاسعار المعطاه ، فان البديهة الضعيفة تنص على ان q^0 غير ممكن
 الحصول عليها اذا قام المستهلك بشرا' q^1 بمعنى أن q^0 لا بد وان تكون فوق الخط p^1
 والشكل (٢-٣) يحقق البديهة الضعيفة ولكن الشكل (٢-٢) يناقضها حيث انه
 في هذه الحالة (حالة الشكل (٢-٣) ب) لا يمكن الحصول على منحنيات سوا' معد به
 بحيث أن المنحنيات يكون ملاصقا للخط p^0 عند q^1 .

The Substitution Effect

نتيجة التعويض :

انه من الممكن باستخدام نظرية الافضية الواضحة اثبات ان نتيجة التعويض تكون سالبة^(١) افترض الان ان المستهلك قد اجبر على التحرك على سطح من سطوح السوا* فى حالة من الابعاد n dimensions فعندما تكون الاسعار معطاه بالخطوط p^0 فان المستهلك يشتري المجموعة q^0 بدلا من المجموعة q^1 والتي تقع على نفس سطح السوا* وبما ان المستهلك لا يفرق بين q^0 و q^1 وفى نفس الوقت يشتري q^0 فهذا يقيده بان المجموعة الاخيرة يجب ان تكون اكثر غلا* من الاولى بحيث ان :

$$p^0 q^0 \leq p^0 q^1 \quad (٢٢-٣)$$

فالمجموعة q^1 اشترت عندما كانت الاسعار p^1 وعليه فان هذا يتطلب بان q^0 يجب ان لا تكون ارخص من q^1 وعندما تكون الاسعار p^1 بمعنى ان :

$$p^1 q^1 \leq p^1 q^0 \quad (٢٣-٣)$$

وبتحريك الحدود فى المعادلتين (٢٢-٣ و ٢٣-٣) الى الجانب الايسر (٢) نحصل على :

$$p^0 q^0 - p^0 q^1 = p^0 (q^0 - q^1) = -p^0 (q^1 - q^0) \leq 0 \quad (٢٤-٣)$$

$$p^1 q^1 - p^1 q^0 = p^1 (q^1 - q^0) \leq 0 \quad (٢٥-٣)$$

وبإضافة (٢٤-٣) و (٢٥-٣) نحصل على :

$$-p^0 (q^1 - q^0) + p^1 (q^1 - q^0) = (p^1 - p^0)(q^1 - q^0) \leq 0 \quad (٢٦-٣)$$

وهذه اللامساوية inequality تؤكد بان مجموع التغيرات فى الكميات مضروباً فى المتغيرات العاكلة فى الاسعار لا يكون موجبا اذا تحرك المستهلك على منحنى السوا* المعطى . فاذا افترضنا الان ان اسعار المجموعة الاولى فقط من السلع قد تغيرت وان جميع الاسعار الاخرى بقيت ثابتة ، فان المعادلة (٢٦-٣) تصبح

$$(p^1 - p^0)(q^1 - q^0) < 0 \quad (٢٧-٣)$$

وفى هذه الحالة فان اللامساوية (وخصوصا فى هذه الحالة حيث انه لا يدخل عنصر المساواة مع عدم المساواة) فى (٢٧-٣) يجب وان تتحقق بسبب الافتراض بان التغير

(١) وهذه فقط واحدة من عدة نظريات كان من الممكن استنباطها من هذه النظرية وعلى سبيل المثال لالعصر (١) دوال الطلب المتجانسة من الدرجة صفر بالنسبة للأسعار والدخول (راجع الجزء ٣-٢) (٢) المساواة فى حالة نتائج التعويض المتداخلة (راجع الجزء ٢-٥) .
لنزيد من المعلومات عن هذه المواضيع راجع كتاب بول سامولسن : اسس التحليل الاقتصادى " على الصفحات ١١١-١١٢ وكذلك راجع كتاب هيكرز "مراجعة لنظريات الطلب على الصفحه ١٢٧ .

(٢) الحد $q^0 - q^1$ يرمز الى عدد من الفروقات بحيث ان $q_2^0 - q_2^1, \dots, q_n^0 - q_n^1$.

فى الاسعار لا يكون مساويا للصفر وأن q_i و q_j يمثلان كميتان مميزتان distinct بمعنى ان السعر فى هذه الحالة يمثل دالة طلب ذات قيمة فردية فاذا ازداد السعر فسان الكمية المشتراة سوف تنقص والعكس صحيح وهذا يثبت سلبية نتيجة التعويض .

٣ - ٦ السلع المركبة : COMPOSITE COMMODITIES

تمس نظرية السلعة المركبة على انه اذا كانت اسعار مجموعة عدد m من السلع (بحيث ان $n < m$) دالة التغير بنفس النسبة .

وفى قضا " السلع ذو الابعاد n فان الطلب الاجمالى aggregate demand للسلع وعددها m سلعة يعتبر فى تصرفه كما لو كان لسلعة واحدة .

وهذه النظرية ^(١) تسمح بتبسيطات عديدة فى مجالات عدة من خلال التخليق فى عدد السلع تحت الدراسة .

مثال : فى حالة وجود سلعتين بحيث ان سعر واحدة منهما فقط هو الذى يتغير بينما سعر السلعة الاخرى يبقى ثابتا يمكن ان يمثل حالة وجود n من السلع بحيث ان سعر واحدة من هذه السلع فقط هو الذى يتغير .

ويمكن الحصول على نمط بديل لمعادلة سلتزكى (وهى المعادلة ٢٧-٢) بضرب طرفى المعادلة فى $p_i p_i$ لنحصل على :

$$(28-3) \quad p_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial p_i} = p_i p_i S_{ij} - p_i p_i q_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial y} \right)_{j=1, \dots, n}$$

$$\text{لأن :} \quad p_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial p_i} = p_i q_i \left(\frac{p_i}{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial p_i} \right) = p_i q_i \varepsilon_{ij}$$

بحيث ان ε_{ij} تمثل مرونة الطلب للسلعة q_i بالنسبة للسعر p_i بينما يمثل الجانب الايسر للمعادلة (٢٨-٣) لقيمة التغير فى الطلب للسلعة i نتيجة للتغير النسبى المعطى فى السعر p_i .

ولنفترض ان اسعار جميع السلع فى المجموعة المركبة من السلع ترتفع بنفس النسبة ، وفى هذه الحالة يمكن الحصول على قيمة زيادة الطلب بتجميع summing معادله (٢٨-٣)

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i p_i S_{ij} - \sum_{i=1}^m p_i q_i \sum_{j=1}^n p_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial y} \right)$$

وهذه المعادلة تأخذ نفس نمط المعادلة (٢٨-٣) ويمكن اثبات ان حد التعويض فى المعادلة (٢٩-٣) يكون سالبا ومن شروط شبه - التفرع المنضبط المعطاه فى الجزأ فى نهاية الكتاب ^(٢) نحصل على :

(١) تتبع هذه المناقشة كتاب هيكر " القيمة ورأس المال " على الصفحات ٣١٢-٣١٣
(٢) راجع كتاب هيكر المشار اليه سابقا .

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n k_i k_j \frac{\partial u}{\partial x_i} < 0$$

لجميع قيم k_i و k_j التي لا تساوي صفرا بحيث أن \mathcal{Q} تمثل محددة هيسيان المناسبة لهذه الحالة ، وان \mathcal{Q}_i تمثل العوامل المرافقة لهذه المحددة فإذا افترضنا ان $k_i = p_i$ وأن $k_j = \lambda p_j$ مع العلم بأن $S_{ij} = \mathcal{Q}_{ij} / \mathcal{Q}$.

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_i p_j S_{ij} < 0$$

والتي تثبت ان حد التعويض في المعادلة (٢٩-٣) يكون سالبا .
من المعادلة (٢٩-٢) حيث ان : $\sum_{i=1}^n p_i S_{ij} = 0$ نجد أن :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=n+1}^n p_i p_j S_{ij} > 0$$

نجد أن اجمالي السلع (ومن الممكن ان يكون هناك سلعة واحدة فقط) خارج مجموعة السلع المركبة يتصرف على اساس انها سلع تبادل له substitute اذا اطينا تغيرات نسبية لاسعار السلعة المركبة .

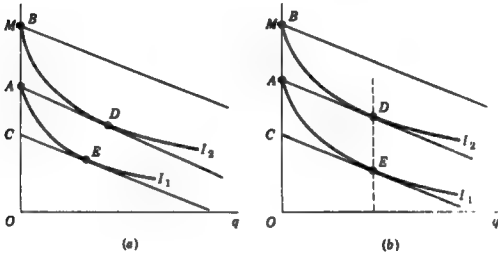
٣ - ٧ فائض المستهلك : CONSUMER'S SURPLUS

وان المستهلك عادة يدفع قيمة اقل من اجل سلعة عن القيمة الاكثر والتي من الغروض ان يدفع بدلا من التخلي عن استهلاكها ولقد اقترح مقاييس عدة لقياس مثل هذا الفائض للمستهلك ونستعرض ، هنا ثلاثة منها والتركيز هنا محدد على اعتبار السلعة تحت البحث وسلعة اخرى مركبة تسمى " النقود " على اعتبار ان الكميات المستهلكة تمثل التقنية والكمية M على التوالي . فاذا افترضنا ان الصافي OA في السطر (٣-١٣) تمثل دخل المستهلك ، فانه يحقق حل عند التماس عند نقطة D على منحنى السوا I_2 اما اذا لم يستطع المستهلك ان يستهلك الكمية Q فانه سوف يكون عند نقطة A على منحنى السوا I_1 الأدنى وسوف يحتاج الى زيادة في الدخل مقدارها AB من الريالات للمحافظة على مستوى الاستهلاك في نطاق منحنى السوا I_2 بدلا من I_1 .

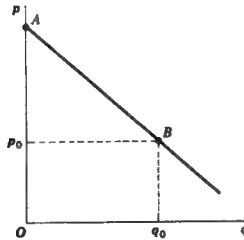
ونرمز لهذه الزيادة والتي تسمى تغير (او اختلاف) الدخل التعويضي $\text{compensating income variation}$ بالحرف c والتي تعدنا بمقياس لفائض المستهلك .

فالمستهلك على استعداد للتنازل عن مبلغ وقدره AC من الريالات من دخله عن ان يفقد الفرصة لاستهلاك السلعة Q حسب الاسعار المعطاة . فاستهلاك المستهلك

يكون عند النقطة E عندما يكون دخله OC والتي هي على نفس منحنى السواء مثل A ونرمز للكمية المطابقة للمصافه AC والتي تسمى تغير (او اختلاف) الدخل الكافى *equivalent income variation* بالرمز e والتي تعدنا بمقياس بديل لفائض المستهلك .
 والمقياس الثالث نتحصل عليه عن طريق منحنى الطلب فى الشكل (٣ - ٤) لمجموعه السعر والكميه المعطاه بالمقدار p_0q_0 وهى تساوى المساحه ABp_0 والتي تمثل الفرق بين المساحه الواقعه تحت منحنى الطلب $(OABq_0)$ ومصرفات المستهلك (Op_0Bq_0) والتي نرمز لها بالرمز s .



شكل (٣ - ٣)



شكل (٣ - ٤)

ومن الممكن اثبات ان $c \geq s \geq e$ ^(١) فاللامتساويات (بدون علامة التساوي معهما) تتحقق في الحالة المعروضة في الشكل (١٣-٣) بسبب نتيجة الدخل income effect (راجع الجزء ٢-٥) فإذا كان المستهلك ان يدفع أكثر لاستهلاك سلعة ما فان الطلب على هذه السلعة من قبل المستهلك سوف ينخفض بسبب انخفاض دخلها الفعلي وسوف تزيد المساحة تحت منحنى الطلب من الكمية التي سوف يدفعها المستهلك عن انه يتنازل عن استهلاك هذه السلعة ^(٢) فشكل (٣-٣ ب) يصور الحالة التي يكون فيها نتيجة الدخل مساوية للصفر في كل الاحوال . فالخط العمودي المار بنقطتي D و E يوصل النقاط التي لها نفس RCS ومنحنيات السواء تكون متوازنة مع الاحتفاظ بمساواة عمودية ثابتة بين كل زوج من منحنيات السواء وفي هذه الحالة يكون $AB = AC$ ، وتكون الثلاثة مقاييس لفائض المستهلك متساوية .

ومن الممكن استخدام نظرية الازدواج Duality theory (راجع الجزء ٤-٣) للحصول على علاوة في فائض المستهلك عندما تتغير اسعار السلعة فإذا افترضنا ان اسعار عدد n من السلع هي p_1^0, \dots, p_n^0 افترضنا كذلك ان y^0 تمثل دخل المستهلك فان دالة المنفعة الغير مباشرة تكون $U^0 = U(p_1^0, \dots, p_n^0)$ حيث ان $y^0 = p_1^0 y_1^0$ وان $i = 1, \dots, n$ ، وان دالة المنصرفات تكون

$$E(p_1^0, \dots, p_n^0, U^0) = y^0$$

فإذا تغير p_1 الى p_1 فان $E(p_1, p_2^0, \dots, p_n^0, U^0) = y^0 + c$ حيث ان c تمثل الاختلاف التكميلي وان :

$$c = E(p_1, p_2^0, \dots, p_n^0, U^0) - E(p_1^0, \dots, p_n^0, U^0)$$

فإذا عرفنا $p_1 = p_1^0 + \Delta p_1$ واستخدما تعريف الاشتقاق الجزئي، فان :

$$c = \frac{\partial E(p_1^0 + \theta \Delta p_1, p_2^0, \dots, p_n^0, U^0)}{\partial p_1} \Delta p_1$$

لبعض قيم $0 < \theta < 1$ ومن متطوق نظرية شيفارد التمهيدية Shephard's lemma فان الاشتقاق الجزئي $\partial E / \partial p_1$ يكون هو دالة الطلب التكميلية $q_1(p_1^0 + \theta \Delta p_1, p_2^0, \dots, p_n^0, U^0)$ ويتبع من متطوق نظرية متوسط القيمة للتكامل mean value theorem راجع الجزء

$$(A-4) \quad c = \int_{p_1^0}^{p_1} q_1(p_1, \dots, p_n^0, U^0) dp_1 \quad (3-3)$$

وبهذا يمكن تعريف قيمة علاوة فائض المستهلك بالمساحة بين السعيرين الواقعين على الجبهة اليسرى لدالة الطلب التكميلية (عليها ، نهمل الفرق بين دوال الطلب العادية والتكميلية) فالمساحة المطابقة في الشكل (٤-٣) هي $p_0 p_1 CB$ فإذا كانت p هي

(١) راجع مقاله ويليق Willig تحت عنوان " فائض المستهلك بدون اعتذار " *Consumer's Surplus without Apology*، والمشرورة في دوريه *American Economic Review* المجلد ٦٦ (شهر سبتمبر عام ١٩٧٦) صفحات ٥٨٩ - ٥٩٧ .
(٢) سوف لا نعرض للسلع الأدنى inferior goods في هذه المناقشة .

السعر الذي يكون الطلب عنده يساوى صفرا فان علاوة الفائض (والمعطه في المعادله ٣-٢) تنطبق على المثلث ABp_0 والذي يمكن اعادة كتابته كما يلي :

$$c = \int_0^{q_0} \psi(q) dq - p_0 q_0$$

بحيث ان $\psi(q)$ تمثل معكوس دالة الطلب ، وان q_0 تمثل الكمية المطلوبة عندما يكون السعر p_0 .

مثال : افترض ان دالة المنفعة هي $U = q^{0.5} + 2M$. فالتقاربي يمكن ان يتحقق من ان منحني الطلب هو $q = 1/(16p)^2$ وان معكوس منحني الطلب هو $p = 1/(4\sqrt{q})$. فاذا كانت $p = 0.05$ وان $q = 25$ فان فائض المستهلك يكون :

$$s = \int_0^{25} \frac{1}{4\sqrt{q}} dq - pq = 2.50 - 1.25 = 1.25$$

ويتقسم نتيجة الدخل من المعادله (٢-٣) نحصل على

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{f_{12} - p f_{22}}{q}$$

حيث ان الرقم السلسلي (١) يمثل Q وان الرقم السلسلي ٢ يمثل النقود وان p يمثل سعر Q وبما ان الاشتقاقات الثانيه second derivatives لدالة المنفعة تكون مستقلة عن p فان نتيجة الدخل المساويه للصفر في كل مكان تتطلب ان يكون $f_{12} = f_{22} = 0$ في كل مكان . وبما ان دالة المنفعة تحقق ايضا شرط شبه - التفرع المنحبط في المعادله (٢-٥) فان $f_{11} < 0$ وهذا يعنى ان المنفعة الحديه marginal utility للسلمه Q تنسب انخفاض ويتبع من هذا ان دالة المنفعة يجب وان تكون قابله للجمع بشده strongly additive على النمط التالي :

$$U = f(q) + kM$$

حيث ان k تمثل المنفعة الحديه الثابتة للنقود constant marginal utility of money وفكرة مارشال Marshall عن المنفعة الحديه الثابتة للنقود تكون مطابقة الى الفكسوره الحديه من نتيجة الدخل الصغريه a zero-income effect وتكشف شروط الدرجة الاولى للحصول على الحد الاعلى للمنفعه من ان معكوس منحني الطلب المطابق للسلمه هو $p = f'(q)/k$ ولا يحتاج لتطبيق فائض المستهلك على اساس التطبيق الكلي او عده . فالتعالييل التي تستخدم فيها فكرة الزيادة " Increment تكون شائعه الاستخدام ، وفي الحقيقة فانها مهمة جدا لمعكوس دوال الطلب مثل $p = q^{-2}$ والتي لا تعرف عند $q = 0$.

مثال : افترض ان المستهلك اكتسب فائضا من انخفاض في الاسعار من p_0 الى p_1 مع زيادة في الكميات من q_0 الى q_1 فالتغير في فائض المستهلك يكون :

$$\Delta s = \int_{q_0}^{q_1} \psi(q) dq - (p_1 q_1 - p_0 q_0)$$

ناذا عرضنا من $q^{\text{ث}} = \psi(q)$ وأن $p_0 = 0.25$ وأن $p_1 = 0.20$ فإن القارى يستطيع ان يحقق بأن $\Delta s = 1$.

٣ - ٨ مسألة الاختيار في حالات المجازفة التى تتطوى على الخطر :

THE PROBLEM OF CHOICE IN SITUATIONS INVOLVING RISK

ان النظريات التقليدية التى تتعلق بسلوك المستهلك لا تأخذ بعين الاعتبار الحالات المتقلبة والغير ثابتة uncertain ولقد اثبت العالمان فون نيومان Von Neumann ومورجينستين Morgenstern أنه تحت ظروف معينة يمكن تكوين مجموعة من الارقام لشخص معين لاستخدامها للتنبأ برغباته فى الحالات الغير ثابتة والمتقلبة ولقد تركزت المناقشات العديدة حول نقطة ما اذا كان مؤشر المنفعة utility index ترتيبيا ام مقياسيا . وسوف نوضح ان مؤشرات المنفعة التى قام بها فون نيومان ومورجينستين لها بعض الخواص المقياسية .

فالتحليل السابق غير حقيقى لانها تفترض ان المستهلك يقوم بحركات يتبعها نتائج محددة مصمم عليها من قبل المستهلك ومعروفة عنده مسبقا وهذه هى النقطة التى تدعوه الى وصف هذه التحاليل بغير الحقيقة لانه على سبيل المثال ليس كل السيارات التى انتجت من نفس المصنع ونفس الموديل لها نفس الخواص والصفات ومن ملاحظة بعض الحوادث تبين ان بعض السيارات التى انتجت وبيعت لا تنطبق عليها المواصفات التى وضعها المصنع نفسه لانتاج هذه السيارات .

والمستهلك بالطبع لا يعرف مسبقا بهذا والا فانه سوف يرفض شراء أى سلعة ادنى من المستوى المطلوب . فاذا افترضنا ان A تمثل الحالة التى يعرف فيها المستهلك ان السيارة التى اشتراها مكتملة من جميع الجوانب وانها حسب رغبته وافترض ان B تمثل الحالة التى لا يملك فيها المستهلك سيارة وافترض ان C تمثل الحالة التى يملك فيها المستهلك سيارة ولكنها دون المطلوب فاذا افترضنا ان المستهلك يفصل الحالة A على الحالة B وكذلك الحالة B على الحالة C^(١) فاذا وضعنا امام المستهلك الاختيار البدلين الاتيين :

(١) المحافظة على البضع الراهن وعدم تملك سيارة ابدا فهذا الاختيار له نتيجة مؤكدة وهى ان النتيجة الحتمية المتوقعة هى الوحدة (أى انها تساوى واحد) .

(١) عدم حصول المستهلك على سيارة افضل من حصوله على سيارة لا تنطبق عليها شروط المصنع المنتج بسبب المشاكل والمضايقات والنفقات التى سوف يتحملها المستهلك فى سبيل المحافظة على هذه السيارة .

(٢) الحصول على ورقة يانصيب اما بالحصول على سيارة صالحة وتطبيق عليها كل المواصفات (وهذا هو البديل A او الحصول على سيارة لا تنطبق عليها كل المواصفات (وهذا هو البديل C) فالمستهلك في هذه الحالة يمكن له ان يفضل المحافظة على دخله (النقود) بدوّن التعرض لاي مخاطره ، او انه يفضل الحصول على ورقة اليانصيب وان يتحمل مسئولية النتيجة الغير مؤكدة او انه لا يفرق بين هذه الحالات فالقرار الاخير للمستهلك في اختيار ايا من البديلات يعتمد على فرص الربح او الخسارة بالنسبة لليانصيب .

فاذا كان احتمال البديل C عالي جدا فان المستهلك في هذه الحالة يمكن ان يفضل المحافظة على دخله بكل تأكيد ، اما اذا كان احتمال البديل A عالي جدا فانه من الممكن للمستهلك ان يفضل اليانصيب . فالارقام الثلاثية (P, A, B) تمثل يانصيب مقدما للنتيجة A باحتمال $0 < P < 1$ والنتيجة B باحتمال $1 - P$.

البدئيات : The Axioms

من الممكن ايجاد مؤشر للمنفعة يستخدم للتنبؤ باختيار المستهلك في الحالات الغير مؤكدة اذا التزم المستهلك بالبدئيات الخمس التالية :

بدئية الترتيب المتكامل : Complete-ordering axiom

للبديلان A و B واحد فقط من الاثنى لابد وان يتحقق بفضل المستهلك A على B او B على A او انه لا يفرق بينهما . وتقوم لهذه البدئيات بخفض لقاعدة التعدى transitive والتي تنص على اذا كان المستهلك يفضل A على B وانه كذلك يفضل B على C فاذا هو يفضل A على C .

بدئية الاتصال : Continuity axiom

افترض ان A مفضله على B وان B مفضله على C فالبدئيه تؤكد انه يوجد بعض الاحتمالات $0 < P < 1$ بحيث ان المستهلك لا يفرق بين ناتج B بالتاكيد وبين ورقه يانصيب (P, A, C) .

بدئية الاستقلال : Independence axiom

افترض ان المستهلك لا يفرق بين A و B وان C يكون اى ناتج outcome فاذا كانت وترته

يانصيب L_1 تعطى الفرصة للناتج B والناتج C باحتمال P ، $1-P$ بالترتيب وان ورقة يانصيب اخرى L_2 تعطى الفرصة للناتج B والناتج C بنفس الاحتمال $1-P, P$ فالمستهلك سوف لا يفرق بين ورقتي اليانصيب وبالمثل فاذا كان المستهلك يفضل A على B فانه سوف يفضل L_1 على L_2 .

Unequal-probability axiom : بدئية عدم تساوى الاحتمالات :

افترض ان المستهلك يفضل A على B فاذا وضعنا $L_1 = (P_1, A, B)$ ووضعنا $L_2 = (P_2, A, B)$ فان المستهلك سوف يفضل L_2 على L_1 اذا فقط اذا كان $P_2 > P_1$ if and only if .

Compound-lottery axiom : بدئية اليانصيب المركب :

افترض ان $L_1 = (P_1, A, B)$ و $L_2 = (P_2, L_3, L_4)$ بحيث ان $L_3 = (P_3, A, B)$ وان $L_4 = (P_4, A, B)$ يكونا يانصيب مركب وجوائز هبارة من تذكر اليانصيب . فنقول ان L_2 مكافئة لـ L_1 اذا كانت :

$$P_1 = P_2P_3 + (1-P_2)P_4.$$

فاذا اطينا L_2 فان احتمال الحصول على L_1 يكون P_2 وبالتالي فان احتمال الحصول على A من خلال L_2 يكون P_2P_1 وبفس الطريقة ، فان احتمال الحصول على L_4 يكون $(1-P_2)$ وان احتمال الحصول على A من خلال L_4 يكون $(1-P_2)P_4$ فاحتمال الحصول على A من خلال L_2 يكون مجموع الاحتمالين فالمستهلك يقيم اوراق اليانصيب بدلالة احتمالات الحصول على الجوائز ، وليس بدلالة عدد مرات تعرضه لفرص الفوز الالهية .

وهذه البدبيات تكون عمومية وانه من الصعب معارضتها على اساس انها تضع قيود غير معقولة على سلوك المستهلك وعلى كل حال ، فانها تلغى بعض انواع من سلوك المستهلك المقبوله . افترض وجود شخص ما بحيث انه يحقق منفعة من قيامه بعمليات المراهنة gambling لفرض المراهنة فقط لاغير لذلك فانه من المحتمل عدم وجود $P = 0$ و $P = 1$ لمثل هذا الانسان ، بحيث انه لا يفرق بين الناتج B بالتاكيد وناتج اخرى غير مؤكده مكونه من A و C وعلى هذا فان هذا الشخص يفضل دائما ان يراهن . فاذا كان الشخص يخشى من المراهنة فانه يفضل دائما الشئ الاكيد على الشئ الغير اكيد . ولكن هذا النوع من السلوك ، الذى بسبب وجود بدبيهية الاتصال وكذلك بدبيهية اليانصيب المركب .

ولقد وضعت البديهيات السابقة لتغطي الحالات التي يوجد فيها ناتجان فقط ولكن اذا افترضنا ان بديهيات التزاوج pair-wise axioms تتحقق فان التحاليل السابقة يمكن امتدادها بسهولة لتغطي اى عدد من النتائج outcomes فاذا افترضنا ان :

$$L = (P_1, \dots, P_n, A_1, \dots, A_n)$$

ترمز الى اليانصيب الذى له n من النتائج بحيث ان $0 < P_i < 1$ تمثل احتمال الناتج A_i وكذلك $\sum_{i=1}^n P_i = 1$.

المنفعة المتوقعة : Expected Utility

افترض وجود مؤشر للمنفعة بحيث انه يتقيد بالديهيات الخمس السابقة فان المنفعة المتوقعة لليانصيب $L = (P, A, B)$ الذى يحتوى على ناتجين، فقط تكون :

$$E[U(L)] = PU(A) + (1 - P)U(B) \quad (3-3)$$

فاذا افترضنا اليانصيب $L_1 = (P_1, A_1, A_2)$ واليانصيب $L_2 = (P_2, A_3, A_4)$ فان نظريته المنفعة المتوقعة تنص على انه اذا كانت L_1 مفضلة على L_2 فان $E[U(L_1)] > E[U(L_2)]$ وان اهمية هذه النظرية هو ان الحالات الغير مؤكده يمكن تحليلها عن طريق الحصول على الحد الاعلى للمنفعة المتوقعة maximization of expected utility .

واثبتت هذه النظرية غير معقد وبسيط فاذا اخترنا نتائج بحيث ان B وهى الافضل والاحسن ، تكون مفضلة على جميع النتائج الاخرى المعروضة وان W وهى الاسو تكون ادنى من جميع النتائج الاخرى المعروضة ، فانه باستخدام بديهية الاتصال نجد انه يوجد Q_i بحيث انه لا فرق بين A_i وكذلك (Q_i, B, W) ($i = 1, \dots, 4$) . وعليه فان L_1 و L_2 يكونا مطابقين (بمعنى ان لهما نفس المنفعة المتوقعة) لليانصيبين (Z_1, B, W) وكذلك (Z_2, B, W) على الترتيب بحيث ان $Z_1 = P_1 Q_1 + (1 - P_1) Q_2$ وكذلك $Z_2 = P_2 Q_3 + (1 - P_2) Q_4$ ولكن بالافتراض فان L_1 تكون مفضلة على L_2 وبالتالي فانه باستخدام بديهية تساوى الاحتمالات $Z_1 > Z_2$ وبما ان الاصل ووحدة القياس اختيرتا اعتباطا لمؤشرات المنفعة فاننا نفترض ان $U(B) = 1$ وان $U(W) = 0$ ولان فان $E[U(L_1)] = Z_1$ وان $E[U(L_2)] = Z_2$ وبهذا ثبتت النظرية . وحيث اننا اثبتنا فى الجز' ٢-٢ ان اى تحويله مطرد monotonic موجب لدالة المنفعة تترك الترتيب لبعض النتائج المؤكده بدون تغيير ولكن هذه النتيجة لا تتحقق للترتيب فى حالة النتائج الغير مؤكده بالنسبة للمنفعة المتوقعة .

مثال : نفترض ارقام المنفعة التالية :

$$U(A_1) = 25 \quad U(A_2) = 64 \quad U(A_3) = 36 \quad U(A_4) = 49$$

افترض، ايضا ان اليانصيب $L_1 = (0.5, A_1, A_2)$ يكون مفضلا على اليانصيب $L_2 = (0.4, A_1, A_4)$ لان $E[U(L_1)] = 44.5 > E[U(L_2)] = 43.8$.

فاذا قمنا بعمل التحويله الفردية $U \rightarrow V$ فانه الان L_2 تكون مفضله على L_1 لان $E[V(L_1)] = 6.5 < E[V(L_2)] = 6.6$.

ان ترتيبات المنفعة المتوقعة غير قابله للتغيير اذا استخدمنا تحويلات خطيه متزايدة increasing linear transformations. فاذا افترضنا ان $L_1 = (P_1, A_1, B_1)$ تكون مفضله على $L_2 = (P_2, A_2, B_2)$ بحيث ان :

$$E[U(L_1)] = P_1 U(A_1) + (1 - P_1) U(B_1) > P_2 U(A_2) + (1 - P_2) U(B_2) = E[U(L_2)]$$

فاذا افترضنا الان ان $V = a + bU$ بحيث ان a و b ثابتان وان $b > 0$ فان الصنفه المتوقعة لـ L_1 للمؤشر V تكون هي التحويله الخطيه للنفعة المتوقعة للمؤشر U بحيث ان :

$$P_1[a + bU(A_1)] + (1 - P_1)[a + bU(B_1)] = a + bE[U(L_1)]$$

ومن الواضح ان : $a + bE[U(L_1)] > a + bE[U(L_2)]$

وهذا يحقق قابليه عدم التغير تحت استخدام التحويله الخطيه .

ومن الممكن استخدام معادله المنفعة المتوقعة لينا ارقام للنفعة للمستهلك الذى يعتد بديهيات فون نيومان وموجنستيرن فاذا وضعنا اعتبارا ارقاما لثلاثين مؤكدا هـما A_1 و A_2 فانه على سبيل المثال ، اذا كانت A_2 مفضله على A_1 وانه اذا كانت $U(A_1) = 20$ وان $U(A_2) = 1000$ وان A_3 هي ايضا احدى النتائج فانه اذا كانت A_3 تقع بين A_1 و A_2 فى ترتيب الافضلويات preference ranking فاننا نسأل المستهلك ان يضع قيمة للاحتمال P بحيث انه لا يفرق بين A_3 وبين (P, A_1, A_2) فاذا كان $P = 0.8$ فاننا نحصل الى حـل المسأله الاتيه :

$$U(A_3) = 0.8U(A_1) + 0.2U(A_2) = 216$$

فاذا كانت A_4 مفضله على جميع البدائل الثلاث السابقه فان منفعتها يمكن الحصول عليها بسؤال المستهلك بان يضع قيمة للاحتمال P بحيث انه لا يفرق بين A_4 وبين (P, A_1, A_4) فاذا كان $P = 0.6$ فاننا نصل الى حل المسأله الاتيه :

$$1000 = (0.6)(20) + 0.4U(A_4)$$

لقيمه $U(A_4) = 2470$ وتستمر هذه العطيـة الى ما لا نهاية بدون التوصل الى نتائج مغايرة contradictory مادام المستهلك متقيدا بالديهيـات الخمس السابقه .

ونجد ان المنفعات فى تحليل فون نيومان ومور جينستيرن تكون قياسيه cardinal بالمعنى المحدد ولقد تم اشتقاقها من سلوك المستهلك المخطوئ على الخطر وانها

صالحه للتنبؤ برغبات المستهلك ما دام هذا المستهلك خاضعا لقاعدة الحصول على الحد الأعلى للنفعة المتوقعة . ولقد تم التوصل إليها عن طريق تقديم رغبات ذات منفعة متبادلة *mutually exclusive choices* وعلى هذا فانه ، من غير جدوى المحاولة للاستنباط من النفعة الناتجة من الحدث *A event* والنفعة الناتجة من الحدث *B* النفعة الناتجة من اندماج الحدثين *A* و *B* فالنفعات الناتجة من تحاليل فون نيومان ومور جنيستين تنطك بعض خاصيات ، وليس كل خاصيات النفعة القياسية .

فاذا كانت $U(A) = kU(B)$ فانه ليس من المنطق ان تؤكد ان المستهلك يفضل *A* عدد *k* من المرات على *B* ونجد ان نسب النفعة غير قابله للتغير *invariant* تحت استخدام التحويلات الخطية وخاصة نجد ان :

$$\frac{U(A)}{U(B)} \neq \frac{a + bU(A)}{a + bU(B)}$$

ولكن على كل حال فان ارقام النفعة تعطينا قياسا مجاليا *interval scale* وان الفروق بينهم ليس لها اى معنى وهذا يتبع من الحقيقة القائلة بان من جملة الفروق النسبية بين ارقام النفعة تكون غير قابله للتغير بالنسبة للتحويلات الخطية بحيث ان :

$$V(A) - V(B) = b[U(A) - U(B)]$$

وبالمقارنة مع النظرية التقليدية للمستهلك ، نجد ان اشارة معدل التغير للنفعة لحدية (وهى الاشتاق الثانى لدالة النفعة) يكون لها علاقة مباشرة لانها غير قابله للتفسير بالنسبة للتحويلات الخطية وهذه النقطة بالذات مهمة جدا بالنسبة للجزء (٣-٩) ومثل هذه المقارنات لا تتطلب باى حال تفضيل المستهلك للفرصة (*C* على *B*) على (*B* على *A*) لان البديل المختاري بان يتحمل على اكبر (او على) رقم من ارقام النفعة .

ولا تزال مقارنات النفعة بين الاشخاص *Interpersonal comparisons of utility* مستحيلة ولكن نفعة فون نيومان ومورجنيستين تسمح بالاتي :

- (١) الترتيب المتكامل للبدايل فى الحالات المشخصة بانها مؤكدة .
- (٢) مقارنة الفروق بين النفعات بسبب الخاصية القياسية السابقة .
- (٣) القدرة على حساب النفعات المتوقعة وهذا جعل من الممكن التعامل مع سلوك المستهلك تحت شروط عدم التأكد .

٣ - ٩ السلوك تحت عوامل عدم التأكد : BEHAVIOR UNDER UNCERTAINTY

لقد عالجت دالة النفعة فى اطار هام فى الجزء ٣-٨ وسوف نفترض هنا ان لدالة النفعة الخواص التالية :

- (١) ان لها المتغير الوحيد وهو الثروة "wealth" والذي يمكن قياسه بالوحدات النقدية.
 (٢) تكون دائما متزايدة .
 (٣) تكون متصله ولها اشتقاقات اولى وثانيه متصله ايضا .

مواقف حيال المجازفة التي تتطوى على الخطر : Attitudes toward Risk

تعرف القيمة المتوقعة لليانصيب (P, W_1, W_2) حيث ان W_1 تمثل مستويات الثراء "wealth" المختلفة بانها مجمل (مجموع) النتائج outcomes كلا مضروباً في مقدار احتمال حدوثه بحيث ان :

$$E(W) = PW_1 + (1 - P)W_2$$

وتعرف الشخص بأنه محايد للمجازفة *risk neutral* بالنسبة ليانصيب ما ، اذا كانت المنفعة الناتجة من القيمة المتوقعة لليانصيب تساوى المنفعة المتوقعة لليانصيب ، بمعنى انه اذا كان :

$$(٣٢-٣) \quad U[PW_1 + (1 - P)W_2] = PU(W_1) + (1 - P)U(W_2)$$

ومثل هذا الشخص يكون رافها فقط في القيم المتوقعة وغير مدركا للمجازفة فهو لا يفرق بين اليانبيان (0.5; 1; 1,000,000) و (0.5; 500,000; 500,001) فاذا كان محايدا للمجازفة حيال جميع اليانصيب فان المعادله (٣٢-٣) تتطلب بان يكون له دالة منفعة خطيه على النمط $U = \alpha + \beta W$ حيث ان $\beta > 0$ وكل ما يتعلق بالمنفعة والتي تقدمت بالنسبة للحالات المؤكده يمكن تطبيقها على الاشخاص المحايدين للمجازفة والذين يتعرضون لحالات عدم التأكد وكل ما هو ضرورى في مثل هذه الحالة هو وضع قيم مكان قيم مؤكده .

وتعرف الشخص بأنه متفادى للمجازفة *risk averter* بالنسبة ليانصيب ما ، اذا كانت المنفعة لقيمتها المتوقعة اكبر من القيمة المتوقعة لمنفعتيها بحيث ان :

$$U[PW_1 + (1 - P)W_2] > PU(W_1) + (1 - P)U(W_2)$$

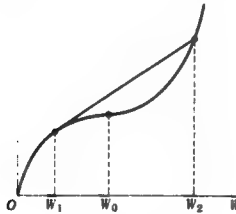
ومثل هذا الشخص يفضل ناتجا مؤكداً على آخر غير مؤكد بنفس القيمة المتوقعة فاذا كانت المعادله (٣٢-٣) صالحه لجميع $0 < P < 1$ وكذلك لجميع W_1 و W_2 ضمن مجال دالة المنفعة ، فان دالة المنفعة تكون محدبه بانضباط خلال مجالها لان المعادله (٣٣-٣) تكون مطابقة لتعريف التمر المنضبط والمعطى في الجزأ 2-A فاذا كانت $d^2U/dW^2 < 0$ فان دالة المنفعة تكون مقعرة بانضباط وان المستهلك يكون متفادى بالمجازفة .

وليد يفسر الملاحظات السلوكيه وطم النفس ان معظم الناس يكونون من نوع الاشخاص المعادى للمجازفة في اغلب معاملاتهم . وبالرغم من هذا ، فان التحاليل السابقة يمكن لها ان تنطبق بالمساواة على الاشخاص الذين يفضلون النتائج الغير مؤكده .

ويعتبر الشخص بأنه " محبا للمجازفة " *risk lover* بالنسبة ليا نصيب ما اذا كانت المنفعة بقيمتها المتوقعة اقل من منفعتها المتوقعة . وفي هذه الحالة فان اللامتساوية في المعادلة (٣٣-٣) تكون مقلوبة والمحبة للمجازفة سوف يكون دائما مالا للمراهنات (المراهنات التي تكون فيها القيمة المتوقعة للربح مساوية للقيمة المتوقعة للخسارة) ويتابع نفس النقاش الذي استخدم في حالة الشخص المتفادي للمجازفة ، فانه اذا كان $d^2U/dW^2 > 0$ فان دالة المنفعة تكون محدبة بانضباط وان المستهلك هو شخص محب للمجازفة .

ومن المحتمل لشخص ما ان يكون متفاديا للمجازفة في بعض الحالات ومحبا للمجازفة في حالات اخرى ، فاذا اعتبرنا على سبيل المثال شخص ذو دخل - منخفض متفاديا للمجازفة في ، تقريبا جميع معاملاته ما عدا انه سوف يدفع ريالاً واحداً لورقة يانصيب بقيمة متوقعة تساوي نصف ريال (مثلا) على ان يكسب ٥٠٠٠٠٠ ريال باحتمال واحد في المليون . ففي الظاهر ان تصرفاته غير متوافقة ، ولكنها سوف تكون متوافقة اذا كانت دالة المنفعة بالصورة الموضحة في الشكل (٣-٥) حيث ان W_1 تمثل ثروة المستهلك اذا خسر اليانصيب ، وان W_2 تمثل ثروته اذا ربح اليانصيب . فدالة منفعة تكون مقعرة بانضباط

(٦W)



شكل (٣)

بين $0 \leq W \leq W_0$ وتكون محدبة بانضباط بين $W > W_0$ وبالتالي فانه متفاديا للمجازفة في جميع الحالات الغير مؤكده والتي يكون فيها افضل النتائج ليس اكبر من W_0 ويكون جميع سلوكه الملاحظ في هذا المدى . والمستهلك مستعدا لدفع مبلغا اعانيا من اجل فرصه ولو نادره للتخلص من حالة الدخل - المنخفض .

ان اشارة الاشتقاق الثاني لدالة المنفعة يعطينا مؤشرا لموقف المستهلك بما ان جسامته غير قابله للتغير تحت تحويلات خطيه ، فانه لا يمكن ان تستخدم لاطاء اشارات عن مستوى

غداى المجازفة او عن الافضل فيه وتعطينا النسبة بين الاشتقاقات الثانية والاولى مقياسا
 r لغداى المجازفة المطلق (1) *absolute risk aversion* على النحو التالى :

$$r = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{d \ln U'(W)}{dW} \quad (٣٤-٤)$$

وهذا المقياس يكون موجبا ، سالبا او مساويا للصفر حسب كون المستهلك مفاديسا
 محبا او محايدا حيال المجازفة . فاذا افترضنا ان : $V = a + bU$ بحيث ان $b > 0$ فان :

$$r = -\frac{V''(W)}{V'(W)} = -\frac{bU''(W)}{bU'(W)} = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

وهذه تثبت لنا قابلية عدم التغير المطلوب .

مثال : اعتبر دالة المنفعة التربيعية (quadratic) $U = W - \alpha W^2$ حيث ان $\alpha > 0$ وان المجال هو : $0 < W < 1/(2\alpha)$ وهذه الدالة تصف سلوك الشخص
 المضادى للمجازفة لان $U'' = -2\alpha < 0$ وتقييم المعادلة (٣٤-٣) تحصل على :

$$r = \frac{2\alpha}{1 - 2\alpha W}$$

بحيث ان $dr/dW = 4\alpha^2/(1 - 2\alpha W)^2 > 0$ ونجد ان غداى المستهلك للمجازفة يزداد
 بزيادة ثروته وفى اغلب الاحيان ، قد يفترض شخصا عكس هذه الحالة - ودالة المنفعة
 $U = \ln(W + \alpha)$ بحيث ان $\alpha > 0$ تعطى مقياسا منخفضا لغداى المجازفة .

اعتبر مجموعة دوال المنفعة التى تعطى مقياسا ثابتا لغداى المجازفة فاذا افترضنا
 ان $r = c$ واعدنا كتابة المعادلة (٣٤-٣) على النحو التالى :

$$\frac{d \ln U'(W)}{dW} = -c$$

وبتكامل Integrating المعادله السابقه بالنسبه W نحصل على :

$$\ln U'(W) = -cW + k_1$$

بحيث ان k_1 تمثل ثابت التكامل constant of integration فاذا اخذنا العدد المقابل
 للوغاريتم antilog فاننا نحصل على :

$$U'(W) = e^{k_1} e^{-cW}$$

وياخذ التكامل مرة اخرى نحصل على :

$$U(W) = e^{k_1} \int e^{-cW} dW = -\frac{e^{k_1}}{c} e^{-cW} + k_2$$

حيث ان k_2 يمثل ثابت اخر للتكامل . واخيرا نقوم بتطبيق التحويله الخطيه بفرض ان
 $a = -(k_2 c)/e^{k_1}$ وان $b = c/e^{k_1}$ لنحصل على :

$$V(W) = -e^{-cW}$$

(١) يعطينا خارج الضرب rW مقياسا لغداى المجازفة النسبى *relative risk aversion* .

وهذه المعادلة هي نقطة عام لدالة المنفعة والتي لها ثابتا مطلقا لتفادي المجازفة

Risk and Insurance

المجازفة والتأمين :

افترض أن المستهلك سوف تواجه مخاطر ومجازفة بفقدان مبلغ وقدره A من الريالات باحتمال وقدرة P إذا حصل له حريق وهذا يكافئ^١ لليانصيب $(P, W_0 - A, W_0)$ بحيث أن W_0 تمثل ثروة المستهلك قبل الحريق فإذا كان المستهلك يدفع مبلغا وقدرة R من الريالات لشركة التأمين ، والشركة بدورها تعطي المستهلك مبلغا وقدره A من الريالات إذا حصل الحريق وعلى هذا فإن المستهلك ضامن ثروة قدرها $W_0 - R$ سواء حدث الحريق أم لم يحدث يمكن الحصول على الحد الأعلى للمبلغ الذي يرغب المستهلك في دفعه للتأمين بحل المعادلة التالية بقيمة R .

$$U(W_0 - R) = PU(W_0 - A) + (1 - P)U(W_0)$$

ونجد ان القيمة المتوقعة للخسارة من الحريق تساوي PA فإذا كان المستهلك متعادلا للمجازفة ، فإن قيمة الحل لمبلغ R تكون اكبر من PA وسوف يشتري المستهلك التأمين إذا كان سعره لا يزيد عن المبلغ R فإذا كان المبلغ اكبر من R فإن المستهلك سوف لا يشتري التأمين بالرغم من أنه متعادلا للمجازفة او المخاطرة .

وبما ان شركات التأمين ترغب في الحصول على ارباح بعد تغطية التكلفة ، فإنها سوف تحافظ على اسعار التأمين لتكون اقل من PA ففي السوق التام perfect market نجد أن جميع الاشخاص المعجبى للمجازفة ، وجميع الاشخاص المحايدين بالنسبة للمجازفة وبعض الاشخاص المتعادين للمجازفة سوف لا يشترون بوليصة تأمين .

مثال : افترض ان دالة المنفعة للمستهلك هي $U = W^{0.5}$ وافترض ايضا ان $W = 90,000$ وان $A = 80,000$ وان $P = 0.05$ وطليه فائنا نتحصل على :

$$(90,000 - R)^{0.5} = 0.95(90,000)^{0.5} + 0.05(10,000)^{0.5}$$

ونحصل منها على الحل لقيمة R بمقدار $R = 5900$ ونجد ان القيمة المتوقعة للخسارة هي $PA = 4000$ فالمستهلك المتعادلي للمجازفة سوف يرغب في دفع 1900 ريال اضافي— ليتحاشى المخاطرة من حدوث الحريق .

وتختلف بوليصة التأمين عن بعضها البعض من عدة نواحي . فالبعض يقدم ميزة الخصم deductible بحيث ان الشركة سوف لا تدفع للمستهلك في حالة تضرره المبلغ D من الريالات الاولى من قيمة الخسارة والبعض الاخر يقدم صيغة المشاركة في التأمين حيث ان المستهلك سوف يدفع نسبة معينة $0 < \alpha < 1$ من قيمة اى خسارة على المستهلك . تنزيل

ان شخصا ما يملك سيارة ومعرض للخطر من الحوادث الجانبية باحتمال P_1 ومعرض للخطر من الحوادث الرئيسية باحتمال P_2 ولكنه لا يحتل ان يتعرض للالتيسين معا (بمعنى: تعرض لحوادث جانبى واخر رئيسى معا) فحصوله الخسارة تكون A و B من الرىالات على التوالى بحيث أن $A < B$ فاذا افترضنا ان المستهلك من النوع المضادى للخطر (المجازفة) وانه لا بد وان يختار بين ميزة الخصم او المشاركة فى بوليصة التأمين . وافترضنا ايضا ان D و α اختيرت بحيث ان القيمة المتوقعة للخسارة متساوية فى كلا الحالتين لبوليصة التأمين (حالة الخصم او حالة المشاركة) وانها كذلك مساوية لقيمة بوليصة التأمين premium و R ولذلك نجد ان لكل حالة :

$$(٣٥-٣) \quad R = P_1(A - D) + P_2(B - D) = P_1(1 - \alpha)A + P_2(1 - \alpha)B$$

ونجد انه تحت هذه الظروف سوف يلجأ المستهلك لشراء بوليصة التأمين التى تقدم له ميزة الخصم لانها تعطيه منفعة متوقعة عالية . ويمكن اثبات هذا عن طريق تحقيق اللامساوية الاتية :

$$P_1 U(W_0 - D - R) + P_2 U(W_0 - D - R) + (1 - P_1 - P_2) U(W_0 - R) \\ > P_1 U(W_0 - \alpha A - R) + P_2 U(W_0 - \alpha B - R) + (1 - P_1 - P_2) U(W_0 - R)$$

فاذا طرحنا المقدار $(1 - P_1 - P_2) U(W_0 - R)$ من طرفى المعادله ، ونسبنا المجموع على $(P_1 + P_2)$ ثم جمعنا الحدود المتشابهه ، نحصل على :

$$(٣٦-٣) \quad U(W_0 - D - R) > Q_1 U(W_0 - \alpha A - R) + Q_2 U(W_0 - \alpha B - R)$$

بحيث ان $Q_1 = P_1 / (P_1 + P_2)$ وكذلك $Q_2 = P_2 / (P_1 + P_2)$ وبما ان $D = Q_1 \alpha A + Q_2 \alpha B$ وان يكون حاله للمستهلك الضادى المعادله (٣٥-٣) فان اللامساوية (٣٦-٣) لا بد وان يكون حاله للمستهلك الضادى للمجازفة لانه من الممكن تفسيرها على انها حاله من المعادله (٣٣-٣) حيث ان منفعة القيمة المتوقعة اكبر من القيمة المتوقعة للمنفعة .

SUMMARY

٣ ٩٥ ملخص ما سبق :

لقد نوقشت امتدادات لنظرية سلوك المستهلك الاساسيه وكذلك خواص بعض دوال المنفعة المعنية . ووجدنا ان دالة المنفعة الخطيه اللوغاريتميه بمطابقتها للاستهلاك الادنى انها ولدت دوال للمصرفات الخطيه قابلة للتعديل حسب المتغيرات الاحماضية لمجاهيلها .

وعرفنا دالة المنفعة بانها قابلة للانفعال بشدة اذا كان من الممكن كتابتها كدالة الداله لمستويات الاستهلاك الفردية وان RCS الخاصه بها لزوج من السلع يعتمد اعتمادا مباشرا على مستويات الاستهلاك لهذه السلع . وعرفنا كذلك دالة المنفعة بانها قابلة

للجمع بشدة إذا كان من الممكن كتابتها كمجموع دوال مستويات الاستهلاك الفرد يسـه ووجدنا ان قابلية الجمع تكون حاله خاصة من قابلية الانفصال ووجدنا كذلك أن قابلية الجمع تعنى أن المنفعة الحدية لكل سلعة تكون مستقلة من مستويات الاستهلاك للسلع الأخرى .

ومرفنا دالة المنفعة بأنها تالفيه إذا كان من الممكن كتابتها على أنها تحويلة طردية موجبه لدالة متجانسة ، ووجدنا ان الدوال المتألقة لها خاصية مهمة وهى ان RCS الخاصه بها تعتمد فقط على النسبه التى تستهلك بها السلع .

ان دوال المنفعة الغير مباشرة تعطى مستويات منفعة أكثر رغبة بدلالة الاسعار والدخل يمكن الحصول عليها بتعويض دوال الطلب فى دالة المنفعة المباشرة .

ومعايدة روى تربط طلبات السلع بأشتاقات دالة المنفعة الغير مباشرة ونظريسات الأزد واجبة بالاعاقفة الى معايدة روى ، تربط دوال المنفعة المباشرة والغير مباشرة وهو "لا" يساعدون فى اعداد أساس نظرى للعمل الاحصائى ويساعدون ايضا فى السطاح بالقيام ببعض التحاليل النظرية بالنسبه لدوال المنفعة الغير مباشرة .

ويمكن اعاده صياغة نظرية سلوك المستهلك الأساسيه بدلالة نظرية الأفضلية الموضحه والتى لاستخدم حساب التفاضل وتصل الى نتائج تكاد تكون هى نفسها النتائج التى توصلنا اليها بالتحاليل السابقة .

وتعملنا على هذه النتائج بتعمير المستهلك لحالات اسعار ودخل تخيليه ومن ثم ملاحظة تصرفاته ومن هذا يمكن اشتقاق منحنيات السوا" ويمكن كذلك التنبؤ برغبات مستقبلية على أساس الرغبات الحاضيه اذا حقق سلوك المستهلك البدبيات الاساسيه للأفضلية الموضحة .

إذا كانت اسعار مجموعه من السلع تتغير دائما بنفس النسبه ، فإن الطلب ليسنده المجموعه سوف يتصرف بنفس الطريقه التى يتصرف فيها الطلب لسلعة واحدة فقط . ونظرية السلعة المركبه هذه تعنى ان هذه سلع يمكن اجمالها ومعاملتها على انها سلعة واحدة لعدة تحاليل نظرية . والمستهلك عادة يكسب فائض من استهلاكه لسلعة ما بالمعنى أنه سوف يدفع اقل من الكمية القصوى التى كان ولايد من ان يدفعها بدل حرمانه من استهلاك هذه السلعة ولقد اقترح مقاييس عديدة نقدية مختلفه لقياس هذا الفائض .

وعصوما نجد ان هذه المقاييس ليست متساوية فإذا كانت نتيجة الدخل للمستهلك

مساوية لمصرفان :

- (١) المقاييس الرئيسية للفاض تكون متساوية •
- (٢) أن فائض المستهلك يساوى المساحة تحت منحني الطلب ناقصا المنصرفة •
- (٣) أن المنفعة الحدية لسلعة مركبة من جميع السلع الأخرى تكون ثابتة •
- (٤) أن المنفعة الحدية للسلعة المدروسة تكون دائما متناقصة •

أن طريقة فون نيومان ومورجنستيرن مهتم بسلوك وتصرفات المستهلك في حالات توصف بأنها غير مؤكدة فإذا كان سلوك المستهلك يحقق بعض البداهات الهامة فإنه يمكن اشتقاق دالة المنفعة للمستهلك بتقدير سلسلة من الرغبات له بين نتائج مؤكدة من جهة ونتائج غير مؤكدة بين تحت مجموعة من الاحتمالات من الجانب الآخر •

وطى هذا فإن دالة المنفعة المشتقة تكون فريدة من نوعها لحد تحويل خطية وتقدم لنا ترتيبا للبدائل في حالات لا يدخل فيها عنصر المجازفة أو المخاطر •

فالمستهلك يرغب في الحصول على الحد الأعلى للمنفعة المتوقعة وإن دوال المنفعة الخاصة بفون نيومان ومورجنستيرن تكون قياسية بمعنى أنه يمكن ربطها للوصول إلى حصة المنفعت المتوقعة والتي يمكن استخدامها لمقارنة الفروق في المنفعة •

ومن الممكن استخدام حسابات المنفعة المتوقعة لتقرير اختبارات المستهلك ففى حالات يدخل فيها عنصر المجازفة أو الصاطرة •

وبوجود الشرة كمجهول وحيد في دالة المنفعة ، فإن المنفعة للقيمة المتوقعة للنتائج من حالة عدم تأكد غرق المنفعة المتوقعة للنتائج للمستهلك الذى يتغادى المجازفة أو الخطر • بمعنى أن دالة المنفعة للمستهلك تكون مقعرة بانحناء وبففس الطريقة ، نجد أن محبى المجازفة والمعايدين يمتلكون دوال خطية ومعد به بانتظام للمنفعة حسب الترتيب •

وتعرف المؤشر للمستهلك الذى يتغادى المجازفة بطلقا بأنه النسبة بين الاشتقاقات الثانية والأولى لدالة المنفعة وسوف يدفع الأشخاص الذين يرغبون في تغادى المجازفة قيمة بوليمة تأمين لتحويل نتائج غير مؤكدة إلى نتائج مؤكدة •

EXERCISES

3-1 Which of the following utility functions are (a) strongly separable, or (b) additive with respect to all variables: $U = (q_1^\alpha + q_2^\alpha)^{1/\alpha}$; $U = q_1 q_2 + q_3 q_4$; $U = \beta_1 \ln(q_1 - \gamma_1) + \beta_2 \ln(q_2 - \gamma_2)$; $U = (q_1 + 2q_2 + 3q_3)^{1/4}$. Show for each strongly separable or additive function what the F and f_i functions are.

3-2 Prove that if the consumer is indifferent between commodity bundles (q_1^1, \dots, q_n^1) and (q_1^2, \dots, q_n^2) and has a homothetic utility function, she will also be indifferent between the bundles (tq_1^1, \dots, tq_n^1) and (tq_1^2, \dots, tq_n^2) .

3-3 Prove that an additive, strictly quasi-concave utility function is concave.

3-4 Construct an indirect utility function that corresponds to the direct function $U = a \ln q_1 + q_2$. Use Roy's identity to construct demand functions for the two goods. Are these the same as the demand functions derived from the direct utility function?

3-5 A consumer is observed to purchase $q_1 = 20$, $q_2 = 10$ at prices $p_1 = 2$, $p_2 = 6$. She is also observed to purchase $q_1 = 18$, $q_2 = 4$ at the prices $p_1 = 3$, $p_2 = 5$. Is her behavior consistent with the axioms of the theory of revealed preference?

3-6 Let the consumer's utility function be $f(q_1, q_2, q_3) = q_1 q_2 q_3$, and her budget constraint $y = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$. Consider $q_1 + (p_2/p_1)q_2 = q_4$ as a composite good. Formulate the consumer's optimization problem in terms of q_4 and find the demand function for q_4 .

3-7 Let the consumer's inverse demand curve be $p = a - bq$ with $a, b > 0$, and assume that a sales tax of 100t percent is imposed so that the unit price she pays is increased to $p(1+t)$. Prove that her loss of consumer's surplus will always exceed the revenue raised by the government through the imposition of the tax.

3-8 A consumer who conforms to the von Neumann-Morgenstern axioms is faced with four situations A, B, C, and D. She prefers A to B, B to C, and C to D. Experimentation reveals that the consumer is indifferent between B and a lottery ticket with probabilities of 0.4 and 0.6 for A and D respectively, and that she is indifferent between C and a lottery ticket with probabilities of 0.2 and 0.8 for B and D respectively. Construct a set of von Neumann-Morgenstern utility numbers for the four situations.

3-9 Show which of the following utility functions exhibit decreasing risk aversion: $U(W) = (W + \alpha)^\beta$, $\alpha \geq 0$, $0 < \beta < 1$; $U(W) = W$; $U(W) = \ln(W + \alpha)$, $\alpha \geq 0$; $U(W) = W^2$.

3-10 A consumer who obeys the von Neumann-Morgenstern axioms and has an initial wealth of 160,000 is subject to a fire risk. There is a 5 percent probability of a major fire with a loss of 70,000 and a 5 percent probability of a disastrous fire with a loss of 120,000. Her utility function is $U = W^\alpha$. She is offered an insurance policy with the deductibility provision that she bear the first 7620 of any fire loss. What is the maximum premium that she is willing to pay for this policy?

3-11 Let a consumer's strictly quasi-concave utility function be $U = f(q) + 3M$ where M is the quantity of a composite commodity with unit price. Assume that her demand function for Q is $q = p^{-\alpha}$ where $\alpha > 0$. Determine $f(q)$ by solving a differential equation formed from the first-order condition for utility maximization.

SELECTED REFERENCES

- Arrow, K. J.: *Aspects of the Theory of Risk-Bearing* (Helsinki: Academic Bookstore, 1965). Contains excellent discussions of expected utility maximization, risk aversion, and insurance.
- Currie, J. M., J. A. Murphy, and A. Schmitz: "The Concept of Economic Surplus and Its Use in Economic Analysis," *Economic Journal*, vol. 81 (December, 1971), pp. 741-799. A detailed and nonmathematical survey with an extensive bibliography.
- Friedman, M., and L. J. Savage: "The Utility Analysis of Choices Involving Risk," *Journal of Political Economy*, vol. 56 (August, 1948), pp. 279-304. Also reprinted in American Economic Association, *Readings in Price Theory* (Homewood, Ill.: Irwin, 1952), pp. 57-96. An analysis of situations with uncertain outcomes leading to a hypothesis concerning utility as a function of income. Simple mathematics.
- Hicks, J. R.: *Value and Capital* (2d ed., Oxford: Clarendon Press, 1946). An analysis of composite commodities is contained in the appendix.
- : *A Revision of Demand Theory* (Oxford: Clarendon Press, 1956). A discussion of consumer theory relying on the theory of revealed preference and employing little mathematics.
- Houthakker, H. S.: "Revealed Preference and the Utility Function," *Economica*, n.s., vol. 17 (May, 1950), pp. 159-174. Contains a proof of the existence of indifference curves for consumers who satisfy the axioms of revealed-preference theory.
- Katzner, D. W.: *Static Demand Theory* (New York: Macmillan, 1970). A modern and abstract treatment; illuminating but not easy.
- Lau, L. J.: "Duality and the Structure of Utility Functions," *Journal of Economic Theory*, vol. 1 (December, 1969), pp. 374-396. An extensive treatment of the relations between direct and indirect utility functions employing the calculus.
- Pratt, J. W.: "Risk Aversion in the Small and in the Large," *Econometrica*, vol. 32 (January-April, 1964), pp. 122-136. Introduces the concepts of relative and absolute risk aversion in mathematical terms.
- Richter, M. K.: "Revealed Preference Theory," *Econometrica*, vol. 34 (July, 1966), pp. 635-645. A modern approach using advanced mathematics.
- Samuelson, Paul A.: *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard, 1948). Composite commodities, revealed preference theory, and consumer surplus are treated in chaps. VI and VII.
- von Neumann, J., and O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior* (2d ed., Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1947). Chap. 1 and an appendix contain the original statement of the von Neumann-Morgenstern approach.
- Willig, R. D.: "Consumer's Surplus without Apology," *American Economic Review*, vol. 66 (September, 1976), pp. 589-597. A sophisticated justification of using the concept of consumer's surplus in practical situations.

الفصل الرابع

نظريات المؤسسات والشركات التجارية والمالية

THE THEORY OF THE FIRM

تعرف المؤسسة او الشركة بانها الوحدة التقنية التي بداخلها يتم انتاج السلع والتي يكون لاصحابها (المالك والمدير) (entrepreneur (owner and manager) حق اتخاذ القرار بشأن ونوعية السلع المنتجة ولهم الربح وطبيهم الخسارة الناتجة من اتخاذ هذه القرارات فصاحب المؤسسة يقوم بتحويل المواد الاولية الداخلة inputs الى مواد انتاجية خارجة outputs خاضعة للقواعد التقنية المنصوص عليها في دالة الانتاج production function فالفرق بين ايراداته revenue من بيع المنتجات وبين تكلفة cost الانتاج يساوى ربحه profit اذا كان الفرق موجبا أو خسارته اذا كان الفرق سالبا .

وتعطى دالة الانتاج الخاصة بصاحب المؤسسة تعبيراً رياضياً يبين العلاقة بين كميات المواد الاولية الداخلة للانتاج inputs وبين الكميات المنتجة وهذه العلاقة تكون علاقة عامة اما اذا كانت دالة الانتاج دالة معينه فانها يمكن ان تغطي بنقطه منفرد ، او دالة مفردة متصله او غير متصله ، او مجموعه من المعادلات . وهذا الباب مقصورا على دوال الانتاج المعطاه بدالة متصله مفردة ويكون لها اشتقاق جزئيه اوليه وثانيه متصله . وتبدد المناقشه بحالات بسيطه نسبيا بحيث ان اثنان من الداخلى inputs قد مزجتا لانتاج منتج واحد output ومن ثم توسع المناقشه لتشمل حالات اكثر عمومه .

ونعرف الداخلى (او المواد الاولية الداخله) inputs بانها تكون اى بضاعه او سلعه good او خدمه service والتي تشارك في انتاج منتج ما وسوف يستخدم صاحب المؤسسة عدة داخلى مختلفه لانتاج منتج ما ، وبعض هذه الداخلى قد تكون منتجات من مؤسسات اخرى . فعلى سبيل المثال ، الحديد والصلب هو واحد من الداخلى في انتاج السيارات وهو نفس الوقت منتج بالنسبه لمؤسسة الحديد والصلب وقد تكون بعض هذه الداخلى ، مثل العمل labor والارض land والثروات المعدنيه غير منتجه على الاطلاق ولفترة معينه من الزمن ، قد تصنف هذه الداخلى على انها اما

ثابتة fixed او متغيرة variable فالداخل الثابت ضروريه جدا للانتاج ولكن كمياتها غير قابله للتغير بالنسبه لكميات المنتجات المصنعه وان اسعار هذه الدواخل يتحطها صاحب المؤسسة بغض النظر عن قراره بالحصول على الحد الاعلى من الربح في الزمن القصير short-run والكميه الضرورية للداخل المتغيرة تعتمد على كميته المنتج المصنوع والتعيز بين الدواخل الثابتة والمتغيرة تعتمد على العنصر الزمني temporal بمعنى ان الدواخل التي تكون ثابتة لفتره من الزمن قد تكون متغيرة لفتره زمنيه اطول فصاحب مصنع مكائن قد يتطلب فتره زمنيه مقدارها ثلاثة اشهر من اجل شراء مكائن اخرى جديده او قد اجل ان يتخلص من المكائن الحاليه وسوف يعتبر المكائن كدواخل ثابتة في تخطيطه للانتاج لفترة شهر واحد ويعتبرها دواخل متغيرة في تخطيطه للانتاج لفترة سنه واحدة . فكل الدواخل تعتبر متغيرة اذا اهلينا فتره زمنيه طويله .

ان التحاليل الجوهرية للمؤسسة تكون مشابهة للتحاليل الاساسيه للمستهلك من عدة نواحي فالمستهلك يشتري السلع التي بها ينتج اقتناؤه وراحته ورضاه وصاحب المصنع من الناحية الاخرى يشتري الدواخل التي بها ينتج السلع . المستهلك يمتلك دالة منفعة والمؤسسة تملك دالة انتاج . ميزانيه المستهلك عبارة عن معادلة تعبر عن دالة خطيه بالنسبه لكميات السلع التي يشتريها بينما معادلة التكلفة cost equation للمؤسسة المعاكسه تكون دالة خطيه بالنسبه لكميات الدواخل التي تشتريها المؤسسة .

اما الفروقات بين التحاليل للمستهلك والمؤسسة فانها غير واضحة كالمتشابهات فدالة المنفعة تكون دالة ذاتيه وليس لها مقياس معياري ، بينما دالة الانتاج تكون دالة موضوعيه ويمكن مقياس كمي الانتاج للمؤسسة والتي من الممكن ان تنتج اكثر من منتج واحد . وعلى الحصول على الحد الاعلى لصاحب المؤسسة قد تتعدى المعطيه نفسها بالنسبه للمستهلك . فالمستهلك العاقل يحاول الحصول على الحد الاعلى من المنفعة حسب الدخل المعطى له بينما صاحب المؤسسة يحاول الحصول على الحد الاعلى في الانتاج حسب مستوى التكلفة المعطى له ولكنه في بعض الاحيان قد يعتبر ان التكلفة تكون متغيرة . وقد يرغب في الحصول على الحد الادنى للتكلفة لانتاج مستوى معين من منتجاته أو أنه يحاول الحصول على الحد الاعلى للربح الذي يتحصل عليه من الانتاج وبيع السلع . سوف نناقش في الاجزاء الثلاثة الاولى من هذا الباب مشاكل صاحب المؤسسة الذي يستخدم اثنان من الدواخل two inputs لانتاج منتج واحد فقط output . وسوف يعطى الجزء الاول طبيعة دالة الانتاج لصاحب المؤسسة وطريقة اشتقاق منحنيات الانتاج productivity curves ومنحنيات تساوى الكميات isoquants وسوف يغطى الجزء الثاني اساليب وطرق بديله للحصول على الحد الاعلى ، والجزء الثالث يغطي على عناصر الطلب المشتقه من سلوك صاحب المؤسسة للحصول على الحد الاعلى . وفي الجزء ٤-٤

نقوم باشتقاق دوال التكلفة من علاقات الانتاج $production\ relations$ اما مشاكل صاحب المؤسسة الذى يقوم باستخدام دخل واحد لانتاج منتجين فقد نوقشت فى الجزء ٤-٥ ثم معنا المناقشة لاي عدد من الدواخل والخارج فى الجزء ٤ - ٦ .

٤ - ١ مفاهيم (الأفكار) اساسية : BASIC CONCEPTS دالة الإنتاج : The Production Function

افترض ان لدينا عملية انتاج بسيطة بحيث ان صاحب المؤسسة يستخدم داخلاً متغيران هما X_1 و X_2 بالإضافة الى داخل واحد ثابت لانتاج منتج واحد (هو Q) فدالة الانتاج فى هذه الحالة ، تنص على ان كمية المنتج (q) تكون بدالة كميات الداخلى المتغيره x_1 و x_2 بحيث ان :

$$q = f(x_1, x_2) \quad (١-٤)$$

ونفترض فى هذه الدالة ان تكون دالة متصله ذات قيمه مفردة ولها اشتقاق اوليه وثانيه متصله، ولا تكون معرفه الا بقيم غير سالبه للدواخل والخارج لان القيم السالبه لا تعطى اى معنى فى السياق الحاضر . ومجال دالة الانتاج قد يحتوى مجال الدالة على جميع القيم الغير سالبه فى الربع الرابع من المحاور وقد يختلف من حالة لحاله اخرى .

ولكن جرت العاده على افتراض ان دالة الانتاج تكون دائما متزايدة بمعنى ان $f_i > 0$ ضمن مجال الداله وايضا يفترض فيها ان تكون دالة شبه - مقعرة بانضباط عندما يعمل صاحب المؤسسة على الحصول على الحد الاعلى او الحد الادنى للتكلفة وتكون دالة مقعرة بانضباط عندما يعمل صاحب المؤسسة على الحصول على الحد الاعلى للربح .

وقد يتمكن صاحب المؤسسة من استخدام مجموعات عديده مختلفه من X_1 و X_2 لانتاج مستوى معين من النتائج ، وفى الحقيقه فان العدد المحتمل مثل هذه المجموعات قد يكون لا نهائى بما ان المعادله (١-٤) تمثل دالة متصله والتغنيه المتوفره لصاحب المؤسسة هى تكون فقط المعلومات التقنيه من مجموعات الداخلى الضرورية للحصول على المنتج المطلوب وهى كذلك تحتوى على جميع الاحتمالات الفيزيائيه وقد تنص التقنيه المتوفره على انه من الممكن استخدام مجموعه واحدة من X_1 و X_2 بعدد من الطرق المختلفه لانتاج مستويات عديده مختلفه من المنتجات . وتختلف دالة الانتاج عن التقنيه المعطاه فى انها تفترض مسبقا وجود التقنيه الاكثر كفاءه وتمعطى الحد الاعلى للانتاج الذى يمكن الحصول عليه من كل مجموعه داخلى محتطه . وان افضل استخدام لاي مجموعه محدده من الداخلى انما هو مسأله فنيه وليست اقتصاديه او على هذا فان اختيار افضل مجموعه داخلى لانتاج

مستوى معين من المنتجات يعتمد على اسعار الداخـل والخـارج ويكون معـرضا للتحـاليل الاقتصادية .

ان مستويات الداخـل والخـارج تمثل معدلات انسياب flow بمعدل وحدة زمنية وهذه الفترات الزمنية والتي من اجلها عرفت هذه المعدلات الانسيابية ، بالتالى دالة الانتاج للمدى الزمنى القصير short-run تكون معرضة لثلاثة قيود عامه هى :

- (١) يجب ان تكون الفترة الزمنية قصيرة قصرا كافيا حتى لا يتمكن صاحب المؤسسة من تغيير مستويات الداخـل الثابتة .
- (٢) يجب ان تكون قصيرة قصرا كافيا حتى لا يمكن تغيير شكل دالة الانتاج من خلال التحسينات الفنية .
- (٣) يجب ان تكون الفترة الزمنية بطول كاف ليمحـر بتكـله العمليات الفنية الضرورية .

فاختيار فترة زمنية محددة ضمن اطرار محددة يتم بطريقه عشوائيه arbitrary ومن الممكن تغيير مجرى المناقشه قواعد للمدى الزمنى الطويل long-run اذا ارخينا حبل الشرط (١) وعرفنا دالة الانتاج لفترة زمنية طويله كافيه للسماح بحدوث تغيرات فى الداخـل الثابتة . وكل النتائج تقريبا للفترة الزمنية القصيره سوف تتبع فى شكل مختلف اختلافا بسيطسا لنتائج الفترة الزمنية الطويلة .

Product Curves

منحنيات الإنتاج :

نعرف بمجمل الانتاج للداخـل x_1 فى انتاج Q بأنه الكمية من Q التى يمكن استخلاصها من الداخـل x_1 . اذا عينا للداخـل x_2 القيمة الثابتة \bar{x}_2 والتى يمكن معالجتها على اساس انها كمية متغيره (ذات قيمة ثابتة) وان q تصبح فى هذه الحالة ، بدلالة x_1 فقط

$$q = f(x_1, \bar{x}_2) \quad (٢-٤)$$

ويمكن تغيير العلاقة بين q و x_1 بتغيير \bar{x}_2 والشكل (٢-٤) يمثل مجموعة من منحنيات الانتاج الاجمالية total product curves وكل واحد من يعطى العلاقة بين q و x_1 للقيمة مختلفه من \bar{x}_2 وعادة فان اى زياده فى \bar{x}_2 سوف ينتج عنه انخفاض فى كمية x_1 الضرورية لانتاج المستوى المعين لكل منتج ضمن المدى الممكن فاذا كان احد منحنيات الانتاج يقع على يسار منحنى اخر فان هذا المنحنى يمثل قيمة اعلى للكمية \bar{x}_2 . بحيث ان $\bar{x}_2^{(1)} > \bar{x}_2^{(2)} > \bar{x}_2^{(3)}$

ونعرف معدل الانتاج average product والانتاج الحدى marginal products للداخـل بطريقه مشابهه لقيم محددة للداخـل \bar{x}_2 على النحو التالى :

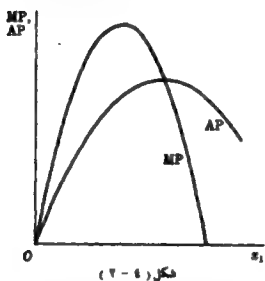
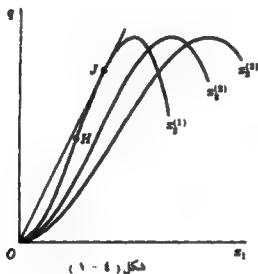
ان معدل الانتاج (ونرمز له بالرمز AP) للداخـل x_1 هو اجمالى الانتاج مقسوما طـسـى كميته :

$$AP = \frac{q}{x_1} = \frac{f(x_1, \bar{x}_2)}{x_1}$$

ونعرف الانتاج الحدى (ونرمز له بالرمز MP للدخل X_1 بأنه معدل التغير لاجمالى الانتاج بالنسبة للتغيرات فى كميته بمعنى انه هو الاشتقاق الجزئى للمعادله (١-٤) بالنسبة لقيمة الداخل :

$$(٣-٤) \quad MP = \frac{\partial q}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2)$$

ويمكن رسم مجموعات من منحنيات AP و MP بتعيين قيم مختلفه الى x_2 ومنحنيات AP و MP والتي تقع الى اقصى اليسار بالنسبة لمنحنيات اجمالى الانتاج فى الشكل (١-٤) تكون مظه فى الشكل ٢-٤ .



ان معدل الانتاج AP لنقطه ما على منحنى الانتاج الاجمالى يساوى ميل الخط الواصل بين هذه النقطه ونقطه الاصل والخطين OK و OJ على الشكل (١-٤) مثالين لهذا

وملاحظة منحنى AP نجد انه يزداد اذا تحركنا عبر منحنى اجمالي الانتاج من نقطة الاصل الى النقطة J وينخفض بعد ذلك . ونقطه J تمثل نقطة الحد الاعلى على منحنى AP. في الشكل (٢-٤) .

وقيمة MP لنقطة ما على منحنى الانتاج الاجمالي تساوي ميل خط التماس الى منحنى عند تلك النقطة ففي الشكل (١-٤) نجد ان MP يزداد من نقطة الاصل الى نقطة الانقلاب *inflexion point H* حيث ان ميل خط التماس يكون في ذروته ويتناقص بعد ذلك ونجد ايضا ان MP و AP متساويان عند اعلى نقطة في AP (وهي نقطة J) حيث ان ميل خط التماس يساوي ميل الخط (١) .

ان منحنيات الانتاج المعطاه في الشكل (١-٤) والشكل (٢-٤) تحقق القانون العام المعروف بقانون تناقص الانتاج الحدى *law of diminishing marginal product* ونجد ان الانتاج الحدى MP للداخل X_1 سوف يتناقص في النهايه كلما ازادت مـع الحفاظ على X_2 من غير تغيير (٢) . وهذا القانون لا ينفي المرحلة الاولى والتي يكون فيها MP متزايدا والواضحه في المثال الراهن . فاذا اعتبرنا عملية الانتاج التي خلطنا فيها الارض *land* والعمل *labor* لانتاج الحب *wheat* ثم قمنا بحساب كمية الحب المنتج كلما اخفنا حال اكثر فاكثر الى قطعة الارض ذات المساحة الثابته . وسوف نجد في البدايه انه بزيادة عدد العمال تزايد في MP الخاص بالعمال . ولكن بعد تحقيق هذه الاقتصاديات الاولى ، نجد ان الزيادات في اعداد العمال سوف يؤدي الى زيادات اصغر فاصغر في انتاج الحب وتصبح اعداد العمال اكبر واكبر نسبة الى كمية الارض الثابته فقانون تناقص الانتاج الحدى يهـتم بالكميات النسبيه للداخل ولا يمكن تطبيقه اذا ازادت كميات الدواخل معا وفي نفس الوقت .

(١) لايجاد القيمة العظمى لمعدل الانتاج AP نضع اشتقاق الجزئى بالنسبه للمقدار يساوى صفرا بحيث ان

$$\frac{\partial AP}{\partial x_1} = \frac{x_1 f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{x_1^2} = 0$$

ومن معلوماتنا عن الكسور ، نعرف انه اذا ساوى كسرا ما المقدار صفرا ، فان البسط يكون مساويا لصفر وفيه فان :

$$x_1 f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2) = 0$$

وبتحريك الحد الثاني الى الجانب الايمن والقسمه على x_1 نحصل على

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{x_1}$$

وهذا فان MP و AP يتساويان عند النقطة العظمى لمعدل الانتاج AP اذا وجد مثل هذه النقطة .

(٢) هذا القانون قد ذكر في انماط مختلفه . راجع مقالة منجر *Menger* تحت عنوان "قوانين المائدات" *"The Laws of Returns"* في كتاب مورجنسترن *Morgenstern* بعنوان

وتعرف مرونة المنتج للداخل X_1 ونرمز لها بالرمز ω_1 بأنها معدل التغير النسبي
للمقدار Q بالنسبة للداخل X_1 :

$$(٤-٤) \quad \omega_1 = \frac{\partial(\ln q)}{\partial(\ln x_1)} = \frac{x_1}{q} \frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{MP}{AP}$$

ومن هذه المعادله نجد ان مرونة المنتج (او الناتج) قد يعبر عنها بالنسبه بين
 MP و AP ، وتكون موجبه اذا كان AP و MP موجبين ، ومرونة الناتج لداخل ما ،
تكون اكبر من او تساوى ، او اقل من الواحده كلما كان MP الخاص بها اكبر من ، أو
يساوى ، او اصغر من AP الخاص بها على التوالي . . . ومن الممكن تطبيق كامل تحاليل
الانتاج لتغيرات في x_2 ومعامله x_1 على انها كمية متغيره ذات قيمة ثابتة .

مثال : اعتبر دالة الانتاج المعطاه بالمعادله من الدرجة السادس :

$$(٥-٤) \quad q = Ax_1^2x_2^2 - Bx_1^3x_2^3$$

بحيث ان $A, B > 0$ ونجد ان منحنيات الانتاج المطابقه مرسومة في الشكلين (١-٤) و
(٢-٤) (١) .

واذا وضعنا $Ax_1^2 = k_1$ ووضعنا $Bx_1^3 = k_2$ فان مجموعه منحنيات الانتاج الاجمالى
للدخل X_1 تكون معطاة بالمعادله من الدرجة الثالثه :

$$q = k_1x_1^2 - k_2x_1^3$$

بحيث ان k_1 و k_2 تعتمد على القيمة الثابته المعينه للمقدار x_2 اما منحنيات AP
و MP فانها تكون معطاة بالمعادلتين من الدرجة الرابعه :

$$AP = k_1x_1 - k_2x_1^2 \quad MP = 2k_1x_1 - 3k_2x_1^2$$

ونجد ان AP يصل الى النقطه المعظمى عندما تكون $x_1 = k_1/2k_2$ وان MP يصل الى النقطه
المعظمى عندما تكون $x_1 = k_1/3k_2$ وبما ان $k_1, k_2 > 0$ فان x_1 ، k_1 ، k_2 فان MP يصل الى النقطه المعظمى
عند قيمة اصغر للداخل X_1 من AP ويمكن للقارى ان يثبت ان $AP = MP$ عندما يكون
 $x_1 = k_1/2k_2$ وتكون مرونة الناتج للداخل X_1 هي :

$$\omega_1 = \frac{2k_1 - 3k_2x_1}{k_1 - k_2x_1}$$

ويمكن للقارى ايضا ان يتحقق من ان ω_1 تتناقص كلما تزايدت x_1 .

مثال اخسر : اعتبر دالة الانتاج المعطاة $q = x_1^2x_2^2$ حيث ان $0 < \alpha < 1$ نجد ان
 AP وان MP للداخل x_1 يتناقصان باستمرار ولا يتساويان عند اى قيمة من قيم x_1 :

$$AP = \frac{q}{x_1} \quad MP = \alpha \frac{q}{x_1}$$

(١) لقد استخدمنا القيم $A = 0.09$ ، $B = 0.0001$ لانشاء المنحنيات في الشكلين (١-٤) و (٢-٤)

ونجد ان مرونة الناتج للداخل X_1 تساوى الثابت α .

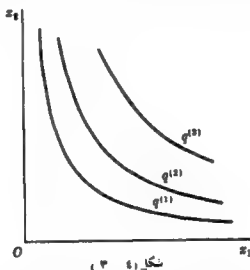
Isoquants

منحنيات تساوى الكميات :

ان منحنى تساوى الكميات يمثل بالنسبة للمؤسسة نظيرة منحنى السواء بالنسبة للمستهلك ، ويعرف بأنه المحل الهندسى locus لاجمالى مجموعات x_1 و x_2 والتي تؤدي الى مستوى انتاجى محدد . والمستوى انتاجى معطى فان المعادلة (١-٤) تصبح :

$$q^0 = f(x_1, x_2) \quad (٦-٤)$$

حيث ان q^0 متغير بقيمه ثابتة . وان المحل الهندسى لاجمالى مجموعات x_1 و x_2 والتي تحقق المعادلة (٦-٤) فانها تكون منحنى من منحنيات تساوى الكميات . وبما ان دالة الانتاج تكون متصله ، فانه يوجد حد لا نهائى من مجموعات الدواخل التي تقع على كل منحنى من منحنيات تساوى الكميات ، والتي يمثلها فى الشكل : (٣-٤) $q^{(3)}$ $q^{(2)}$ $q^{(1)}$ وجميع كميات الدواخل التي تقع على مثل هذا المنحنى انما ينتج عنها ناتجا يوضحه ذلك المنحنى وضمن المدى النسبى لهذه العنطيه ، فان اى زيادة فى اى من الداخلين معا سوف ينتج عنه زيادة فى الانتاج . وكلما كان المنحنى بعيدا عن نقطة الاصل كلما ازداد مستوى الانتاج الذى يمثله هذا المنحنى بحيث ان $q^{(3)} > q^{(2)} > q^{(1)}$.



ان ميل خط التماس لنقطة على منحنى تساوى الكميات يمثل المعدل الذى يجب عنده تعويض x_1 مكان x_2 (او x_2 مكان x_1) من اجل المحافظة على مستوى الانتاج المناسب ويعرف الميل السالب بأنه معدل التعويض الفنى (التقنى) *rate of technical substitution* ونرمز له بالرمز (RTS)

$$RTS = -\frac{dx_2}{dx_1}$$

وهذا المعدل بالنسبة للمؤسسة يقابله المعدل RCS بالنسبة للمستهلك وهو نفسه لا

يتغير عند أي نقطة إذا تحركنا في أي اتجاه .

وبأخذ الاشتقاق الكامل total differential لدالة الانتاج نحصل على :

$$dq = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \quad (٧-٤)$$

بحيث ان f_1 و f_2 هما الاشتقاقيين الجزئيين للكمية q بالنسبة للمقدارين x_1 و x_2 (يمثلان الانتاج الحدى للداخلين x_1 و x_2) وبما ان $dq=0$ للتحرك على منحنى تساوى الكميات ، فان :

$$0 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$$

$$RTS = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_1}{f_2} \quad (٨-٤) \quad \text{وطيه فان :}$$

بمعنى ان RTS عند نقطة ما يساوى نسبة MP للداخل x_2 الى MP للداخل x_1 عند تلك النقطة .

ويمكن الحصول على منحنيات تساوى الكميات الموضحة في الشكل (٣-٤) لدالة الانتاج المعطاة في المعادلة (٥-٤) اذا افترضنا ان $z = x_1 x_2$ واعدنا كتابه (٥-٤) لتصبح

$$q^0 = Az^2 - Bz^3$$

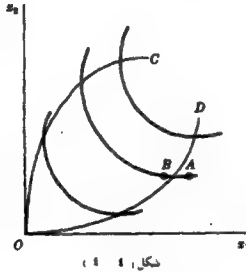
ومنها نكون المعادلة التكميلية :

$$Bz^3 - Az^2 + q^0 = 0$$

والتي يمكن حلها لقيمة z ، ونتعامل مع اصغر جزر حقيقى موجب على انه الحل لقيمة z فنجد ان قيمة z تعتمد على q^0 بحيث ان $z = \psi(q^0)$ و $x_1 x_2 = \psi(q^0)$ وهذه المعادلة تعرف لنا منحنيات تساوى الكميات بحيث ان $\psi(q^0)$ تكون ثابتة لاي قيمة محسوبة للقدار q^0 .

وقد يحدث ان يكون الانتاج الحدى MP سالبا وهذا يكون نتيجة لاستعمال x_1 بدرجة كبيرة كافيه . فالانسان يمكن ان يتخيل حالة تكون فيها كمية العمال المستخدمة نسبة الى ميات الدواخل اخرى كبيرة لدرجة اى زيادة في عدد العمال سوف ينتج عنه اختناق وعدم كفاءة وتعريف دارة الانتاج على انها تعطى الحد الاعلى من المنتجات لكل مجموعة من الدواخل المتاحة ، لا تلغى هذا الاحتمال (احتمال حدوث اختناق وعدم كفاءة) . فاذا كان MP الخاص بالداخل x_1 سالبا وكان MP الخاص بالداخل x_2 موجبا فان RTS يكون سالبا كما هو الحال عند نقطة A في الشكل ٤-٤ فاذا تحركنا على المنحنى من A الى B فان النتيجة هي انخفاض في x_1 و x_2 معا . ومن الواضح ان نقطة B تكون بفضل على نقطة A اذا كان لصاحب المؤسسة ان يدفع اسعارا موجبته للدواخل التي يحتاجها . فصاحب المؤسسة المائل لا يمكن ان يجعل الجزء المائل بشكل موجب من المنحنى ، بمعنى انه سوف لا يستخدم اى مجموعة يكون ناتجها MP سالبا

لوحداث من الدواخل وتكون حوات الخطوط OC و OD المساحة التي يستطيع اى صاحب مؤسسة اقل العمل داخلها .



شكل دالة الإنتاج : Shape of the Production Function

نفترض مادة بان دوال الانتاج تعطك منحنيات تساوى الكميات بشكل محدد وبانحناء الى جهة نقطة الاصل مع انخفاض في RTS كلما X_1 عوضت من X_2 على المنحنى فالمنحنيات في الشكل (٣-٤) تكون من نفس النوع، وذلك في الشكل (٤-٤) ايضا من نفس النوع ما دامت داخل المساحة المحدودة بحافة الخطوط OC و OD

مثال : اعتبر مجالا لانفا لدالة الانتاج المعطاه بالمعادلة (٥-٤) وهى

$$q = Ax_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}} - Bx_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}$$

وهذه الدالة تزايديه (لها MP موجب) اذا كانت $0 < x_1x_2 < 2A/3B$ ونجد ان اللامتساويه لدالة تكون شبه - مقعرة بانضباط وانتظام واستندام مثل التي اعطيت بالمعادلة (٥-٢) تكون ايضا محققة بالنسبة للتعبير $0 < x_1x_2 < 2A/3B$ وعليه فان (٥-٤) تكون دالة لها قيم موجبه وهى شبه مقعرة بانتظام داخل المجال المعطى .

وفى نطاق حالة وجود بعدين two-dimensional case فان دالة الانتاج تكون دالة

مقعرة مانضباط (راجع الجزء A-3) اذا كان :

$$f_{11} < 0 \quad f_{22} < 0$$

$$(٩-٤) \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

ونجد ان الاشتقاقات الجزئية المباشرة الثانية للمعادلة (٥-٤) تكون سالبة لقيم $x_1, x_2 > A/3B$ وتكون هيسيان المحددة (٩-٤) موجبة فقط للمجال :

$$(1-٥) \quad \frac{2A}{3B} < x_1, x_2 < \frac{2A}{3B}$$

وطيه فان (٥-٤) تكون دالة شبه - مقعرة تزايدية ، لها قيم موجبه ضمن هذا المجال .
وانه من السهل الحصول على المجالات لذلك الفصل class من دوال الانتاج المعطاه بالمعادله : $q = Ax_1^\alpha x_2^\beta$ بحيث ان $\alpha, \beta > 0$ وان الناتج وكذلك تقسم MP مما تكون موجبة للقيم $x_1, x_2 > 0$ ومن الممكن اثبات تحديد منحنيات تساوى الكميات الخاصة بالقيم الموجبه للدواخل على النحو التالي :

$$x_2 = \left(\frac{q}{A}\right)^{1/\beta} x_1^{-\alpha/\beta}$$

$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\beta^2} \left(\frac{q}{A}\right)^{1/\beta} x_1^{-(\alpha+2\beta)/\beta} > 0$$

وعلى هذا فسوف تكون المنحنيات على الشكل المطلوب لاي قيم موجب لـ α و β ولان اضهر الشروط التي سوف يكون بسببها دوال من دوال الفصل class السابق مقعرة بانضباط ولذلك نجد ان الاشتقاقات الجزئية الثانية المباشرة لدالة الانتاج سوف تكون سالبة كما هو مطلوب من اجل مقعرتها اذا كانت α و β اقل من واحد بحيث ان :

$$f_{11} = \alpha(\alpha-1) \frac{q}{x_1^2} \quad f_{22} = \beta(\beta-1) \frac{q}{x_2^2}$$

ويتقسم المعادلة (٩-٤) نحصل على :

$$\alpha(\alpha-1) \frac{q}{x_1^2} \beta(\beta-1) \frac{q}{x_2^2} - \left(\frac{\alpha\beta q}{x_1 x_2}\right)^2 = (1-\alpha-\beta) \frac{\alpha\beta q^2}{x_1^2 x_2^2}$$

والتي يمكن ان تكون موجبة او سالبة او صفرا اعتمادا على قيم α و β فاذا كانت $\alpha + \beta < 1$ فانها تكون موجبة وتكون دالة الانتاج مقعرة بانضباط لقيم x_1 و x_2 الموجبه ولكن اذا كانت $\alpha + \beta = 1$ فانها تكون صفرا وتكون دالة الانتاج مقعرة وليست مقعرة بانضباط اما اذا كانت $\alpha + \beta > 1$ فانها تكون سالبة وتكون دالة الانتاج مقعرة وليست محدبه .

Elasticity of Substitution

مرونة التعويض :

اذا كان لدالة الانتاج منحنيات (تساوى الكميه) محدبه ، فان معدل التعويض الفنى RTS بقسمة X_1 لقيمة X_2 وان النسبة x_2/x_1 سوف ينخفضان معا عندما تعوض X_2 مكان X_1 على المنحنى .
وتعرف مرونة التعويض (ويرمز لها بالرمز (σ)) بانها رقم يعبر عن pure number لقياس

المعدل الذى يتم من خلاله عملية التعويض ومدقة أكثر تعرف المرونة التعويضية بانها
معدل التغير النسبى لنسبة الدواخل مقسومة على معدل التغير النسبى لـ RTS

$$\sigma = \frac{d \ln (x_2/x_1)}{d \ln (f_1/f_2)} = \frac{f_1/f_2}{x_2/x_1} \frac{d(x_2/x_1)}{d(f_1/f_2)}$$

$$d(x_2/x_1) = (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)/x_1^2 \quad \text{وتمويض}$$

$$d(f_1/f_2) = \frac{\partial(f_1/f_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(f_1/f_2)}{\partial x_2} dx_2$$

$$dx_2 = -(f_1/f_2) dx_1$$

وكذلك

$$\sigma = \frac{f_1(f_1 x_1 + f_2 x_2)}{f_2 x_1 x_2 \left[f_1 \frac{\partial(f_1/f_2)}{\partial x_2} - f_2 \frac{\partial(f_1/f_2)}{\partial x_1} \right]} \quad \text{ومن المعادلة (٨-٤)}$$

ويتقييم الحدود داخل الأقواس من المعادلة (٨-٤) نحصل على :

$$\sigma = \frac{f_1/f_2 (f_1 x_1 + f_2 x_2)}{x_1 x_2} \quad (١١-٤)$$

بحيث ان $\sigma = 2f_{12}/f_2 - f_1/f_{22} - f_1/f_{11}$ تكون موجبه بسبب افتراض شبه - التقمير المنضبط وبما ان الحدود فى المعادلة (١١-٤) كلها موجبه، فان مرونة التعويض سوف تكون موجبه ايضا وبمعنى دوال الانتاج قد يكون لها مرونة تعويض ثابتة ، ولكن σ عموما سوف تتغير من نقطة لاخرى على دالة الانتاج وان قيمة σ تعكس معدل التغير لميل المنحنى من منحنيات تساوى الكميات isoquant وكلما أصبحت σ كبيرة كلما اصبح المنحنى أكثر انحناءاً .

مثال : اضرب الفعل class من دوال الانتاج المعطاة بالمعادلة $q = Ax^\alpha x_2^\beta$

بحيث ان $\alpha, \beta > 0$. ويتقييم المعادلة (١١-٤) نجد ان :

$$\sigma = \frac{\alpha q \beta q (\alpha q + \beta q)}{x_1 x_2} \frac{x_1^2 x_2^2}{q^2 \alpha \beta (\alpha + \beta)} = 1$$

ومن هذا يتضح ان هذا الفعل من دوال الانتاج يكون له مرونة تعويض مساويه للوحده
فى كل مكان من الدالة .

٤ - ٢ سلوك تحقيق الأمثلية : OPTIMIZING BEHAVIOR

ان النقاش الراهن يكون محصورا على الحالة التى يقوم فيها صاحب المؤسسة بشـبـر^١
 X_1 و X_2 من الاسواق التنافسيه الكامله perfectly competitive markets باسعار ثابتة
للوحدة الواحده وبهذا يكون اجمالي تكلفة الانتاج (C) مثلا بالمعادله الخطيه التاليه:

$$C = r_1 x_1 + r_2 x_2 + b \quad (١٢-٤)$$

بحيث ان r_1 و r_2 يمثلان بالترتيب اسعار x_1 و x_2 وأن b تمثل التكلفة لاي داخل

ثابت • ونعرف خط تساوى التكلفة isocost line بأنه العمل الهندسى لمجاميع
الدواخل التى قد تشتري بتكلفة اجمالية محددة C^0 :

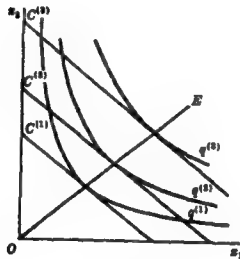
$$C^0 = r_1 x_1 + r_2 x_2 + b \quad (١٢-٤)$$

بحيث أن C^0 تمثل متغير بقيمة ثابتة •

وحل المعادله (١٢-٤) لقيم x_1 نحصل على :

$$x_1 = \frac{C^0 - b}{r_1} - \frac{r_2}{r_1} x_2$$

ونعرف ميل خط تساوى التكلفة بأنه يساوى سالب نسبة اسعار الدواخل وتعرف قاطع
intercept خط تساوى التكلفة على المحور x_1 وهو يساوى $(C^0 - b)/r_1$ بأنه الكمية من x_1
التي يمكن شراؤها اذا كانت التكاليف المبدئية باسرها entire outlay فيما هذا (باستثناء)
تكلفة الدواخل الثابتة قد صرفت على x_1 ونعرف قاطع الخط على المحور x_2 وهو يساوى
 $(C^0 - b)/r_2$ بأنه الكمية من x_2 التي يمكن شراؤها اذا كان هذا المقدار قد صرف على x_2
وشكل (٥-٤) يبين بعض افراد خطوط تساوى التكلفة فنجد كلما كبر اجمالى التكاليف
المبدئية التى يمثلها خط تساوى التكلفة ، كلما كبرت القواطع على المحورين x_1 و x_2
وبالتالى كلما بعدت هذه الخطوط من نقطة الاصل كما هو واضح من الخطوط $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}$
بحيث ان $C^{(1)} < C^{(2)} < C^{(3)}$ ونجد ايضا ان افراد هذه الخطوط تملأ الربح الغير سالب
من السطح المستوى $x_1 x_2$ •



شكل (٥ - ٤)

تحقيق الحد الأعلى المفيد للناتج : **Constrained Output Maximization**

نبين لنا من المناقشات السابقة في سلوك المستهلك انه يقوم بتحقيق الحد الاقصى (أو الاقصى) للمنفعة مرئية (تحت شرط) قيد ميزانيته . فالسألة المطروحة بالنسبة للمؤسسة هي تحقيق (او الحصول على) الحد الاقصى للناتج المعطى في المعادله (١٣-٤) فصاحب المؤسسة يرغب في الحصول على اكبر كمية ممكنة من الناتج بتكاليف محدثية معطاه .

وطيه فاننا نقوم بتكوين معادلة لاقتراح :

$$V = f(x_1, x_2) + \mu(C^0 - r_1x_1 - r_2x_2 - b)$$

بحيث ان $\mu \neq 0$ تمثل مضروباً لاقتراح غير محدد . ووضع الاشتقاقات الجزئية للمعادله السابقة بالنسبة لـ x_1, x_2 و μ مساوية لصفر نحصل على :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = f_1 - \mu r_1 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = f_2 - \mu r_2 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = C^0 - r_1x_1 - r_2x_2 - b = 0$$

وننقل حدود الانحراف الى الجانب الايمن للمعادلتين الاوليتين ونقسم المعادله الاولى على الثانية نحصل على :

$$(14-1) \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

فشرط الدرجة الاولى تنص على ان نسبة MP الخاص بـ x_1 و x_2 الخاص بـ μ يجب ان تساوي نسبة اسماهما ويمكن ايضا النص على شروط الدرجة الاولى بعدة طرق اخرى مكافئة للاولى .

وبحل المعادلتين الاوليتين لقيمة :

$$(14-2) \quad \mu = \frac{f_1}{r_1} = \frac{f_2}{r_2}$$

وهذه المعادلة تعني ان الاسهام للناتج من صرف اخر زبال على كل داخل يجب ان يساوى μ فالمضروب μ هو اشتقاق الناتج بالنسبة للتكلفة مع المحافظة على ثبات

الاسعار وتغيير الكميات (١).

واخيرا بتمويض $RTS = f_1/f_2$ من المعادلة (٨-٤) في المعادلة (١٤-٤) نحصل على :

$$(12-4) \quad RTS = \frac{f_1}{f_2}$$

ومن الممكن التعبير عن شروط الدرجة الاولى على انها تعادل المساواة بين RTS ونسبة اسعار الداخل والتركيبات الثلاثة لشروط الدرجة الاولى والمعطاء بالمعادلات (١٤-٤) ، (١٥-٤) ، (١٦-٤) تمثل بدائل متكافئة فاذا تحققت اى واحدة منهم فان الثلاثة جميعا تتحقق .

أن النمط المعطى بالمعادلة (١٦-٤) له تفسير هندسيا واضحا . ان خليط الداخل والاقل optimum يعطى بنقطة التماس بين منحنى تساوى الكميات وبين خط تساوى التكلفة النسبي . فاذا كانت $C^{(n)}$ (انظر الشكل رقم ٥-٤) تمثل مستوى التكلفة المقرر عليه مسبقا فان الحد الاعلى للنتاج يكون $q^{(n)}$ ان شروط الدرجة الثانية تتطلب بان تكون محددة هيبيان المحدودة موجبه :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

ومن الممكن استخدام شروط الدرجة الثانية لاثبات أن معدل التغير لميل خط التماس لمنحنى تساوى الكميات لا بد وان يكون موجبا (بمعنى ان $d^2xy/dx^2 > 0$) عند نقطة التماس مع خط تساوى التكلفة (٢) .

وسوف يضمن افتراض ان دالة الانتاج تكون شبه - مقعرة بانضباط ان شرط الدرجة الثانية سوف يتحقق متى ما تحققت شروط الدرجة الاولى وهى نفس المناقشة التى استخدمت لاشتقاق المعادلة (١٤-٢) من المعادلة (١٢-٢) .

(١) اذا افترضنا ان التكلفة قابلة للتغيير ، فان مشتق معادلة التكاليف (١٢-٤) يكون

$$dC = p_1 dx_1 + p_2 dx_2$$

وبتمويض $p_1 = f_1/\mu$ وكذلك $p_2 = f_2/\mu$ من شروط الدرجة الاولى نحصل على :

$$dC = \frac{1}{\mu} (f_1 dx_1 + f_2 dx_2)$$

وبقسمة هذا التعبير على مشتق دالة الانتاج (٧-٤) يصبح اشتقاق الناتج بالنسبة للتكلفة مع الاحتفاظ بالاسعار ثابتة على النحو التالى :

$$\frac{dq}{dC} = \mu \frac{f_1 dx_1 + f_2 dx_2}{f_1 dx_1 + f_2 dx_2} = \mu$$

(٢) ان الاثبات الاساسى لهذه النقطة يكون مماثلا للاثبات الذى استخدم لاثبات ان معدل التغيير لميل منحنى السوا" يجب ان يكون موجبا عند نقطة الحد الاقصى للنقطة .

تحقيق الحد الأدنى المقيد للتكلفة : **Constrained Cost Minimization**

قد يرغب صاحب المؤسسة في تحقيق الحد الأدنى للتكلفة إنتاج مستوى معين من منتج ما ، ففي هذه الحالة تكون المعادلة (١٢-٤) معادلة لتحقيق الحد الأدنى تحت شرط معادلة (٦-٤) ويتكون دالة لقترانج نحصل على :

$$Z = r_1x_1 + r_2x_2 + b + \lambda[q^0 - f(x_1, x_2)]$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئية للمعادلة السابقة بالنسبة لـ x_1, x_2, λ مساوية لصفر ، نحصل على

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = r_1 - \lambda f_1 = 0$$

(١٧-٤)

$$\frac{\partial Z}{\partial x_2} = r_2 - \lambda f_2 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = q^0 - f(x_1, x_2) = 0$$

وبما ان r_1 و f_1 يكونان موجبتان معا ، فان λ تكون موجبة ايضا وبتحريك حدود السعر للمعادلتين الاوليتين الى الجانب الايمن ، وقسم المعادلة الاولى بالتانيه نحصل على :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{or} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{f_1}{r_1} = \frac{f_2}{r_2} \quad \text{or} \quad \text{RTS} = \frac{r_1}{r_2}$$

فشرط الدرجة الثانية لتحقيق الحد الأدنى للتكلفة تحت قيد المنتج تكون مشابهة لشرط تحقيق الحد الاطلى للمنتج تحت قيد التكلفة وضروب لاقتترانج λ يكون مقلوب المضروب μ ، وانه اشتقاق التكلفة بالنسبة لمستوى المنتج (عرفناها على انها التكلفة الحدية) **marginal cost** في الجز' (٤-٤) .

وفي الحالة الراهنة فان صاحب المؤسسة يتحمل على اوطى خط تساوى التكلفة والذي له نقطة واحدة مشتركة على الاقل مع منحنى مختار من منحنيات تساوى الكمية . فهو يمكن أن ينتج $q^{(1)}$ (انظر الشكل ٥-٤) بتكلفة قدرها $C^{(1)}$ أو $C^{(2)}$ ولكن أنزل من أى واحدة منهما وأقل تكلفة يدفعها صاحب المؤسسة تقع على خط تساوى التكلفة الذى يكون ملاصقا لمنحنى تساوى الكميات المختارة .

ويتطلب شرط الدرجة الثانية بان تكون محددة هيسيان المحدودة سالبة :

$$\begin{vmatrix} -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -f_1 \\ -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

وتعويض $f_1 = -p_1/\lambda$ وتعويض $f_2 = -p_2/\lambda$ وضرب العمودين الأولين بالقدار $1/\lambda$ ثم ضرب الصف الثالث بالقدار $-\lambda^2$ وضرب العمود الثالث بالقدار λ ^(١) نحصل على :

$$\begin{vmatrix} -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -\frac{p_1}{\lambda} \\ -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -\frac{p_2}{\lambda} \\ -\frac{p_1}{\lambda} & -\frac{p_2}{\lambda} & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -\frac{p_1}{\lambda} \\ f_{21} & f_{22} & -\frac{p_2}{\lambda} \\ \frac{p_1}{\lambda^2} & \frac{p_2}{\lambda^2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

وما أن $\lambda > 0$ فإن :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

وشروط الدرجة الأولى هو نفسه الشرط في حالة تحقيق الحد الاعلى القيد للنتائج .
 فاذا كانت دالة الانتاج شبه - مقعرة بانضباط عادي فان كل نقطة تماس بين منحنىي تساوي الكميات وخط تساوي التكلفة . تكون هي الحل لمسألة تحقيق الحد الاعلى القيد والحد الأدنى القيد معا . فاذا كانت ^{III} q (انظر الشكل ٥-٤) تمثل الحد الاعلى للنتائج الذي يمكن الحصول عليه من تكلفات محدثة تساوي ^{III} c من الريالات ، فان ^{III} c من الريالات تكون هي الحد الأدنى للتكلفة التي بها يتم انتاج ^{III} q والمحل الهندسي لنقطة التماس (الخط OE في الشكل ٥-٤) يعطي مجرى التوسع expansion path للمؤسسة . فماحب المؤسسة الماقل سوف يختار فقط مجاميع الدواخل التي تقع على هذا المجرى او الصار واساسا فان مجرى التوسع (او صار التوسع) يمثل دالة ضمنية implicit function للمتغيران x_1 و x_2 بحيث أن :

$$g(x_1, x_2) = 0 \quad (١٨-٤)$$

والتي يتحقق بها شروط الدرجة الأولى والثانية للحصول على الحد الاعلى والادنى .
 مثال : اعتبر دالة الانتاج المعطاة بالمعادلة (٥-٤) فبحساب نسبي MP للداخل x_1 والداخل x_2 :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{2Ax_1x_2^2 - 3Bx_1^2x_2}{2Ax_1^2x_2 - 3Bx_1x_2^2} = \frac{x_2(2Ax_1x_2 - 3Bx_1^2)}{x_1(2Ax_1x_2 - 3Bx_1^2)} = \frac{x_2}{x_1}$$

وبوضفها مساوية لنسبة اسعار الدواخل نحصل على :

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

(١) وضرب العمود الاول بالقدار $1/\lambda$ - يزيد من قيمة المحددة بنفس قيمة المضروب به وضرب العمودان الاول والثاني معا في القدار $1/\lambda$ - يزيد من قيمة المحددة بالقدار $1/\lambda^2$ وقيمتها سوف لا تتغير اذا كان صف المحددة باكلفة قد ضرب بالقدار λ انظر الجزء ٨-١ .

وبوضع شروط الدرجة الاولى هذا على نسط دالة ضمنية فان مجرى التوسع سوف يعطى بالمعادلة الخطية الآتية :

$$r_1x_1 - r_2x_2 = 0$$

وهذا يطابق مجرى التوسع OE فى الشكل (٥-٤) .

ودالة الانتاج $q = ax_1^2x_2$ هذه لها ايضا منحنيات تساوى الكمية بحيل بيساوى $f_1/f_2 = x_2/x_1$ وهذه الدالة تظهر وكأنها مغالفة تماما لتلك المعطاة بالمعادلة (٥-٤) وبالرغم من هذا فان لها نفس المنحنيات . واذا تبينا نفس نقاش الباب الثانى ، فان هذا سوف يوضح ان دوال الانتاج تكون تحويلات مطردة موجهة الواحدة للأخرى ضمن المحال الذى تكون له المعادلة (٥-٤) شبه - المقعرة بانضماط عادى : $0 < x_1x_2 < 2A/3B$ فاننا وضعنا وللمرة الثانية $z = x_1x_2$ بحيث ان $q = az^*$ وطبعنا التحويلة المطردة الموجبة $q^* = (q/a)^{1/2}$ بحيث ان $q^* = z$ فاننا غاضلنا الان المعادلة (٥-٤) بالنسبة

$$\frac{dq}{dz} = 2Az - 3Bz^2$$

وهذا الاشتقاق يكون موجبا للقيم $0 < z < 2A/3B$ والذى يثبت ان المعادلة (٥-٤) ماهى الا تحويلة مطردة موجهة للمعادلة $q^* = z$ والتى هى ، بدورها تكون تحويلة مطردة موجهة لدالة الإنتاج الأساسية .

Profit Maximization

الحصول على الحد الأعلى من الربح :

ان صاحب المؤسسة ، له حق تغيير مستويات التكلفة والانتاج ويفضل فى النهاية الحصول على الحد الأعلى من الربح كهدف نهائى بدلا من حل مسائل تحقيق حدا على اواذنى مقيدة . فايرادات revenue صاحب المؤسسة من بيع منتجاته فى سوق تنافسية كاملة تعطى بعدد الوحدات المباعة مضروبة فى سعر الوحدة الثابتة الذى يتحصل عليه صاحب المؤسسة مقابل المنتج المباع وعليه فان ربحه profit (ونرمز له بالرمز π) هو الفرق بين اجمالى ايراداته واجمالى التكلفة .

$$\pi = pq - C$$

أو بتعويض $q = f(x_1, x_2)$ من المعادلة (١-٤) وبتمويض $C = r_1x_1 + r_2x_2 + b$ من المعادلة (١٢-٤) نحصل على :

$$\pi = pf(x_1, x_2) - r_1x_1 - r_2x_2 - b$$

والربح عادة يكون بدلاله x_1 ، x_2 ويتحقق حدة الاطى بالنسبة لباذنين المتغيرين :
a function of

وبوضع الاشتقاقات الجزئية للربح π بالنسبة لـ x_1 و x_2 مساوية لصفر نحصل على:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = pf_1 - r_1 = 0 \quad \frac{\partial \pi}{\partial x_2} = pf_2 - r_2 = 0$$

وبتحريك حدود السعر والداخل الى الجانب الايمن نحصل على:

$$(19-4) \quad pf_1 = r_1 \quad pf_2 = r_2$$

فلاشتقاقات الجزئية لدالة الانتاج بالنسبة للداخل inputs تمثل الانتاجات الحدية MPs للداخل. فقيمة الانتاج الحدى MP للداخل X_1 (وهي تساوى (pf_1)) تكون المعدل الذى يستطيع صاحب المؤسسة من خلاله زيادة فى تطبيق X_1 وتتطلب شروط الدرجة الاولى لتحقيق الحد الاعلى من الربح فى المعادلة (19-4) بهان يستخدم كل داخل الى النقطة التى تكون عندها قيمة انتاجه الحدى تساوى سعره.

ويستطيع صاحب المصنع ان يزيد من ربحه طادامت الاضافة الى ايراداته من تشغيل وحدة اضافية من X_1 تعوق تكلفته وتقع مجموعة الداخل والخارج المثل على مجرى التوسع لان المعادلة (19-4) تمثل حالة خاصة من المعادلة (14-4).

وتتطلب شروط الدرجة الثانية ان تتبادل الاساسيات الصغرى principal minors

لمحددة هيسيان فى الاشارة :

$$(20-4) \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} = pf_{11} < 0 \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} = pf_{22} < 0$$

وكذلك :

$$(21-4) \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} \end{array} \right| = p^2 \left| \begin{array}{cc} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{array} \right| > 0$$

وتتطلب شروط (20-4) ان يتناقص الربح بالنسبة لزيادة تطبيق اما X_1 أو X_2 ويضمن شرط (21-4) ان يتناقص الربح بالنسبة لزيادة تطبيق X_1 و X_2 معا وبما أن $p > 0$ فان شروط (20-4) تتطلب ان يتناقص الانتاج الحدى لكلا الداخلين X_1 و X_2 فاذا كان احد الانتاج الحدى للداخلين متزايدا فان اى تحرك من النقطة التى يتحقق بها شروط الدرجة الاولى سوف ينتج عنه زيادة فى قيمة MP وبما ان سعره ثابتا ، فان صاحب المؤسسة يستطيع زيادة ربحه بزيادة كمية الداخل وتتطلب شروط (20-4) وشروط (21-4) ان تكون دالة الانتاج مقعرة بانضباط فى جوار النقطة التى يتحقق عندها شروط الدرجة الاولى بحيث $X_1, X_2 \geq 0$ اذا وجدت مثل هذه النقطة . ولقد حصرت الحلول فى المناطق المقعرة بانضباط لدالة الانتاج على مستويات غير سالبة للداخل والخارج فاذا لم يكن لدالة الانتاج مثل هذه المناطق فان حلول تحقيق

الحد الاطى من الربح بالطرق التنافسية من النوع السابق لا يمكن الحصول عليها . فاذا كانت دالة الانتاج مقعرة بانضباط فان النقطة التي يتحقق عندها شروط الدرجة الاولى تكون حل فريد لتحقيق الحد الاطى من الربح .

INPUT DEMANDS

٤ - ٣ طلبات الدواخل :

Input Demand Functions

دوال طلب الدواخل :

نستطيع اشتقاق طلبات الدواخل للنتج عن طريق الطلب البارز للسلعة التي ينتجها ونحصل على دوال طلب الدواخل بحل معادلة شروط الدرجة الاولى وهى المعادله (١٩-٤) للكيات x_1 و x_2 بدلاله r_1 و r_2 وكذلك بدلالة p وهذه تكون معرفى للاجزاء المقعرة بانضباط لدالة الانتاج بحيث ان شروط الدرجة الثانية تكون محققة . وتشبه دوال طلب الدواخل للنتج دوال الطلب العادية للمستهلك من عدة جهات وان من الواضح من (١٩-٤) ان دوال الطلب الدواخل تكون متجانسة من الدرجة صفرى الثلاثة اسعار (راجع بالتخصيص الجز' ٣-٢) ويمكن تعريف المرونة لكل واحد من الدواخل بالنسبة لكل واحد من الاسعار . ونحصل على منحى طلب الداخل x_1 عن طريق رسم دالة طلب الداخل بدلالة r_1 فقط بافتراض ان r_2 و p كميان متغيرتان بقيمتين ثابتتين .

مثال : اعتبر الفصل class من دوال الانتاج المعطاة بالمعادلة $q = Ax_1^\alpha x_2^\beta$ بحيث ان $\alpha, \beta > 0$ وان $\alpha + \beta < 1$ والتى اثبتا فى الجز' (١-٤) انها مقعرة بانضباط للقيم $x_1, x_2 > 0$ ومن دالة الربح نجد ان :

$$\pi = pAx_1^\alpha x_2^\beta - r_1x_1 - r_2x_2$$

ونضع اشتقاقاتها الجزئية مساوية لصفر :

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = p\alpha Ax_1^{\alpha-1} x_2^\beta - r_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = p\beta Ax_1^\alpha x_2^{\beta-1} - r_2 = 0$$

وبحل هذه المعادلة لقيم x_1 و x_2 نحصل على دوال طلب الداخل المقابله :

$$(٢٢-٤) \quad x_1 = \left(\frac{\alpha}{r_1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{r_2} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} (Ap)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} = \phi_1(r_1, r_2, p)$$

$$x_2 = \left(\frac{\alpha}{r_1} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{r_2} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (Ap)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} = \phi_2(r_1, r_2, p)$$

بحيث ان $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ وسوف ينخفض الطلب على كل داخل من الدواخل كلما زادت r_1 او r_2 وسوف يزداد الطلب على كل داخل كلما زادت p .

وكما تغيرت الاسعار فان المنتج سوف يغير من مستوياته الداخلة لتحقيق شروط الدرجة الاولى والمعادلة (١٩-٤) ومتفاضل (١٩-٤) تفاضلا تاما وأعادة ترتيب الحدود نحصل على :

$$\begin{aligned} pf_{11} dx_1 + pf_{12} dx_2 &= -f_1 dp + dr_1 \\ pf_{21} dx_1 + pf_{22} dx_2 &= -f_2 dp + dr_2 \end{aligned} \quad (٢٢-٤)$$

ويحل المعادلة (٢٢-٤) لقيم dx_1 و dx_2 باستخدام قاعدة كرامر Cramer's rule

$$dx_1 = \frac{1}{p\mathcal{H}} [f_{22} dr_1 - f_{12} dr_2 + (f_{12}f_2 - f_{22}f_1) dp] \quad (٢٤-٤)$$

$$dx_2 = \frac{1}{p\mathcal{H}} [-f_{21} dr_1 + f_{11} dr_2 + (f_{21}f_1 - f_{11}f_2) dp]$$

بحيث أن $\mathcal{H} = (f_{11}f_{22} - f_{12}^2) > 0$ بسبب افتراض التقرص المنخفض وقسمة طرفي المعادله الاولى في (٢٤-٤) على dr_1 ووضع $dr_2 = dp = 0$ نحصل على :

$$\frac{\partial x_1}{\partial r_1} = \frac{f_{22}}{p\mathcal{H}} < 0 \quad (٢٥-٤)$$

وبما ان $p > 0$ وأن $f_{22} < 0$ من المعادلة (٢٥-٤) فان معدل تغير مشتريات المنتج من X_1 بالنسبة للتغيرات في اسعاره ، على البقاء على ثبات الاسعار الاخرى ، تكون دائما سالبة وسوف تكون ضعيفات طلب الداخل للنتج دائما مائلة ٠٠٠ الى الاسفل . وهذه تكون واحدة من الحالات القليلة في علم الاقتصاد التي تكون فيها إشارة الاشتقاق غير مبهمه unambiguous ويوجد فقط نتيجة معينة ، ولكنه لا يوجد نظير لنتيجة الدخل للمستهلك في نظريات الحصول على الحد الاعلى للربح لصاحب الانتاج (١).

وقسمة طرفي المعادلة الاولى من (٢٤-٤) على dr_2 ووضع $dr_1 = dp = 0$ نحصل على :

$$\frac{\partial x_1}{\partial r_2} = -\frac{f_{12}}{p\mathcal{H}}$$

وسوف يكون لهذا الاشتقاق إشارة معاكسة لإشارة الاشتقاق الجزئي الثاني المتداخل f_{12} the second cross partial derivative وفي معظم الحالات التي درست من قبل الاقتصاديين نجد ان زيادة في كمية احد الداخل سوف يؤدي الى زيادة الانتاج الحدي للداخل الاخر ، بمعنى ان $f_{12} > 0$ وعلى هذا فان اي زيادة في سعر واحد من الداخل سوف يؤدي عادة الى انخفاض في استخدام الداخل الاخر .

وقسمة طرفي المعادلة (٢٣-٤) على dp ووضع $dr_1 = dr_2 = 0$ نحصل على :

(١) ويمكن الحصول على نظير لمعادلة سلتزكي لصاحب الانتاج الذي يرغب في الحصول على الحد الاعلى من المنتجات تحت شروط قيد التكلفة وسوف يتحمل على نتيجة تكلفة "cost effect" غير متألقة .

$$\frac{\partial x_1}{\partial p} = \frac{(f_{12}f_2 - f_2f_1)}{p^2 \Delta}$$

ونجد عادة أن أي زيادة في سعر الناتج سوف يؤدي إلى زيادة في الطلب على الداخـل وهذا الاشتقاق يكون موجبا . ومن أجل أن يكون هذا الاشتقاق سالبا فإنه من الضروري أن يكون $f_{12} < 0$ وأن تكون $f_{12}f_2$ أكبر ، في تمتعها المطلقة من f_2f_1 .

تطبيق لقاعدة شاتيلير : An Application of the Le Chatelier Principle

أن دالة الربح لحالة وجود n من الداخـل هي :

$$(26-4) \quad \pi = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

وتنص قاعدة شاتيلير على الآتي :

$$(27-4) \quad \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_i} \right)_0 \leq \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_i} \right)_1 \leq \dots \leq \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_i} \right)_{n-1} \quad i = 1, \dots, n$$

بحيث أن الارتام على أطراف الأتياس عزز إلى الأعداد الإضافية للقيود (أو الشروط) التي أضيفت إلى عملية الحصول على الحد الأعلى للمعادلة (26-4) وعليه فإن الرقم (٥) على طرف القوس يشير إلى عملية الحصول على الحد الأعلى بدون قيد ولا شرط (عدد الشروط أو القيود على المعطية = ٥) بهذا الرقم (١) يشير إلى وجود قيد واحد وهكذا وهذه القيود قد صحت بحيث أن x_i تمثل الحد الأعلى بغض النظر عن عدد القيود أو الشروط .

ففي حالة عدم وجود قيد أو شرط فإن المعادلة (26-4) تبين أن أي زيادة في سعر الداخـل سوف ينتج عنه تدني في الطلب . وهذا يأتي من خلال تدني في الانتاج وفي أغلب الحالات من خلال تمهين داخـل أخرى مكان الداخـل الذي زاد سعره . وزيادة القيود لا يستطيع زيادة الفرصة لتمهين داخـل أخرى ، ومن المحتمل أنه ينقص مثل هذه الفرصة .

وتعكس قاعدة شاتيلير ، كما أعطيت في المعادلة (27-4) هذه الحالة بالنسبة إلى أن القيمة المطلقة لتدني الطلب نتيجة لارتفاع في السعر لا يمكن زيادتها بأضافة قيود وقد يحدث وتخفف إذا زدنا القيود . ويعتمد الاثبات العام لقاعدة شاتيلير على الخصائص المميزة المحددة هيتمان لدالة الانتاج المقمرة بانعكاس .

مثال : عرض فيما يلي تطبيقاً للقاعدة في حالة وجود داخـلين فقط فإذا افترضنا أن x_1 تمثل العمل labor وأن x_2 تمثل رأس المال capital وقارنا تأثير الزيادة في معدل الأجر wage rate على طلب المؤسسة للعمل في المدى الطويل عندما تكون كمية

رأس المال متغيرة للتأثير في المدى القصير عندما تكون كمية رأس المال ثابتة ، نجد ان معادلة (٢٥-٤) تعطينا التأثير على المدى الطويل ٠ اما على المدى القصير ، فأننا نحتاج القيام بعملية الحصول على الحد الاعلى على النحو التالي :

$$\pi = pf(x_1, x_2) - r_1x_1 - r_2x_2$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئية مساوية للصفر نحصل على :

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = pf_1 - r_1 = 0$$

نجد انه من الواضح أن x_1^* لا تزال هي المثلث optimal بالتفاضل التام لشروط الدرجة الاولى ن. د أن :

$$pf_{11} dx_1 - dr_1 = 0$$

و نستخدم هذه النتيجة مع (٢٥-٤) لتقييم المعادلة (٢٧-٤) لنحصل على :

$$\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial r_1} \right)_0 = \frac{f_{22}}{pf_{11}} \leq \frac{1}{pf_{11}} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial r_1} \right)_1$$

وبما أن f_{11} وكذلك f_{22} سالبيان معا فان $f_{11}/f_{22} \geq (f_{11}/f_{22} - f_{12}^2)$ ويتبع مع هذا الحصول على اللامساوية المطلوبة ٠ وسوف يكون الانخفاض في التوظيف employment على المدى الدويل أكبر منه على المدى القصير طالما تكن $f_{12} = 0$.

COST FUNCTIONS

٤ دوال التكلفة :

يفترض الاقتصاديون عادة ان مسألة الحصول على المجموعات المثلى للدواخل قد حلت وبالتالي فانهم يقومون بتحليلهم للمؤسسة بالنسبة لاجراءاتها وتكلفتها بدلالة الناتج ومشكلة صاحب المسألة ، بعد ذلك هي اختيار الناتج الذي يمكنه من الحصول على الحد الأقصى من الربح ٠

Short-Run Cost Functions

دوال التكلفة في المدى القصير :

يمكن اشتقاق دوال التكلفة من المعلومات التي يحتويها الجبر (١-٤) والجبر (١-٤) من دالة الانتاج (١-٤) ودالة التكلفة (١٢-٤) ودالة مجرى التوسع (١٨-٤) وحجم :

$$q = f(x_1, x_2)$$

$$C = r_1x_1 + r_2x_2 + b$$

$$0 = g(x_1, x_2)$$

(١) نستخدم هنا التعبير "دالة التكلفة" cost function لتدل على التكلفة بدلالة اسعار الدواخل والخارج بينما التعبير "معادله التكلفة" cost equation يستخدم ليدل على التكلفة من خلال مستويات الدواخل واسعارها :

فإذا افترضنا أن هذه المجموعة من المعادلات يمكن ضمها في معادلة واحدة بحيث ينص على أن تكون التكلفة كدالة صريحة explicit function بالنسبة لمستوى الناتج وأسعار الداخِل زائداً تكلفة الداخِل الثابتة .

$$(28-4) \quad C = \phi(q, r_1, r_2) + b$$

وبالنسبة لأسعار الداخِل ، فإن دالة التكلفة ϕ تكون :

(1) غير تناقصية (2) متجانسة من الدرجة الأولى (3) قطعة

وتظهر الخاصية (1) بوضوح من شكل منحنيات السواء فإذا زادت أسعار واحداً أو أكثر من الداخِل وانما استخدمت بطريقة إيجابية ، فإنه من الضروري التحرك إلى خط أعلى من خطوط تساوى التكلفة لتأمين أى منتج محدد . وخاصية (2) تكون واضحة من خلال دالة التكلفة : فإذا افترضنا أن :

$$(r_1^0, r_2^0, x_1^0, x_2^0) \text{ وأن } (r_1^1, r_2^1, x_1^1, x_2^1)$$

$$\text{وإذا افترضنا كذلك أن : } r_1^0 = \lambda r_1^1 + (1-\lambda)r_1^0$$

بحيث أن $(i = 1, 2)$ فإن :

$$\phi(q, r_1^0, r_2^0) = r_1^0 x_1^0 + r_2^0 x_2^0 = [\lambda r_1^1 + (1-\lambda)r_1^0]x_1^0 + [\lambda r_2^1 + (1-\lambda)r_2^0]x_2^0$$

وباستخدام طريقة التكلفة الأقل نحصل على :

$$r_1^0 x_1^0 + r_2^0 x_2^0 \geq \phi(q, r_1^1, r_2^1)$$

$$r_1^0 x_1^0 + r_2^0 x_2^0 \geq \phi(q, r_1^0, r_2^0)$$

وبالتالى فإن :

$$\phi(q, r_1^0, r_2^0) \geq \lambda \phi(q, r_1^1, r_2^1) + (1-\lambda) \phi(q, r_1^0, r_2^0)$$

وهي تثبت التعمر ولقد اعتبرنا النقط العام لدالة التكلفة في الجزء ٥-١٠٤١٥ هنا
لأننا نفترض أن أسعار الداخِل غير قابلة للتغير بحيث تصبح التكلفة بدالة مستوى الناتج زائداً تكلفة الداخِل الثابتة :

$$(29-4) \quad C = \phi(q) + b$$

ويجب دفع قيمة الداخِل الثابتة أى التكلفة الثابتة fixed cost بغض النظر من مقدار كمية المنتج الذى تنتجه المؤسسة ، أو حتى إذا كانت المؤسسة تنتج أم لا .

وتمثل دالة التكلفة التكلفة الأقل لإنتاج لكل منتج ويمكن اشتقاقها باستخدام الافتراض بسلامة سلوك وتصرف صاحب المؤسسة . ويمكن الحصول على الخليط بين التكلفة والناتج للمعادلة (29-4) كما يلي :

(1) اختيار نقطة ما على مجرى التوسع .

(2) عوض بالقيم المقابلة لمستويات الداخِل في دالة الإنتاج للحصول على مستوى الإنتاج

المقابل .

- (٣) اضرب مستويات الداخل بأسماره الثابتة للحصول على التكلفة الاجمالية المتغيرة
 $total\ variable\ cost$ لمستوى الناتج هذا ٠٠ وأخيرا ٠
 (٤) أضف التكلفة الثابتة $fixed\ cost$.

ويمكن اشتقاق عدد من ملاقات التكلفة الخاصة ، والتي هي أيضا دوال لمستوى المنتج ، من المعادلة (٢٩-٤) ونعرف معدل اجمالي التكلفة $Average\ total\ (ATC)$ cost ومعدل التكلفة المتغيرة $average\ variable\ cost\ (AVC)$ ومعدل التكلفة الثابتة $average\ fixed\ cost\ (AFC)$ على انها على التوالي اجمالي التكلفة ، والتكلفة المتغيرة والتكلفة الثابتة مقسومة على مستوى الناتج :

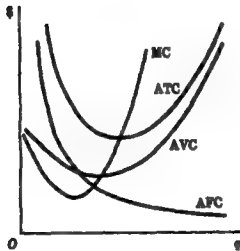
$$ATC = \frac{\phi(q) + b}{q} \quad AVC = \frac{\phi(q)}{q} \quad AFC = \frac{b}{q}$$

وتعرف ATC بأنه مجموع AVC و AFC وتعرف كذلك التكلفة الحدية $Marginal\ (MC)$ $cost$ بأنها اشتقاق اجمالي التكلفة $total\ cost$ بالنسبة للناتج :

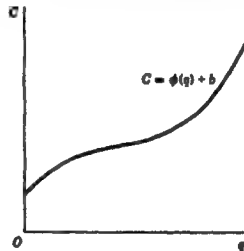
$$MC = \frac{dC}{dq} = \phi'(q)$$

وحيث ان حد التكلفة الثابتة ينخفض بعد القيام بحطية التفاضل ، فان اشتقاقات اجمالي التكلفة ، واجمالي التكلفة المتغيرة تكون متساوية .

وقد تأخذ بعض دوال التكلفة المحددة اشكالا عديدة مختلفة . واحد هذه الاحتمالات والذي يقدم للاقتصاديين بعض الخواص التي يرغبون في اغترافها ، يوضحها الشكلين (٦-٤) و (٧-٤) .



شكل (٦-٤)



شكل (٧-٤)

ان اجمالى التكلفة يكون دالة كمعية بدلالة الناتج ، واما ATC, AVC, MC فانها منحنيات من الدرجة الثانية والتي تنخفض فى البداية ثم ترتفع كلما توسع الانتاج ويصل MC الى حده الأدنى قبل ATC و AVC ويصل AVC الى حده الأدنى قبل ATC ويمكن للقارىء التحقق من ان منحنى MC يمر خلال نقط الحد الأدنى لمنحنيات AVC وكذلك ATC ^(١) وان منحنى AFC يكون على شكل قطع زائد قائم $rectangular hyperbola$ بغض النظر من اشكال منحنيات التكلفة الاخرى وحيث ان التكلفة الثابتة منتشرة على وحدات مساحة اكبر كلما اتسع الانتاج فان AFC سوف ينخفض باطراد والمسافة العمودية بين منحنى AFC ومنحنى AVC تساوى AFC و عليه فانها تنخفض كلما ازداد الانتاج .

مثال : ان دالة الانتاج $q = Ax^\alpha x^\beta$ بالقيم تعطينا دالة التكلفة الاجمالية التالية :

$$C = \alpha q^{1/(\alpha+\beta)}$$

$$a = (\alpha + \beta) \left(\frac{r_1 r_2}{A \alpha^\alpha \beta^\beta} \right)^{1/(\alpha+\beta)} \quad \text{بحيث ان :}$$

ودالة التكلفة هذه تكون محدبة وخطية او تكون مقعرة كلما كانت $(\alpha + \beta)$ اقسل من او تساوى او اكبر من الوحدة على التوالى ، ويكون AC و MC :

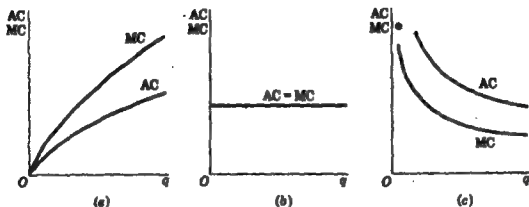
$$AC = \alpha q^{(1-\alpha-\beta)/(\alpha+\beta)} \quad MC = \frac{a}{(\alpha + \beta)} q^{(1-\alpha-\beta)/(\alpha+\beta)} = \frac{1}{(\alpha + \beta)} AC$$

وشكل (٨-٤ أ) يعطى AC و MC للحالة $\alpha + \beta < 1$ بحيث ان دالة الانتاج تكون مقعرة بانضباط وتكون دالة التكلفة الاجمالية محدبة بانضباط ويكون AC و MC فى تزايد بحيث ان $AC < MC$ فى كل مكان . اما شكل (٨-٤ ب) فانه يوضح الحالة $\alpha + \beta = 1$.

بحيث ان دالة التكلفة الاجمالية تكون دالة خطية وان AC و MC ثابتان ومتساويان واخيرا فان شكل (٨-٤ د) يوضح الحالة $\alpha + \beta > 1$ بحيث ان دالة التكلفة الاجمالية تكون مقعرة بانضباط ، وان AC و MC يكونان فى انخفاض منتظم بحيث ان $AC > MC$ فى كل مكان .

يمثل الشكل (٨-٤ أ) القول العام الذى ينص على ان اى دالة انتاج مقعرة بانضباط تستطيع ان تولد دالة تكلفة اجمالية محدبة بانضباط . ويتغاضل شروط الدرجة الاولى للحصول على التكلفة الاقل غاضلا تام والمعطى بالمعادلة (١٧-٤) وبامادة ترتيب الحدود تحصل على :

(١) ضع اشتقاق ATC و (او AVC) يساوى صفرا ثم ضع المعادلة فى الوضع الذى يوضح المساواة بين ATC (او AVC) وبين (MC) .



شكل (٤ أ)

$$\lambda f_{11} dx_1 + \lambda f_{12} dx_2 + f_1 d\lambda = dr_1$$

$$\lambda f_{21} dx_1 + \lambda f_{22} dx_2 + f_2 d\lambda = dr_2$$

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = dq$$

وباستخدام قاعدة كيرمر نحصل على قيمة :

$$(٣١-٤) \quad d\lambda = \frac{1}{\mathcal{D}} [(f_{22}f_1 - f_{21}f_2) dr_1 + (f_{12}f_1 - f_{11}f_2) dr_2 + \lambda \mathcal{H} dq]$$

$$\mathcal{H} = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 \text{ and } \mathcal{D} = 2f_{12}f_2 - f_{11}f_2^2 - f_{22}f_1^2.$$

فإذا وضعنا $dr_1 = dr_2 = 0$ ، نحصل على :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q} = \frac{\lambda \mathcal{H}}{\mathcal{D}} > 0$$

وبما أن $\lambda > 0$ هي MC وهي في نفس الوقت الاشتقاق الثاني لدالة التكلفة الإجمالية بحيث أنها موجبة بانتظام بسبب أن افتراض التغير المنضبط يطبق علينا بأن كلا \mathcal{D} و \mathcal{H} يكونان موجبتان .

إن أراد صاحب المؤسسة الذي يبيع إنتاجه بسعر ثابت هو أيضا بدلالة a function of مستوى الإنتاج وعلى هذا فإن ربحه سوف يكون أيضا بدلالة مستوى الإنتاج :

$$\pi = pq - \phi(q) - b$$

وللحصول على الحد الأقصى من الربح ضع اشتقاقات المعادلة السابقة بالنسبة لـ q تساوى صفرا .

$$\frac{d\pi}{dq} = p - \phi'(q) = 0$$

وتتحريك MC إلى الجانب الأيمن

$$(٣٢-٤) \quad p = \phi'(q)$$

فصاحب المؤسسة لا يد وأن يساوى بين MC وسعر البيع الثابت للناتج ويستطيع صاحب المؤسسة أن يزيد من ربحه بتوسع إنتاجه إذا كانت الإضافة إلى إيراداته (p) مع بيع وحدة أخرى تروها على الإضافى الى تكلفته (MC) ويتطلب شرط الدرجة الثانية للحصول على الحد الأقصى من الربح على :

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -\frac{d^2C}{dq^2} < 0$$

وبالضرب فى (١-) وعكس إشارة اللامتساوية ، نحصل على :

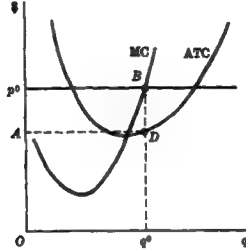
$$\frac{d^2C}{dq^2} > 0$$

ومن هذا نجد ان MC لا بد وأن يكون فى تزايد عند الناتج المؤدى الى الحصول على الحد الاعلى من الربح . فلو كان MC فى تناقص فان المساواة بين السعر و MC سوف يعطى نقطة الحد الأدنى من الربح . وسوف يتحقق شرط الدرجة الثانية إذا كانت دالة التكلفة الاجمالية محدبة بانضباط عند النقطة التى يتحقق عندها شرط الدرجة الاولى وهذا يتطلب ان دالة الانتاج المستخدمة هنا تكون مقعرة بانضباط فاذا كانت دالة التكلفة الاجمالية محدبة بانضباط ضمن مجال ما فان الناتج الذى يتحقق عنده شرط الدرجة الاولى ، يكون ناتجا فريدا مؤديا للحصول على الحد الاعلى من الربح ضمن هذا المجال .

ان مستوى التكلفة الثابتة (b) لصاحب المؤسسة ليس له عموما أى تأثير على قراراته بالحصول على الحد الامثل خلال فترة زمنية قصيرة ويجب رفعها بغض النظر عن مستوى انتاجه وكل ما هناك فانه سوف يضيف حدا ثابتا الى معادلة ربحه وسوف يخفى حد التكلفة الثابتة بعد التفاضل وسوف يكون MC مستقلا عن مستواه وبما ان شروط الدرجة الاولى والثانية للحصول على الحد الاقصى للربح موضوعة بدلالة MC فان مستوى الانتاج التوازنى equilibrium سوف لا يتأثر بمستوى التكلفة الثابتة . وكان من الممكن اجسرا التحاليل الرياضية فى هذا الجز (٤-٢) على اساس تغير التكلفة فقط .

ان لمستوى التكلفة الثابتة اهمية فى تحليل الحصول على الحد الاقصى من الربح على المدى القصير فى حالة خاصة واحدة وهى الحالة التى يمتلكها صاحب المؤسسة ولكن لا يعترف بها حساب التفاضل والتكامل calculus حيث كان حده الاعلى من الربح من انتاج مستوى ايجابى للناتج ، كمية سالبة (اى انه خسران) بقيمة مطلقة اكبر من كمية التكلفة الثابتة . ولا يحتاج صاحب المؤسسة ابدا أن يخسر أكثر من مقدار التكلفة الثابتة وسوف ينتج بخسارة فى المدى القصير اذا كانت خسارة اقل من مقدار التكلفة

الثابتة ، بمعنى انه اذا كانت إيراداته تفوق على اجمالي التكلفة المتغيرة ، وباستطاعة
تغطية جزء من نفقاته المبدئية على الدواخل الثابتة .



شكل ٩-٤

وشكل (٩-٤) يشرح هندسيا عملية الحصول على الحد الاقصى من الربح ويعطى
مقاطع الخط المستقيم المرسوم من مستوى السعر الجارى (p^0) والجزء الاخذ في الارضاع
من منحنى MC الناتج الاكمل (q^0) وتعطى مساحة المستطيل Op^0Bq^0 إيرادات صاحب
المؤسسة وتعطى مساحة المستطيل $OADq^0$ اجمالي التكلفة ، ومساحة المستطيل Ap^0BD
تعطى الربح .

مثال : اعتبر الدالة التكميلية لدالة التكلفة الاجالية :

$$C = 0.04q^3 - 0.9q^2 + 10q + 5 \quad (٣٣-٤)$$

وافترض ان سعر q هو ٤ ريال للوحدة الواحدة وبساواة MC مع السعر :

$$0.12q^2 - 1.8q + 10 = 4$$

نحصل على المعادلة التربيعية :

$$q^2 - 15q + 50 = 0$$

وجزئيا هي $q = 10$ و $q = 5$ نجد انه يوجد منتجين مختلفين يحققان شرط الدرجة
الاولى للحصول على الحد الاقصى من الربح ولا بد اذا من حساب معدل التغير في MC
لكلاهما ، مع العلم بان معدل تغير MC هو :

$$\frac{d^2C}{dq^2} = 0.24q - 1.8$$

ويكون سالبا لقيمة $q = 5$ وموجبا لقيمة $q = 10$ ونجد ايضا ان (عشرة وحدات من
الناتج تعطى الربح الاقصى وان خمسة وحدات من الناتج تعطى الربح الادنى . ولكن

الربح بانتاج عشرة وحدات يكون سالبا .

$$\pi = 4q - (0.04q^3 - 0.9q^2 + 10q + 5)$$

$$= 40 - 55 = -15$$

وطيه فان منحني ATC لمصاحب المؤسسة يقع فوق خط السعر لكل منتج وان ربحه الاطى هو خسارة مقدارها عشرة ريالاً فعلمية ان يوقف الانتاج حيث ان تكلفته الثابتة (وهى تسوى خمسة ريالاً) تكون اقل من اصغر خسارة يمكن له تجميلها من الانتاج .

دوال الصكفة فى المدى الطويل : Long-Run Cost Functions

دنا نفترض ان مستويات الداخلى الثابتة لمصاحب المؤسسة تكون مطقة بالمتغير الثابت القيمة k ، والذي يعطينا حجم المصنع "size of his plant" فكلما كانت قيمة k كبيرة كلما كان حجم المصنع اكبر ولذلك فان مشاكل صاحب المصنع فى المدى القصير تنحصر فى كيفية الاستفادة من حجم المصنع الافادة المثلى optimal utilization ولكنه فى المدى الطويل حرنى تغيير k واختيار مصنع بالحجم الامثل optimum size وتعتمد اشكال دوال التكلفة والانتاج لمصاحب المصنع على حجم المصنع ويمكن عفرها بشكل فرسدى فى المدى القصير . اما فى المدى الطويل ، فان صاحب المصنع يستطيع ان يختار بين دوال الانتاج والتكلفة باشكالها المنطقية وعدد البدائل اماه يساوى عدد القيم المنطقية التى تأخذها k وحالما يختار اشكال هذه الدوال ، بمعنى انه يختار قيمة للمتغير k فانه سوف يواجه بمسائل الحصول على الحد الاطى التقليدية فى المدى القصير .

مثال : اعتبر حالة الرجل الذى يدير باقلال فحجم مكانه هو عدد الاقدام المربعه للمحل الذى يملكه فاذا افترضنا ان البدائل المحتملة له هى 5000 ، 10,000 ، 20,000 قدم مربع وانه يملك الان فقط 10,000 وهذه نتيجة لقراره على الماضى على المدى الطويل . فعندما ياتى الوقت لتغيير البقالة سوف يكون صاحب البقالة قادرا على ان يختار الحجم المناسب للبقالة الجديدة ولكن اذا لم تتغير الشروط منذ قراره الماضى فانه سوف يختار ثانية بقالة بحجم 10,000 قدم مربع . ولكن اذا وجد ان البقالة بدأت نسي الازدحام ووجد ان ترقانة على المدى الطويل ان مبيعاته سوف تزداد فانه فى هذه الحالة سوف يقوم ببنا" بقالة بحجم 20,000 قدم مربع وقد يقع تحت ظروفه تضطره الى تقليص حجم البقالة الى 5000 قدم مربع ولكنه حالما يبني المحل الجديد ، فان مشكلته ستكون الاستفادة الثامه من حجم المحل .

افترض ان k تتغير باستمرار ثم ضعها كمتغير فى دالة الانتاج ، ومعادلة التكلفة ودالة مجرى التوسع :

$$q = f(x_1, x_2, k)$$

$$C = p_1x_1 + p_2x_2 + \psi(k)$$

$$0 = g(x_1, x_2, k)$$

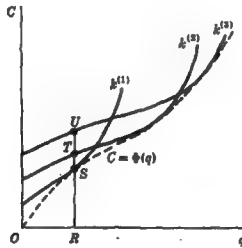
وبهذا تصبح التكلفة الثابتة دالة متزايدة بدلالة حجم المصنع $\psi'(k) > 0$ وتعتمد اشكال خطوط تساوى الكميات وتساوى التكلفة وشكل مجرى التوسع على القيمة المعطاة للمتغير k ويمكن الاستغناء، عموما من اثنين من العلاقات السابقة للتخلص من x_2 و x_1 ووضع التكلفة الاجمالية بدلالة مستوى الناتج وحجم المصنع :

$$C = \phi(q, k) + \psi(k) \quad (٣٤-٤)$$

وتصف هذه المعادلة منحنيات التكلفة الاجمالية والناتجة من اعطاء قيم مختلفة للمتغير k .

وحيثما نعين قيمة محددة لرمز حجم المصنع $k = k^{(0)}$ فان المعادلة (٣٤-٤) تكافؤ دالة التكلفة الاجمالية والمعطاة بالمعادلة (٢٩-٤) وينطبق عليها تحاليل المصدى القصير.

وتعطى دالة التكلفة الاجمالية لصاحب المصنع على المدى الطويل التكلفة الادنى لاننتاج كل مستوى من الناتج اذا كان حرا في تغيير حجم المصنع . وهذا لانه لاى مستوى ناتج



شكل ١٠-٤

معطى . فان صاحب المصنع سوف يقوم بحساب التكلفة الاجمالية لكل حجم مصنع محتمل ثم يختار ذلك الحجم الذى يعطيه التكلفة الاجمالية الادنى . ويحتوى الشكل (١٠-٤) على منحنيات التكلفة الاجمالية والمقابلة لثلاثة احجام مختلفة للمصنع فيستطيع صاحب المصنع انتاج الكمية OR باى حجم للمصنع وسوف تكون تكلفته الاجمالية هي RS لحجم المصنع $k^{(1)}$ وتكون RT وتكون $k^{(2)}$ للحجم RU ويعطى الحجم $k^{(1)}$ تكلفه الانتاج

الادنى للكثير OR وعليه فان النقطة S تقع على منحنى التكلفة الاجماليه للمدى الطويل وتتكرر هذه المعطيه لكل مستوى من مستويات الانتاج ، وتعرف منحنى التكلفة الاجماليه للمدى الطويل بأنه المحل الهندسي لنقط التكلفة الادنى .

ويمثل منحنى التكلفة للمدى الطويل الغلاف الخارجى $envelope$ لمنحنيات التكاليف للمدى القصير فيص كل واحد منها ولا يقطع اى واحد منها .
فاذا كتبنا معادلة مجموعة افراد دوال التكلفة للمدى القصير (معادلة ٣٤-٤) على النمط الضمنى $implicit form$ فاننا نحصل على :

$$(٣٥-٤) \quad C - \phi(q, k) - \phi(k) = G(C, q, k) = 0$$

واذا وضعنا اشتقاقاتها الجزئية بالنسبة للمتغير k مساويه لصفر ، نحصل طمسى
(٣٦-٤) $G_k(C, q, k) = 0$

ونتحصل على معادلة المنحنى المغلف (منحنى التكلفة على المدى الطويل $envelope$ curve) بالتخلص من k فى المعادلة (٣٥-٤) و (٣٦-٤) ونحل لقيمة C بدلالة q (راجع الجزء ٢-٤) :

$$C = \Phi(q)$$

ان التكلفة الاجماليه للمدى الطويل تمثل دالة منورها هو مستوى الناتج ، اذا اطينا من الشرط بان كل مستوى ناتج قد تم انتاجه فى مصنع له حجم امثل ولا يعتبر منحنى التكلفة للمدى الطويل على انه جزء متفصل من منحنيات التكلفة للمدى القصير ولكنه صمم من النقاط على منحنيات المدى القصير . وبما ان k افترض ان تكون متغيره باستمرار فان لمنحنى التكلفة على المدى الطويل (انظر الشكل ١٠-٤) نقطة واحدة فقط مشعره مع كل واحد من منحنيات التكلفة للمدى القصير .

وبما ان معدل التكلفة AC يساوى اجمالى التكلفة مقسوما على مستوى الناتج فانه يمكن الحصول على معدل التكلفة الادنى لانتاج مستوى معين بنفس حجم المصنع الذى تم فيه انتاج نفس المستوى من المنتج بالتكلفة الاجماليه الاقل . ويمكن اشتقاق منحنى AC للمدى الطويل بقسمة اجمالى التكلفة للمدى الطويل على مستوى الانتاج ، او باقاة المغلف لمنحنيات AC للمدى القصير . وكلا الطريقتين تؤدي الى نفس النتيجة .

ومن الممكن رسم منحنى AC للمدى الطويل برسم اشتقاق التكلفة الاجماليه للمدى الطويل بالنسبة لمستوى الناتج ، او يمكن اشتقاقه من منحنيات MC للمدى القصير وعلى كل حال ، فان منحنى MC للمدى الطويل ليس هو مغلف منحنيات MC للمدى القصير . لان MC للمدى القصير يساوى معدل التغير للتكلفة المتغيرة للمدى القصير بالنسبة لمستوى الناتج ، وان MC للمدى الطويل هو معدل التغير للتكلفة الاجماليه بفرض ان كل التكاليف .

قابل للتغيير • وطيه فان اجزاء من MC للمدى القصير قد تقع اسفل من منحنى MC للمدى الطويل • ويمكن تعريف منحنى MC للمدى الطويل بان المحل الهندسى لتلك النقاط على منحنيات MC للمدى القصير والتي تعادل الحجم الامثل للمصنع لكل منتج (١) وتكون طريقى اشتقاق منحنى MC للمدى الطويل تكون واضحة من الشكل (١٠-٤) حيث ان منحنى التكلفة الاجمالية للمدى الطويل تكون ملاصقا لكل منحنى للمدى القصير عند الناتج الذى من اجله منحنى المدى القصير يمثل حجم المصنع الامثل وبما اننا عرفنا التكاليف الحدية MCs على انها ميل خطوط التماس لهذه المنحنيات فان التكاليف الحدية للمدى الطويل والمدى القصير تكون متساوية عند كل نقطة •

افترض ان صاحب المصنع يرغب فى بناء مصنع لاستخدامه خلال عدد ١ من الفترات ذات المدى القصير وانه يتوقع الحصول على نفس السعر لمنتجائه خلال كل فتره من فسترات المدى القصير • وبما ان الظروف سوف تبقى كما هى ، فمير قابل للتغيير من فترة لآخرى فانه سوف ينتج نفس المستوى فى كل فترة • ويرجع خلال واحدة من الفترات يكون الفرق بين ايراداته وتكلفته مع تغيير حجم المصنع :

$$\pi = pq - \Phi(q)$$

وبوضع اشتقاق π مساويا لصفر :

$$\frac{d\pi}{dq} = p - \Phi'(q) = 0$$

$$p = \Phi'(q)$$

وهكذا نجد انه بمساواة MC على المدى الطويل بالسعر نحصل على الارباح المظا اذا كان MC للمدى الطويل فى تزايد (شرط الدرجة الثانية) وحالما نقرر مستوى الانتاج الامثل فانه يمكن ايجاد القيمة المعطى للمتغير k من المعادلتين (٢٥-٤) و (٢٦-٤)

مثال : اعتبر مجموعة منحنيات التكلفة للمدى القصير والتي تكونت من :

$$C = 0.04q^3 - 0.9q^2 + (11-k)q + 5k^2 \quad (٢٧-٤)$$

فاذا كانت قيمة $k = 1$ فان منحنى التكلفة للمدى القصير يكون هو المعطى بالمعادلة

$$(٢٣-٤) \text{ وبوضع الاشتقاق الجزئى للشكل (النقط) المضمن بالمعادلة (٢٧-٤) بالنسبة للمتغير } k \text{ مساويا لصفر :}$$

$$G_k(C, q, k) = q - 10k = 0$$

وبحلها نحصل على $0.1q = k$ وبالتعويض فى المعادلة (٢٧-٤) نحصل على دالة

(١) انه من الخطا رسم منحنى MC للمدى الطويل باختيار النقاط على منحنيات MC للمدى القصير والتي تعادل مستوى الانتاج الامثل (وهى النقطة الأدنى ل AC

لكل حجم من احجام المصنع •

التكلفة للمدى الطويل •

$$C = 0.04q^3 - 0.9q^2 + (11 - 0.1q)q + 5(0.1q)^2$$

$$= 0.04q^3 - 0.95q^2 + 11q$$

بحيث ان التكلفة الثابتة للمدى الطويل تساوى صفر •

فإذا افترضنا ان سعر الناتج يساوى ٤ ريالاً ، ويوضع هذا السعر مساوياً للتكلفة الحدية MC للمدى الطويل ، نحصل على :

$$4 = 0.12q^2 - 1.9q + 11$$

والتي تعطينا المعادلة التربيعية التالية :

$$0.12q^2 - 1.9q + 7 = 0$$

وجزئياً $q = 10$ و $q = 5.83$ ونجد الحد الاطلى من الربح عند مستوى انتاجى يساوى

$k = 1$ وحدات وبالاستغاده من العلاقة $k = 0.1q$ نحصل على حجم المصنع الامثل وهو $k = 1$ •

ونجد ان ربح صاحب المصنع على المدى القصير هو :

$$\pi = pq - (0.04q^3 - 0.95q^2 + 11q) = 40 - 55 = -15$$

وهذا يشبه المثال السابق حيث ان الربح الاقصى للعمل هو خسارة مقدارها 15 ريالاً وطليه فان صاحب المصنع غير قادر على اكتساب ربح وطليه فسوف لا يبنى مصنع باى حجم ولكن تختلف الحالة اذا زاد السعر ليصبح 6 ريالاً فيوضع MC للمدى الطويل مساوياً للسعر نحصل على المعادلة التربيعية :

$$0.12q^2 - 1.9q + 5 = 0$$

وجزئياً $q = 12.5$ و $q = 3.3$ فنجد ان الربح الاقصى يتحقق عند انتاج 12.5 وحدة وهو موجب لهذا الحجم :

$$\pi = 75 - 67.1875 = 7.8125$$

وسوف يبنى صاحب المصنع مصنعاً للحجم الامثل وهو $(k = 1.25)$.

JOINT PRODUCTS

٤ - • المنتجات المشتركة :

ان بعض عمليات الانتاج سوف تؤدي الى انتاج اكثر من منتج واحد فعملية مثل تربية الغنم تمثل مثلاً تقليدياً بالمثل هذه العملية • فبالامكان انتاج الصوف ولحم الغنم بنسب مختلفة وعملية انتاجه واحده ^(١) وتميز حالة المنتجات المشتركة على اساس تقسّى نرى

(١) ان عملية انتاج اكثر من منتج واحد لا تتطلب تحاليل متوسعة الا اذا كانت تنتج بنسب مختلفة • فاذا كان هناك منتجان ينتجان بنسبة ثابتة $q_1/q_2 = k$ حيث ان k ثابت من الثوابت ، فان التحاليل لمنتج واحد كافيه ويمكن تطبيقها في مثل هذه الحالة عن طريق تعريف وحدة واحدة من منتج مركب على انه k وحدة من Q_1 ووحدة واحدة من Q_2 بسعر $p_1 + kp_2$ وتعامله على اساس انه منتج واحد فقط •

- وليس على أساس تنظيمي وأنه يوجد عندما يكون إثنان أو أكثر من المنتجات مستقلة فيما • وعلى هذا فإن الحالات التي ينتج فيها صنعا معينا بلمعتين أو أكثر مستغلان فيما يكون مستبعدا على حسب هذا التعريف •

Basic Concepts

مفاهيم أساسية :

أعتبر الحالة البسيطة التي يستخدم فيها صاحب المصنع داخلا واحدا هو X لانتاج منتجين هما Q_1 و Q_2 فدالة انتاجية الضمنية تكون :

$$(28-4) \quad H(q_1, q_2, x) = 0$$

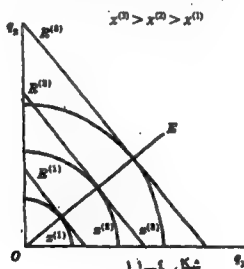
حيث ان q_1, q_2 و x يمثلون ، على التوالي الكميات من Q_1, Q_2, X ولنفترض ان المعادلة (28-4) يمكن حلها بوضوح explicitly لقيم x :

$$(29-4) \quad x = h(q_1, q_2)$$

وهذه المعادلة تنص على ان تكلفة الانتاج بالنسبة للداخل X تكون بدالة كميته المنتجين • ومن المصح افتراض ان المعادلة (29-4) تكون دالة تزايدية ذات قيمة موجبة ضمن مجال بحيث ان q_1 و q_2 يكونان موجبتان او غير سالبتان • ونفترض ، بالاضافة لما سبق ان (29-4) تكون شبه - محدبة بانضباط منتظم للحصول على الحد الاكبر العقيد ، وان تكون محدبة بانضباط للحصول على الحد الاكبر من المرج وتعرف منحنى تحويل الناتج $product\ transformation\ curve$ بانها المحل المهندسي للمجموعات الناتجة والتي يمكن تأمينها من الدخل المعطى X :

$$x^0 = h(q_1, q_2)$$

ويعطينا الشكل (31-4) ثلاثة من افراد هذا المنحنى وكلما بعد المنحنى من نقطة الاصل ، كلما كبر الداخل X الذي يكون مقابلا لهذا المنحنى :



أن ميل خط التماس لنقطة ما على منحنى تحويل الناتج هي المعدل التي يجب التضحية بالكمية ()عنده للحصول على كمية أكثر من Q_1 Q_2 بدون تغيير في الداخل X وتعرف سالب الميل على أنه معدل تحويل الناتج (RPT) rate of product transformation

$$RPT = -\frac{dq_2}{dq_1}$$

ويأخذ التفاضل الكامل للمعادلة (٣٩-٤) نحصل على :

$$dx = h_1 dq_1 + h_2 dq_2$$

وبما أن $dx = 0$ للتحركات على خط تحويل الناتج ، فإن :

$$RPT = -\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{h_1}{h_2} \quad (٤٠-٤)$$

وهذا يعني أن RPT عند نقطة ما على منحنى تحويل الناتج يساوي النسبة بين التكلفة الحدية Q_1 بدلالة X والتكلفة الحدية لـ Q_2 بدلالة X عند تلك المنطقة .
ونستطيع أن نعبّر ، أيضا كبدل ، عن RPT بدلالة MP ونطبق في هذه الحالة قاعدة مقلوب الدالة :

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} = \frac{1}{h_1} \quad \frac{\partial q_2}{\partial x} = \frac{1}{h_2} \quad (٤١-٤)$$

وبالتعويض في (٤٠-٤) نحصل على :

$$RPT = -\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial q_2 / \partial x}{\partial q_1 / \partial x} \quad (٤٢-٤)$$

ومن هذه المعادلة يتضح أن RPT يساوي النسبة بين MP لـ X في إنتاج Q_2 و MP لـ X في إنتاج Q_1 . وافترض أن المعادلة (٣٩-٤) تكون تزايدية بضمن أن الانتاجين الحديين يكونا موجبين وهذا ما تتطلبه أي عملية انتاجية بنيت على اساس العقل .

وضمن لنا أيضا تزايدية المعادلة (٣٩-٤) أن ميل منحنيات تحويل الناتج تكون سالبة وأن RPT يكون موجبا .

وأيضا الاشتقاق التام للمعادلة (٤٢-٤) نحصل على معدل تغير RPT على النحو التالي :

$$-\frac{d^2 q_2}{dq_1^2} = \frac{1}{h_2^2} (h_{11}h_2^2 - 2h_{12}h_1h_2 + h_{22}h_1^2) \quad (٤٣-٤)$$

وضمن لنا افتراض أن المعادلة (٣٩-٤) شبه - محدبة بانضباط منتظم أن المعادلة (٤٣-٤) تكون موجبة ، بمعنى أن RPT تزداد كلما تحركنا من اليسار إلى اليمين على منحنى تحويل الناتج . وكلما انتجنا كمية أكبر من Q_1 وكمية أقل من Q_2 باستخدام كمية ثابتة من الداخل فإن كميات أكثر وأكثر من Q_2 يجب أن يضحى بها بكل وحدة من Q_1 .
وبما أن المعادلة (٤٣-٤) موجبة فإن منحنى تحويل الناتج يعطى q_2 بدلالة q_1

وان الاشتقاق الثانى يكون سالبا ، بمعنى ان q_2 تكون مقعرة بانضباط بدلالة q_1 ونجد ان بعض منحنيات تحويل الانتاج تكون منحنية بعيدا عن نقطة الاصل كما هو موضح فى الشكل (١١-٤) السابق .

ان مجموعة منحنيات تحويل الانتاج الموضحة فى الشكل (١١-٤) قد حصلنا عليها من دالة الانتاج الضمنية التالية :

$$q_1^2 + q_2^2 - x = 0$$

وطيه فان منحنيات تحويل الانتاج تمثل دوائر متحدة المركز concentric circles. طسى النمط التالى :

$$x^0 = q_1^2 + q_2^2$$

بحيث ان $RPT = q_1/q_2$ فانما كانت $q_1, q_2 > 0$ فان ميل منحنيات تحويل الانتاج تكون سالبة ، ويكون RPT موجبا وفى هذه الحالة يكون معدل تغير RPT والمعطى بالمعادلة (٤٣-٤) هو

$$(q_1^2 + q_2^2)/q_2^2$$

عملية الحصول على الحدى الأعلى من الإيرادات بقيود :

Constrained Revenue Maximization

اذا قام صاحب الصنع ببيع انتاجه باسعار ثابتة فان المعادلة الخطية التالية تعطى دخله R :

$$R = p_1 q_1 + p_2 q_2 \quad (٤٤-٤)$$

بحيث ان p_1 و p_2 هما سعري Q_1 و Q_2 على التوالى . ونعرف خط تساوى الإيرادات isorevenue line (وهو نظير خط تساوى الكميات) بأنه المحل الهندسى لمجموعات الانتاج التى سوف تكسب صاحبها دخلا محددًا .

ونستعرض ثلاثة من هذه الخطوط فى الشكل (١١-٤) وهى عبارة عن خطوط متوازية بميل يساوى سالب النسبة بين اسعار المنتجات $(-p_1/p_2)$.

ولحل مسألة الحصول على الحد الاعلى (تحت قيد) لصاحب الصنع الذى يرغب

فى الحصول على الحد الاعلى من الإيرادات بالنسبة لداخل معين من X تكون الدالة التالية

$$W = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \mu [x^0 - h(q_1, q_2)]$$

بحيث ان μ تمثل مضروباً للقوائم غير معين ووضع الاشتقاق الجزئى لهذه الحالة مساويه لصفر نحصل على :

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1 - \mu h_1 = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2 - \mu h_2 = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mu} = x^0 - h(q_1, q_2) = 0$$

وبتحريك الحدود الثانية في المعادلتين الأولىتين الى الجانب الايمن ثم قسمة الاول على

الثانية ، نحصل على : $\frac{p_1}{p_2} = \frac{h_1}{h_2} = RPT$

او بالتعويض من (٤١-٤) نحصل على :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\partial q_2 / \partial x}{\partial q_1 / \partial x} = RPT \quad (٤٥-٤)$$

وعلى هذا فان RPT لابد وان يساوى نسبة الاسعار الثابتة وبالمعنى الهندسى ،

فان منحني تحويل الانتاج يجب ان يكون مماسا لخط تساوى الايرادات .

ويمكن النص على شروط الدرجة الاولى على النحو التالى :

$$\mu = \frac{p_1}{h_1} = \frac{p_2}{h_2}$$

او بالتعويض من (٤١-٤) نحصل على :

$$\mu = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} = p_2 \frac{\partial q_2}{\partial x}$$

وهذه تعنى ان قيمة MP بالنسبة لـ X فى انتاج كل منتج يجب ان تساوى μ والعنى هو

اشتقاق R (الايرادات بالنسبة لـ x مع ثبات الاسعار) . ويتطلب شرط الدرجة

الثانية ان تكون محدب هيسيان موجب :

$$\begin{vmatrix} -\mu h_{11} & -\mu h_{12} & -h_1 \\ -\mu h_{21} & -\mu h_{22} & -h_2 \\ -h_1 & -h_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

(١) نحصل على التفاضل الكلى للمعادلة (٤٤-٤) فى هذه الحالة كما يلى :

$$dR = p_1 dq_1 + p_2 dq_2$$

او بتعويض $p_1 = \mu h_1$ و $p_2 = \mu h_2$ ونقسمه هذه على

تفاضل المعادلة (٤٤-٤) فان الاشتقاق التام للايرادات R بالنسبة لـ x

مع ثبات الاسعار تكون :

$$\frac{dR}{dx} = \frac{\mu(h_1 dq_1 + h_2 dq_2)}{h_1 dq_1 + h_2 dq_2} = \mu$$

وتسمى الايراد الحدى للمنتج marginal-revenue product

وبعد فك هذه المحددة نحصل على :

$$\mu(h_{11}h_2^2 - 2h_{12}h_1h_2 + h_{22}h_1^2) > 0$$

وبما ان $\mu > 0$ فان :

$$(h_{11}h_2^2 - 2h_{12}h_1h_2 + h_{22}h_1^2) > 0$$

وبما ان $h_2 > 0$ كما هو مطلوب من شرط الدرجة الاولى ، فانه يتبع من المعادلة (٤٣-٤) ان شرط الدرجة الثانية يتطلب ان لمنحنى تحويل الانتاج معدلا متزايدا عند النقطة التى يتحقق عندها شروط الدرجة الاولى . فاذا كانت المعادلة (٣٩-٤) شبه محدبة بانضباط ضمن مجال μ ، فان اى نقطة يتحقق عندها شروط الدرجة الاولى تكون نقطة حد اعلى فريد من الايرادات (تحت قيد ضمن المجال المعطى) .

وقد يرغب صاحب المصنع فى تخفيض كمية X الضرورية للحصول على ايرادات معينة ففى هذه الحالة ، فانه سوف يقوم بمعطية الحصول على الحد الادنى من المعادله (٣٩-٤) تحت قيد ايراداته وبالمعنى الهندسى، فانه يرغب فى الوصول الى ادنى منحنى من منحنيات تحويل الانتاج والذى له نقطه مشتركه مع خط معين من خطوط تساوى الايرادات μ فى حاله رفضه الحصول على الحد الاعلى من ايراداته (تحت قيد μ) فانه يرغب فى الوصول الى اعلى خط من خطوط تساوى الايرادات والذى له نقطه مشتركه مع منحنى معين من منحنيات تحويل الانتاج . فاذا كانت منحنيات تحويل الانتاج مقعرة بانضباط ، فان كل نقطه تماس بين خط تساوى الايرادات ومنحنى تحويل الانتاج تمثل الحل لكلا من مسالة الحصول على الحد الاعلى من الايرادات (تحت قيد اوسالفة الحصول على الحد الادنى للداخل (تحت قيد) ونسمى المحل الهندسى لجميع نقاط التماس هذه (انظر OE فى الشكل ١١-٤) مجرى توسع الناتج *output expansion path* مشابها فى التفسير لمجرى توسع الداخل *input expansion path* للمؤسسة ذات منتج واحد *single-product firm* .

Profit Maximization

الحصول على الحد الأعلى من الربح :

فاذا جبرنا عن الربح بواسطة q_1 و q_2 فان :

$$\pi = p_1q_1 + p_2q_2 - r h(q_1, q_2)$$

ثم وضعنا اشتقاقه الجزئيه مساويه للصفر ، نحصل على :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = p_1 - r h_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = p_2 - r h_2 = 0$$

وتحريك حدود السعر الى الجانب الايمن ثم القسمة على التكاليف الحدييه بالنمبسه

: $X \downarrow$

$$r = \frac{p_1}{h_1} = \frac{p_2}{h_2}$$

او بالتعويض من المعادلة (٤١-٤) نحصل على :

$$r = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} = p_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} \quad (٤٦-٤)$$

ولا بد من مساواة قيمة $MP \downarrow X$ لاننتاج كل واحد من المنتجات مع سعر $X^{(1)}$ ويستطيع صاحب المصنع زيادة ربحه بزيادة استخدامه للداخل X اذا كانت طائفة في انتاج اى من المنتجات تفوق تكلفته .
وتتطلب شروط الدرجة الثانية بان :

$$-rh_{11} < 0 \quad \begin{vmatrix} -rh_{11} & -rh_{12} \\ -rh_{21} & -rh_{22} \end{vmatrix} > 0$$

وبذلك المحددة الثانية ، نحصل على :

$$r^2(h_{11}h_{22} - h_{12}^2) > 0$$

وبما ان $r > 0$ فان شروط الدرجة الثانية يمكن النص عليها كما يلي :

$$(٤٧-٤) \quad h_{11} > 0 \quad h_{11}h_{22} - h_{12}^2 > 0$$

وهامعا يتطلبان ان $h_{22} > 0$ وان التكلفة الحديه لكل ناتج بالنسبة للداخل X يجب ان تكون متزايدة . وتتطلب شروط المعادلة (٤٧-٤) ان تكون علاقة الانتاج (٣٩-٤) محدبه بانضباط بالجوار حول النقطة التي تتحقق عندها شروط الدرجة الاولى (٤٦-٤) فاذا كانت (٣٩-٤) محدبه بانضباط في كل مكان ، فان اى حد اعلى يمكن الحصول عليه سوف يكون حداً اعلى شاملاً . $global\ maximum$.

اعتبر عملية الحصول على الحد الاعلى من الربح لصاحب مصنع بحيث ان منحنيات تحويل الانتاج تكون معطاة بمجموعة الدوائر المتحدة المركز ، وطيه ربحه كالتالى :

$$\pi = p_1q_1 + p_2q_2 - r(q_1^2 + q_2^2)$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئية مساوية للصفر ، نحصل على :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = p_1 - 2rq_1 = 0 \quad \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = p_2 - 2rq_2 = 0$$

(١) وباتباع اشتقاقات المعادلة (٤٥-٤) والملاحظه على صفحه (١٤٢ نجد انه ليس من المستغرب ان عطيه الحد الاعلى من الربح تتطلب ان تكون $r = dR/dx$ وهو المعدل الذى اذا اضفنا عنده وحدة اضافيه من X فان ايرادات صاحب المصنع سوف تزداد . وأنه يجب ان يكون مساويا للسعر .

ويمكن الحصول على شروط الدرجة الأولى كالتالى :

$$r = \frac{p_1}{2q_1} = \frac{p_2}{2q_2}$$

ونجد ان شروط الدرجة الثانية (٧٤-٤) تتحقق بحيث ان :

$$2 > 0 \quad 4 - 0 = 4 > 0$$

٤ - ٦ التعميم لـ m من المتغيرات :

GENERALIZATION TO m VARIABLES

انه من السهل تعميم النقاش عن المؤسسة (او الوحدة الانتاجية = firm) لتفطى العمليات الانتاجية والتي تحتوى على العدد n من الخواجل (الوحدات المنتجة = outputs) والعدد n من الداخيل (او وحدات المواد الأولية الضرورية للانتاج = inputs) بحيث انها مخطفتان عن الصفر للحلول الغير بديهية (nontrivial solutions). ولقد افترضنا ان (٤٨-٤) تكون دالة متزايدة بالنسبة لـ q 's وان تكون متناقصة بالنسبة لـ x 's وعلى هذا فان (١-٤) فى شكلها الضمنى تكون على الصورة التالية $q - f(x_1, x_2) = 0$ وتكون (٣٩-٤) على الصورة التالية :
 $h(q_1, q_2) - x = 0$ واخيرا افترضنا ان (٤٨-٤) تكون شبه - محدب به بانضباط منظم ضمن مجال نسبي .

Profit Maximization

الحصول على الحد الأعلى من الربح :

نعرف الربح ، فى حالة n من المتغيرات بانه الفرق بين التكلفة الاجمالية من مبيعات المنتجات والمصروفات على الداخيل بالشكل التالى :

$$\pi = \sum_{i=1}^n p_i q_i - \sum_{j=1}^n r_j x_j \quad (٤٩-٤)$$

ويرغب صاحب المؤسسة فى الحصول على الحد الاعلى من الربح تحت قيد القواعد الفنية المصفاة له بدالة الانتاج بحيث ان :

$$J = \sum_{i=1}^n p_i q_i - \sum_{j=1}^n r_j x_j + \lambda F(q_1, \dots, q_n)$$

وبوضع كل واحد من الـ $(s + n + 1)$ من الاشتقاقات الجزئية مساويا لصفر :

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = p_i + \lambda F_i = 0 \quad i = 1, \dots, s \quad (٥٠-٤)$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_j} = -r_j + \lambda F_{s+j} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = F(q_1, \dots, q_n) = 0$$

بحيث ان $F_i (i = 1, \dots, s+n = m)$ تكون هي الاشتقاق الجزئي للمعادلة (٤٨-٤) بالنسبة للتغير في المركز i th .

فإذا اخترنا أي اثنين من الـ s الاوائل من معادلات (٤٩-٥٠) حركنا الحدود الثانية الى الجانب الايمن ، وقسمنا كل معادله بالآخرى ، نحصل على (١) :

$$(٥١-٤) \quad \frac{p_l}{p_k} = \frac{F_l}{F_k} = -\frac{\partial q_k}{\partial q_l} \quad j, k = 1, \dots, s$$

نجد ان RPT بكل زوج من المنتجات (مع الاحتفاظ بمستويات النواتج الاخرى والدواخل ثابتة) يجب ان يساوى النسبة بين اسعارها . ولهذا فان للناتج في المركز k والدخل في المركز j تتطلب المعادله (٥٠-٤) بان يكون :

$$\frac{r_j}{p_k} = -\frac{F_{j+1}}{F_k} = \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \quad \text{او} \quad r_j = p_k \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, s \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

وبهذا فان قيمة الانتاج الحدى لكل داخل بالنسبة لكل ناتج تكون مساويه لسعر الداخل واخيرا اعتبر استخدام اثنين من الدواخل فتكون شروط الدرجة الاولى كالتالى :

$$\frac{r_k}{p_k} = -\frac{\partial x_k}{\partial x_j} \quad j, k = 1, \dots, n$$

وعلى هذا فان RTS لكل زوج من الدواخل (مع الاحتفاظ بمستويات الانتاج والدواخل ثابتة) يجب ان يساوى النسبة بين اسعارها . كما تتطلب شروط الدرجة الثانية للحصول على الحد الاعلى من الربح ان تتعاقب اشارات محدده هيسيان على النحو التالى:

$$(٥٢-٤) \quad \begin{vmatrix} \lambda F_{11} & \lambda F_{12} & F_1 \\ \lambda F_{21} & \lambda F_{22} & F_2 \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^m \begin{vmatrix} \lambda F_{11} & \dots & \lambda F_{1m} & F_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda F_{m1} & \dots & \lambda F_{mm} & F_m \\ F_1 & \dots & F_m & 0 \end{vmatrix} > 0$$

ويضرب العمودين الاوليين من الصف الاول والـ $1/\lambda$ الاوائل من الاخير بالمقدار ويضرب اخر من كلا الصغين بالمقدار λ

$$\lambda \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_2 \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} F_{11} & \dots & F_{1m} & F_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{m1} & \dots & F_{mm} & F_m \\ F_1 & \dots & F_m & 0 \end{vmatrix} > 0$$

وبما ان $\lambda < 0$ من المعادله (٥٠-٤) نجد ان شروط الدرجة الثانية تتطلب ان

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_2 \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} < 0, \dots, \begin{vmatrix} F_{11} & \dots & F_{1m} & F_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{m1} & \dots & F_{mm} & F_m \\ F_1 & \dots & F_m & 0 \end{vmatrix} < 0$$

(١) لقد استخدنا هنا من قاعدة الدالة الضمنية: $F_i/F_j = -\partial q/\partial q_j$ (راجع الجزء ٢-٨) .

أنها مجموعة مكونة من $(m+1)$ معادله خطيه محتويه على $(m+1)$ من المتغيرات (وهى :
 $(dq_i \ (i=1, \dots, s), \ dx_j \ (j=1, \dots, n) d\lambda$) (انظر الجزء ١-٨)

لحل معادلات (٥٤-٤) بقيم dq_i وقيم dx_j

$$\begin{aligned} dq_i &= \frac{-\mathcal{Q}_{i1} dp_1 - \dots + \mathcal{Q}_{in} dr_n}{\mathcal{Q}} & j=1, \dots, s \\ dx_j &= \frac{-\mathcal{Q}_{1,j+1} dp_1 - \dots + \mathcal{Q}_{m,j+1} dr_m}{\mathcal{Q}} & j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (٥٥-٤)$$

حيث ان \mathcal{Q} هى محدده عوامل المعادله (٥٤-٤) وان \mathcal{Q}_i هى العامل العرابق
 للمتغيرى الصف i والعمود j وهذه المحدده تكون مثل أعلى درجه محدده من
 المحددات فى المعادله (٥٢-٤) .

ويمكن تحديد معدل التغير فى الكمية بالنسبة للسعر بقسمة طرفى المعادله
 (٥٥-٤) على مشتق السعر مع مراعاة ان بقيعة المشتقات الاخرى للسعر تكون مساويه
 للصفر :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} &= \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = -\frac{\mathcal{Q}_{ij}}{\mathcal{Q}} & i, k=1, \dots, s \\ \frac{\partial x_i}{\partial r_k} &= \frac{\partial x_i}{\partial r_j} = \frac{\mathcal{Q}_{i,j,k+1}}{\mathcal{Q}} & i, k=1, \dots, n \\ \frac{\partial q_i}{\partial r_k} &= \frac{\partial x_k}{\partial p_j} = \frac{\mathcal{Q}_{i,j,k+1}}{\mathcal{Q}} & j=1, \dots, s \\ & & k=1, \dots, n \end{aligned} \quad (٥٦-٤)$$

وبما ان \mathcal{Q} تكون محدده متماثلة فان الاشتقاقات الجزئية للمعادله (٥٦-٤) تكون
 ايضا متماثلة ولا يوجد نظير لنتيجة الدخل الغير متماثلة للمستهلك فى نظريات الحصول
 على الحد الاعلى من الربح بالنسبة للمؤسسات وانما توجد النتيجة الاجاليه لها وهى
 عبارة عن نتيجة التعويض المتماثلة .

وقد تكون معظم الاشتقاقات الجزئية للمعادله (٥٦-٤) بأى إشارة (موجب أو سالبه)
 اعتمادا على الشكل المحدد لدالة الإنتاج الضمنية ويمكن فقط تحديد أشارات النتائج
 الخاصه بالأسعار . وعليه فانه ينتج من المعادله (٥٢-٤) أن \mathcal{Q}_{ii} وأن \mathcal{Q} يجب أن
 يكونان منطقتين فى الاشارات لقيم $j=1, \dots, m$ وعليه فان :

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} > 0 \quad j=1, \dots, s \quad \frac{\partial x_k}{\partial r_k} < 0 \quad k=1, \dots, n$$

وسوف ينتج عن زيادة فى سعر الناتج j مع الاحتفاظ بالاسعار الاخرى ثابتة زيادة فى
 انتاج ذلك المنتج بينما ينتج عن زيادة فى سعر الداخلى k انخفاض فى استخدامه .

SUMMARY

ملخص ما سبق :

ان دالة الانتاج للحالة التي يكون فيها منتجا واحدا واثنين متغيرين من الداخـل سوف تعطى مستوى امثل للنتائج الذي يمكن تأمينه من كل خليط محتمل من الداخـل . ولقد افترض ان تكون هذه الدالة ذات قيمة موجبه وتزايدية ضمن مجال ما . ولاغراض محدد ه ، فقد افترض انها شبه — مقعرة بانضباط منتظم ، ولحالات اخرى تكون مقعرة بانضباط . ونتحصل على منحنيات الانتاج بمعادلة كمية احد الداخـل المتغيرة طـى انها ثابتة ثم نعبر عن الناتج بدلالة كميات الداخـل الاخرى . وان مرونة ناتج ما من اجل داخل ما تكون هى معدل التغير النسبى لكل واحد فى الماطة تغير فى الداخـل . وعرفنا منحنى تساوى الكميات بانه المحل الهندسى لجميع مجاميع الداخـل التي تعطى مستوا معيناً من الناتج ، ووجدنا ان اى دالة انتاج شبه — مقعرة بانضباط منتظم نستطيع انتاج منحنيات تساوى الكمية بشكل محدب . ووجدنا ان مرونة التعويض ترتبط التغيرات النسبية لنسب الداخـل مع التغيرات النسبية لـ RTS على اى منحنى من منحنيات تساوى الكمية .

وقد يرغب صاحب المؤسسة فى الحصول على الحد الاعلى من الانتاج حسب تكلفة معينة معطاء اوانه قد يرغب فى الحصول على الحد الادنى من تكلفة انتاج مستوا معيناً من الانتاج وتتطلب شروط الدرجة الاولى لكلا المسألتين ان RTS بين الداخـل لا يبد وان يساوى لنسبة اسعار هذه الداخـل . وبالمعنى الهندسيه ، فان كلا المسألتين تتطلبان التماس بين منحنى تساوى الكميات وخط تساوى التكلفة وتعريف المحل الهندسى لنقط التماس هذه بهمجرى التوسع للمؤسسة . وتتطلب شروط الدرجة الثانية ان تكون دالة الانتاج شبه — مقعرة بانضباط منتظم فى جوار النقطة التي تتحقق عندها شروط الدرجة الاولى . وقد يسمح صاحب المؤسسة لمستوى الانتاج والتكلفة معا ان يتغيرا ويقوم هو بالحصول على الحد الاعلى من الربح .

وتتطلب شروط الدرجة الاولى بمساواة قيمة الانتاج الحدى **marginal physical product** لكل داخل باسعار هذه الداخـل .

وتتطلب شروط الدرجة الثانية ان تكون دالة الانتاج محدبه بانضباط فى جوار النقطة التي تتحقق عندها شروط الدرجة الاولى ومعنى هذا ان الانتاج الحدى لكلا الداخـلين يجب ان يكونا متناقصين .

ويمكن اشتقاق طلب المنتج للداخـل من الطلب المرتكز عليه للسلمة التي ينتجها

ويمكن أيضا الحصول على دوال طلب الداخل بحل شروط الدرجة الأولى لمستويات الداخل داخل بدلالة أسعار الداخل والانتاج . ويربط منحني طلب الداخل والطلب للداخل مع أسعارها وهذه المنحنيات تكون دائما مائلة الى اسفل ، ويحقق تطبيق قاعدة شاتيلير ان الانخفاض على المدى الطويل في الطلب على الداخل تابعاً ارغشاً في أسعارها لا يمكن ان يكون اقل من الانخفاض على المدى القصير .

اما اذا اطينا دالة الانتاج ، ومعادلة التكلفة ، ودالة مجرى التوسع لصاحب المؤسسة فان اجمالي التكلفة يمكن التعبير عنه بدلالة مستوى الانتاج ويجب دفع تكلفة داخلها الثابتة في المدى القصير بغض النظر عن مستوى الانتاج وتتطلب شروط الدرجة الأولى للحصول على الحد الأعلى من الربح ان يساوى صاحب المؤسسة بين التكلفة الحدية وبين سعر البيع لمنتجاته . وتتطلب شروط الدرجة الثانية بان تكون التكلفة الحدية متزايدة وسوف يتحقق التحدب المنضبط لدالة التكلفة اذا كانت دالة الانتاج المشار اليها مقعرة بانضباط ويمكن لصاحب المؤسسة ان يغير من مستويات داخله الثابتة في المدى الطويل وعليه فانه ايضا قادر على ان يختار دالة تكلفة معينة للمدى القصير وتكون دالة التكلفة الاجمالية في المدى الطويل هي المغلف (الوعاء) الذي يحوى جميع دوال التكلفة الاجمالية البديلة للمدى القصير . ويتطلب الحصول على الحد الأعلى من الربح على المدى الطويل مساوية التكلفة الحدية للمدى الطويل بسعر البيع وان تكون التكلفة الحدية للمدى الطويل متناقصة .

ومن الممكن انتاج اثنين او اكثر من المنتجات مشتركة في عملية انتاجية واحدة . وفي ابسط الحالات يمكن التعبير عن كميات انتاج اثنين من المنتجات بدلالة كمية داخل واحد فقط . ونعرف منحني تحويل الانتاج بأنه المعدل الهندسي لجميع مجاميع المنتجات التي يمكن أن ينفجها من مستوا معيناً للداخل . وفي الغالب يفترض ان تكون علاقة الانتاج شبه x محدبة بانضباط منتظم وعليه يكون لها منحنيات تحويل انتاج مقعرة .

وقد يرغب صاحب المؤسسة في الحصول على الحد الأعلى من الإيرادات المستى يتحصل عليها من مستوا معيناً من الداخل وتتطلب شروط الدرجة الأولى المساواة بين معدل تحويل الانتاج ونسبة أسعار المنتجات ويعنى هذا هندسياً انه سوف يجعل عند النقطة التي يكون عندها خط تساوى الإيرادات ملاصلاً لمنحني معيناً من منحنيات تحويل الانتاج . وتضمن خاصية شبه - التحدب بانضباط منتظم لعلاقة الانتاج تحقيق شرط الدرجة الثانية فاذا رغب صاحب المؤسسة في الحصول على الحد الأعلى من ربحه فلا بد من مساواة قيمة الانتاج الحدى للداخل بالنسبة لكل منتج وأسعار هذه المنتجات .

وتتطلب شروط الدرجة الثانية أن تكون علاقة الانتاج محددة بانضباط في جوار النقطة التي يتحقق عندها شروط الدرجة الأولى .

وفي الحالة الهامة والتي يستخدم فيها α من الدواخل لانتاج z من المنتجات تكون دالة الانتاج على الشكل الضمني لها . ويتفرض ان تكون تزايدية بالنسبة لمستويات الانتاج ، وان تكون تناقصية بالنسبة لمستويات الدواخل وان تكون شبه - محد بـ α بانضباط منتظم ضمن المجال النسبي . وتتطلب شروط الدرجة الاولى للحصول على الحد الاعلى من الربح :

- (١) ان يكون معدل تحويل الانتاج بين اى زوج من المنتجات مساويا لنسبة اسعارها .
- (٢) ان تكون قيمة الانتاج الحدى لكل داخل بالنسبة لكل ناتج مساوية لسعر الداخل .
- (٣) وان يكون معدل التعويض الفنى RTS بين كل زوج من الدواخل مساويا لنسبة اسعارها . يمكن حساب نتائج التعويض بالنسبة لتغيرات الاسعار ولكن لا يوجد نظير لنتيجة الدخل الغير متناظلة للمستهلك .

EXERCISES

4-1 Construct the average and marginal product functions for X_1 which correspond to the production function $q = x_1x_2 - 0.2x_1^2 - 0.8x_2^2$. Let $x_2 = 10$. At what respective values of x_1 will the AP and MP of X_1 equal zero?

4-2 Determine the domain over which the production function $q = 100(x_1 + x_2) + 20x_1x_2 - 12.5(x_1^2 + x_2^2)$ is increasing and strictly concave.

4-3 Derive an input expansion path for the production function $q = A(x_1 + 1)^\alpha(x_2 + 1)^\beta$ where $\alpha, \beta > 0$.

4-4 Assume that an entrepreneur's short-run total cost function is $C = q^3 - 10q^2 + 17q + 66$. Determine the output level at which he maximizes profit if $p = 5$. Compute the output elasticity of cost at this output.

4-5 A family of short-run total cost curves is generated by $C = 0.04q^3 - 0.9q^2 + (10 - \ln k)q + 8k^2$ where $k > 1$ denotes plant size. Determine the firm's long-run total cost curve.

4-6 An entrepreneur uses one input to produce two outputs subject to the production relation $x = A(q_1^\alpha + q_2^\beta)$ where $\alpha, \beta > 1$. He buys the input and sells the outputs at fixed prices. Express his profit-maximizing outputs as functions of the prices. Prove that his production relation is strictly convex for $q_1, q_2 > 0$.

4-7 An entrepreneur produces one output with two inputs using the production function $q = Ax_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$. He buys the inputs and sells the outputs at fixed prices. He is subject to a quota which allows him to purchase no more than x_1^* units of X_1 . He would have purchased more in the absence of the quota. Determine the entrepreneur's conditions for profit maximization. What is the optimal relation between the value of the marginal product of each input and its price? What is the optimal relation between the RTS and the input price ratio?

SELECTED REFERENCES

- Allen, R. G. D.: *Mathematical Economics* (London: Macmillan, 1956). Chap. 18 contains a mathematical statement of the theory of the firm. The necessary algebra is developed in the text.
- Carlson, Sune: *A Study on the Theory of Production* (New York: Kelley & Mäilman, 1956). An exposition of the theory of the firm in terms of simple mathematics.
- Frisch, Ragnar: *Theory of Production* (Chicago: Rand McNally, 1965). Differential and integral calculus are used extensively in this treatise.
- Hicks, J. R.: *Value and Capital* (2d ed., Oxford: Clarendon Press, 1946). The theory of the firm is developed in chaps. VI-VII. The mathematical analysis is contained in an appendix.
- Menger, K.: "The Laws of Return," in O. Morgenstern (ed.), *Economic Activity Analysis* (New York: Wiley, 1954), pp. 419-482. A mathematical study of alternative formulations of the law of diminishing returns.
- Samuelson, Paul A.: *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). Chap. 4 contains a mathematical statement of the theory of the firm.
- Silverberg, E.: "The Le Chatelier Principle as a Corollary to a Generalized Envelope Theorem," *Journal of Economic Theory*, vol. 3 (June, 1971), pp. 146-155. A general discussion with illustrations using the calculus and matrix algebra.

الفصل الخامس

موضوعات في نظرية المؤسسة

TOPICS IN THE THEORY OF THE FIRM

ان اساسيات نظرية المؤسسة غالباً ما تكون أكثر من نظرية المستهلك قد توسعت وطبقت على مسائل واسعة النطاق . وبعض هذه التوسعات والتطبيقات سوف تناقش في هذا الباب . وسوف تكون خواص دوال الانتاج المتجانسة موضوع الجز (١-٥) وخواص مرونة التمييز الثابتة . (CES) constant-elasticity-of-substitution

لدوال الانتاج هي موضوع الجز (٢-٥) ولقد وضعنا تحليل شروط كيون - تگر Kuhn-Tucker لنوعين مختلفين من عدم اتصال الانتاج : production discontinuities .

في الجز (٣-٥) ثم ناقشنا في الجز (٤-٥) الازدواجية duality بين دوال الانتاج والتكلفة بالإضافة الى بدئية شيفارد Shephard's lemma ولقد توسعنا في نظرية المؤسسة في الجز (٥-٥) لنغطي حالات عدم التاكيد بالنسبة للأسعار والمنتجات uncertain price and output وذلك بإدخال الربح عنصراً من عناصر دالة المنفعة للمستهلك . أما في الجز (٦-٥) فلقد وضعنا دوال الانتاج الخطية ، ثم ناقشنا المفاهيم العامة لموضوع البرمجة الخطية Linear production في الجز (٧-٥) - بالإضافة الى بعض الأمثلة المأخوذة من نظرية الانتاج الخطية . ومع هذا فقد حققنا نوعاً آخر مختلفاً من الازدواجية لازواج من مجموعات البرمجة الخطية .

٥ - ١ دوال الإنتاج المتجانسة :

HOMOGENEOUS PRODUCTION FUNCTIONS

نعرف " حجم الغلة " returns to scale بأنه استجابة الناتج للزيادة التناسبية لجميع الدواخل . فإذا كانت زيادات الناتج بنفس النسبة فإن حجم الغلة يكون ثابتاً في مجال مجاميع الدواخل المعتبره (ويطلق على هذه الحالة : حالة ثبات الغلة بالنسبة لحجم العملية الانتاجية constant returns to scale وحجم الغلة سوف يزداد إذا

أزداد الناتج بنسبه أكبر وسوف يقل إذا نقص الناتج بنسبه أقل وقد تظهر دالة واحدة لجميع أنواع حجم الغلة . ويفترض بعض الاقتصاديون أن دوال الإنتاج تظهر ظاهرة تزايد الغلة increasing returns لكميات صغيرة من الداخلة ، ثم تمر خلال مرحلة حالة ثبات الغلة constant returns وأخيرا تمر خلال حالة تناقص الغلة decreasing returns كلما أصبحت كميات الداخلة أكبر فأكثر .

Properties

خصائص حجم الغلة :

يمكن تعريف حجم الغلة بسهولة لدوال الإنتاج المتجانسة فتكون دالة الانتاج متجانسة من الدرجة k إذا كان :

$$f(tx_1, tx_2) = t^k f(x_1, x_2) \quad (1-5)$$

حيث أن k ثابتا من الثوابت ، وأن t تكون أى رقم حقيقى موجب فإذا ازداد كلا الداخلين بمقدار العامل t فإن الناتج سوف يزداد بمقدار العامل t^k ويكون حجم الغلة فى حالة تزايد إذا كانت $k > 1$ وثابتا إذا كانت $k = 1$ ومتناقصا إذا كانت $0 < k < 1$ ومن المعادة آتراض متجانس دوال الإنتاج من الدرجة الأولى (1) .

وبتابع اشتقاق الجز (3-3) فإن الاشتقاق الجزئية لدالة متجانسة من الدرجة k تكون متجانسة من الدرجة $k-1$ ونخص هنا التجانس من الدرجة الأولى . فإذا كانت دالة متجانسة من الدرجة الأولى فإن الانتاجات الحدية marginal products للداخلين X_1 و X_2 يكونا متجانسين من الدرجة صفر ، بمعنى أنها سوف يبقيان بدون تغيير للتغيرات النسبية لكلا الداخلين وبالتحديد فإن :

$$f_1(x_1, x_2) = f_1\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right)$$

$$f_2(x_1, x_2) = f_2\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right)$$

حيث أن $1/x_2 = t$ وسوف يعتمد الناتجان الحديان على النسبه التى استخدم فيها X_1 و X_2 .

أن منحنيات تساوى الكمية لدالة الانتاج المتجانسة يكون لها نفس خواص منحنيات المساواة لدالة المنفعة المتجانسة كما نوقشت فى الجز (3-3) ويعتمد RTS على النسبه التى استخدم بها الداخلة وليس الكميات المطلقة لها .

(1) أى دالة تكون متجانسة من الدرجة الأولى يقال أنها متجانسة خطيا وهذا لايعنى بالطبع أن دالة الانتاج تكون دالة خطية .

وسوف يمثل الخط المستقيم التابع من نقطة الأصل في الربيع الموجب نقط الدواخل التي يتساوى عندها RTS ونتيجة لهذا فإن مجرى التوسع ، وهو المحل الهندسي للنقاط التي عندها RTS يساوى نسبة سعر الداخل الثابتة ، يكون خطا مستقيما إذا كانت دالة الإنتاج متجانسة من أي درجة وإن أي دالة إنتاج والتي يمكن التعبير عنها كـ الدالة متزايدة مطردة لدالة متجانسة تسمى دالة متألّفة homothetic ويكون لها نفس منحنيات تساوى الكمية للدالة المتجانسة المشار إليها بالرغم من الكميات العكسبة لكل منحني تكون عادة منطقة • ودالة الإنتاج المعطاه بالمعادلة (٤-٥) تكون متألّفة وليست متجانسة •

أن أحد مشاهير دوال الإنتاج المتجانسة الواسعة الاستعمال هي دالة كـب - دوجلاس Cobb-Douglas function :

$$q = Ax_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \quad (٥-٦)$$

حيث أن $0 < \alpha < 1$ وأن زيادة مستويات الدواخل بنسبة المعامل α سوف ينتج عنه الاتي :

$$f(tx_1, tx_2) = A(tx_1)^\alpha (tx_2)^{1-\alpha} = tAx_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$$

وطى هذا فإن دالة كـب - دوجلاس تكون دالة متجانسة من الدرجة الأولى ، وأن MPs لكلا الداخلين يكونان متجانسين من الدرجة صفر طى النحو التالي :

$$f_1(x_1, x_2) = \alpha Ax_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}$$

$$f_2(x_1, x_2) = (1-\alpha) Ax_1^\alpha x_2^{-\alpha}$$

$$f_1(tx_1, tx_2) = \alpha A t^{\alpha-1} x_1^{\alpha-1} t^{1-\alpha} x_2^{1-\alpha} = \alpha Ax_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}$$

$$f_2(tx_1, tx_2) = (1-\alpha) A t^\alpha x_1^\alpha t^{-\alpha} x_2^{-\alpha} = (1-\alpha) Ax_1^\alpha x_2^{-\alpha}$$

ولقد اثبتنا في الجز (٤-١) أن دالة الإنتاج هذه تكون ذات قيمة موجبه ، وانها متزايدة وانها شبه مقعرة بانضباط منتظم ضمن المجال $x_1, x_2 > 0$.

أن مجرى التوسع الذي ولته دالة كـب - دوجلاس يكون خطيا • وتتطلب شروط الدرجة الأولى للحصول على الحد الأمثل الخفيف ، مايلي :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\alpha Ax_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha) Ax_1^\alpha x_2^{-\alpha}} = \frac{\alpha x_2}{(1-\alpha) x_1}$$

وطى هذا فإن مجرى التوسع يكون معطا بالدالة الضمنية التالية :

$$(1-\alpha)r_1x_1 - \alpha r_2x_2 = 0$$

والتي تصف الخط المستقيم التابع من نقطة الأصل في مسطح تساوى الكميات isoquant:plane .

نظرية أويلر والتوزيع : Euler's Theorem and Distribution

تنص نظرية أويلر على أن الشروط التالية تتحقق بأي دالة متجانسة ^(١) :

$$(٣-٥) \quad x_1 f_1 + x_2 f_2 = k f(x_1, x_2)$$

وتعطي هذه النظرية عددا من النتائج ذات قيمة للاقتصاد فعلى سبيل المثال إذا قسمنا المعادلة (٣-٥) على q نحصل على :

$$ex_1 + ex_2 = k$$

وهذه تنص على أن مجموع مروئعي المنتجين للداخلين X_1 و X_2 تساويان درجة التجانس (راجع الجزء ٤-٤ لتعريف المرونة) .

افترض أن دالة الانتاج تكون متجانسة من الدرجة الاولى ، وبتعويض $q = f(x_1, x_2)$ نحصل على :

$$(٤-٥) \quad x_1 f_1 + x_2 f_2 = q$$

وهذه تنص على أن أجمالي الناتج q يساوي MP للداخل X_1 مضروباً في كمية X_1 زائداً MP للداخل X_2 مضروباً في كمية X_2 فإذا كانت المروسة تدفع لموردي suppliers كل داخل من الدواخل ناتجه المادي الحدي فإن أجمالي الناتج سوف يستنفذ كاملاً .

وسوف غرق من الدفعات الناتج إذا كانت درجة التجانس أكبر من واحد وسوف تكون أقل من الناتج إذا كانت درجة التجانس أقل من واحد .

طعمب نظرية أويلر دوراً هاماً في تطوير نظرية الانتاج الحدية للتوزيع وتتكون المفاهيم الرئيسية لهذه النظرية من :

- (١) أن كل داخل سوف يدفع له قيمة أنتاجه الحدي .
- (٢) أن أجمالي الناتج سوف يستنفذ كاملاً وما أن هذه الشروط تتحقق بدوال الانتاج من الدرجة الاولى فإنه كان من الخطأ الافتراض بأن جميع دوال الانتاج يحسب أن تكون من هذا النوع .

لقد استغيد من دالة كـ بـ دوجلاس في المعاوله للتحقق من نظرية الانتاج الحدية

(١) بتفاضل المعادلة (١-٥) جزئياً بالنسبة للمعامل t مستخدمين قاعدة الدالة المركبة بالنسبة للطرف الأيسر لنحصل على :

$$x_1 f_1(tx_1, tx_2) + x_2 f_2(tx_1, tx_2) = t^{k-1} f(x_1, x_2)$$

ونحصل على المعادلة (٣-٥) بتعويض $t = 1$.

$$q = \alpha q + (1 - \alpha)q$$
$$x_1(pf_1) + x_2(pf_2) = pq$$
$$t\pi = pf(tx_1, tx_2) - r_1 tx_1 - r_2 tx_2$$

(١) انظر المراجع المدونه في نهاية هذا الباب .

لا يكون لدالة الربح حداً أو اقصى محدداً . اما اذا كانت الاسعار بحيث ان كل مجموعة عوامل تعطى ربحاً سالباً (خسارة) فان صاحب المؤسسة سوف يتوقف عن العمل .
 واما الاحتمال الثالث والذي يحد من تحاليل النظريين في الانتاج الحدى ، فانه يكون اكثرهم تمتعاً ففى هذه الحالة ، لا يوجد اى مجموعة عوامل تؤدى الى ربح موجب ، ولكن المجموعة (x_1^0, x_2^0) تؤدى الى ربح يساوى صفر . ويتبع من تنجاس دالة الربح ان مجموعة العوامل (x_1^0, x_2^0) سوف تؤدى الى ربح يساوى صفر . وسوف يكون الحد الاقصى للربح فى المدى الطويل مساوياً للصفر ولكن حجم المؤسسة سيكون غير محدد $indeterminate$ فاذا كان صاحب المصنع يتحصل على ربح يساوى صفر لمجموعة معينة من العوامل ، فان ربحه سوف يبقى بدون تغيير اذا ضاعف او نصف حجم عملياته الانتاجيه . فاذا حجم انتاجى معين فرض على صاحب المؤسسة ، فان نظريه اولر تتحقق ، وان انتاجه سوف يستنفذ كاملاً .

انه ليس من الضروري افتراض ان دالة الانتاج تكون متجانسه لتحقيق معطيات نظرية الانتاج الحديه وسوف تتحقق المعطيات اذا كانت :

- (١) دالة الانتاج غير متجانسه .
- (٢) تحققت شروط الدرجة الاولى والثانيه للحصول على الحد الاقصى من الربح .
- (٣) وان الربح الاقصى لصاحب المؤسسة يكون مساوياً للصفر .

ولقد افترضنا الشرطين الاول والثانى خلال مناقشات وتطويع نظرية المؤسسة ففى الجزئين (١-٤) و (٢-٤) وسوف نظهر فى الباب السادس ان الدخول الحُر free entry والخروج exit للمؤسسات المتنافسه سوف ينتج عنه تحقيق الشرط الثالث السابق . وهذا الشرط يتطلب ان :

$$\pi = pq - r_1x_1 - r_2x_2 = 0$$

وبتمويض $r_1 = pf_1$ و $r_2 = pf_2$ (وهما شرطى الدرجة الاولى) وبالحل لقيمه q نحصل على :

$$q = x_1f_1 + x_2f_2$$

وهنا نجد ان نتيجة المعادله (٤-٥) قد توصلنا اليها بدون استخدام نظرية اولر . وبما ان دالة الانتاج غير متجانسه ، فان مجموعة العوامل المثلى لصاحب المؤسسة تكون ، عامة محدده $determinate$.

ويمكن النظر فى مسألة الترسط $indeterminacy$ problem بالنسبه لعدم مقدرة صاحب المؤسسة من تحقيق شروط الدرجة الثانيه للحصول على الحد الاقصى من الربح ويتناضل المعادله (٤-٥) تفاضلاً تاماً نحصل على :

$$(f_1 + x_1f_{11} + x_2f_{21}) dx_1 + (f_2 + x_1f_{12} + x_2f_{22}) dx_2 = dq$$

وكبد يل لهذا نفترض ان $dx_2 = 0$ ثم نقسم على dx_1 ونجد $dx_1 = 0$ ثم نقسم على dx_2 :

$$f_1 + x_1 f_{11} + x_2 f_{21} = \frac{\partial q}{\partial x_1} = f_1$$

$$f_2 + x_1 f_{12} + x_2 f_{22} = \frac{\partial q}{\partial x_2} = f_2$$

فاذا طرحنا f_1 من طرفي المعادلة الاولى واوجدنا الحل لقيمة f_{11} ثم طرحنا f_2 من طرفي المعادلة الثانية واوجدنا الحل لقيمة f_{22} نحصل على :

$$(٦-٥) \quad f_{11} = -\frac{x_2}{x_1} f_{21} \quad f_{22} = -\frac{x_1}{x_2} f_{12}$$

وطيه فان $f_{12} = f_{21}$ تكون موجبه اذا كانت f_{11} و f_{22} موجبتين كما افترضنا .
وتتقييم محددة هيسيان لدالة الانتاج مستخدمين المعادلة (٦-٥) نحصل على :

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = \left(-\frac{x_2}{x_1} f_{21}\right) \left(-\frac{x_1}{x_2} f_{12}\right) - f_{12}^2 = 0$$

وطيه فان اى دالة انتاج متجانسه من الدرجة الاولى تكون مقعرة ، ولكن لها بعض المناطق المخطئه التي لا يتكون فيها مقعرة بانضباط .

ولقد استخدمت دوال الانتاج المتجانسه بكثرة ومن فهم في علم الاقتصاد بالرغم من مسائل التوسط للمؤسسة الواحدة ولذا فقد وضعت بعض الافتراضات للتعامل مع هذه المسائل منها الافتراضين :

(١) ان حجم المؤسسة واعداد المؤسسة يقرراليا خاضعا لشرطان الانتاج الصناهي يحقق الطلب الصناهي .

(٢) ان يكون للصناهي industry دالة انتاج متجانسه من الدرجة الاولى حتى ولو لم يكن للمؤسسة الواحدة (المكونه منها الصناهي) داخل الصناهي مثل هذه الدوال الانتاجية وسوف نظهر في البابين السابع والثامن ان حجم المؤسسة (او الوحدة الصناهي في هذا الباب) قد يمكن تقريره هذا اذا كانت الوحدات الصناهي تعمل تحت شروط المنافسة الغير كامله imperfect competition .

دوال التكلفة للمدى الطويل :

Long-Run Cost Functions

انه من الممكن اقامة دوال التكلفة للمدى الطويل بالداخل المتغيره لدوال الانتاج المتجانسه والتي لها منحنيات سوا" محدبه . افترض ان (x_1^0, x_2^0) هي المجموعة المثل للداخل لانتاج وحدة واحدة من Q فتكون تكلفة الانتاج المقابله لها $Q = r_1 x_1^0 + r_2 x_2^0$ وما ان مجرى التوسع لدالة الانتاج المتجانسه يكون خطيا ، فان كل المصايح المثل للداخل يمكن كتابتها على النحو التالي : (tx_1^0, tx_2^0) وطى هذا فان دالة الانتاج ومعادلة التكلفة يمكن كتابتها كالتالى :

$$q = f(tx_1^{\alpha}, tx_2^{\beta}) = t^k$$

$$C = (r_1x_1^{\alpha} + r_2x_2^{\beta})t = at$$

وبحل المعادلة الاولى لقيمة t تم التعويض بهذه القيمة فى المعادلة الثانية لنحصل على دالة التكلفة الاجمالية :

$$C = aq^{1/k}$$

$$\frac{dC}{dq} = \frac{a}{k} q^{(1-k)/k} \quad \frac{d^2C}{dq^2} = \frac{a(1-k)}{k^2} q^{(1-2k)/k}$$

بحيث ان :

ان الدوال المتجانسة من الدرجة الاولى يكون لها MC و ATC ثابتان ويكون لها ايضا دالة تكلفة اجمالية خطية للمدى الطويل وان MC يكون تزايديا فى كل مكان اذا كانت $k < 1$ وتتناقصه فى كل مكان اذا كانت $k > 1$ ويمكن تحقيق شرط الدرجة الثانية ان MC لا بد وان يكون تزايديا اذا كانت درجة التجانس اقل من واحد .

مثال : ان دالة الانتاج $q = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$ حيث ان $\alpha, \beta > 0$ تكون متجانسة من الدرجة :

$$q = A(tx_1)^{\alpha}(tx_2)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$$

وتصطبنا معادلة (٣٠-٤) دوال التكلفة للمدى الطويل لدوال الانتاج لمثل هذا النوع وتكون دالة التكلفة لدالة كـ ب - دوجلاس للانتاج ، بحيث ان $\alpha + \beta = 1$ على النحو التالى :

$$C = aq$$

$$a = \frac{r_1^{\alpha}r_2^{\beta}}{A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}$$

حيث ان :

٥ ٢ دوال الاساج ذات مرونة التعويض انشائية :

CES PRODUCTION FUNCTIONS

ان دالة الانتاج التى تنتمى الى النوع CES من هذه الدوال يكون لها الميزتان

التاليتان :

(١) تكون متجانسة من الدرجة الاولى .

(٢) تكون لها مرونة تعويض ثابتة CES

(انظر الجزء ١-٤) . ان دالة من دوال الانتاج والى لانتك واحدة او اثنين

من الخواص السابقة لاتتنمى الى هذا النوع من الدوال . ولقد اشبعنا فى الجزء (١-٤)

ان دوال الانتاج $q = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$ يكون لها مرونة تعويض ذات وحده ثابتة وعلى هذا فأن

جميع دوال الانتاج من هذا النوع سوف تحقق الميزة الثانية السابقة . ولكن الميزة (١)

تتحقق فقط اذا كانت $\alpha + \beta = 1$ بمعنى انها تتحقق لدالة كـب ودوجلاس.

مثال : ان دالة الانتاج $q = Ax_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ تكون متجانسه من الدرجة الاولى ،
ولكن ليس لها مرونة تعويض ثابتة ولا تنتمي الى الفصل CES .

Properties

خواصها :

لقد اثبت باستخدام طرق متقدمة في الاثبات ان الفصل CES من دوال الانتاج
يمكن وضعها على النقط التالي : (١)

$$q = A[\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)x_2^{-\rho}]^{-1/\rho} \quad (٧-٥)$$

بحيث ان $A > 0$ و $0 < \alpha < 1$ وانه من السهل تحقيق ان المعادله (٧-٥) تكون
متجانسه من الدرجة الاولى :

$$A[\alpha(tx_1)^{-\rho} + (1-\alpha)(tx_2)^{-\rho}]^{-1/\rho} = tA[\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)x_2^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

وبهذا تكون الانتاجات الحديده للدواخل على النحو التالي :

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{\alpha}{A^\rho} \left(\frac{q}{x_1} \right)^{\rho+1} \quad \frac{\partial q}{\partial x_2} = \frac{1-\alpha}{A^\rho} \left(\frac{q}{x_2} \right)^{\rho+1}$$

والتي تكون موجبه للمجال $x_1, x_2 > 0$ ويكون معدل التعويض الفنى هو :

$$RTS = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{\rho+1} \quad (٨-٥)$$

ان RTS يكون تزايديا وتكون منحنيات تساوى الكميات محدبه اذا كانت $\rho > -1$ وهذه
ايضا توضح ان اى دالة انتاج من الفصل CES تكون شبه مقعرة . بانضباط منتظمه فى
المجال $x_1, x_2 > 0$.

ويمكن الحصول على تعبير لمرونة التعويض لدوال الانتاج المتجانسه من الدرجة الاولى

بتعويض (٦-٥) فى (١١-٤) .

$$\sigma = \frac{f_1 f_2 (x_1 f_1 + x_2 f_2)}{f_{12} (x_1 f_1 + x_2 f_2)^2}$$

ثم الاستعانه بنظرية اويلر فى المعادله (٣-٥) :

$$\sigma = \frac{f_1 f_2}{f_{12} q} \quad (٩-٥)$$

بحيث ان (من ٧-٥)

$$f_{12} = \frac{(1+\rho)\alpha(1-\alpha)q^{1+\rho}}{A^\rho (x_1 x_2)^{1+\rho}}$$

وبتقديم (٩-٥) لـ (٧-٥) :

(١) راجع مقالة : K. Arrow, H. B. Chenery, B. Minhas, and R. M. Solow

تحت عنوان "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency,

المذكورة فى الدوريه "Review of Economics and Statistics, vol. 43

لشهر اغسطس من العام ١٩٦١م على الصفحات ٢٣٢-٢٢٨ .

$$(١٠-٥) \quad \sigma = \frac{1}{1+\rho} \quad \rho = \frac{1-\sigma}{\sigma}$$

وطى هذا فان ρ تكون لها علاقة وثيقة بمرحلة التعميش الثابتة بحيث ان اللامتناهية $\sigma > -1$ تكون متكافئة لـ $\sigma > 0$

منحنيات تساوى الكمية : Isoquants

ان الشكل الخاص بمنحنيات تساوى الكمية المحدبه والتي تولدت من دالة CES تعتمد على قيمة σ ويوجد خمسة حالات ، منها اثنان داخلان ضمن اطار النهايات limits والثلاث الباقيات حالات فاديه وكل هذه الحالات تصف الاشكال المعتله لمنحنيات تساوى الكمية .

الحالة الاولى : اذا كانت $\sigma \rightarrow 0$ فان $\rho \rightarrow +\infty$ ، يقترب RTS والمعطى بالمعادله (٨-٥) من الصفر اذا كانت $x_1 > x_2$ (او) ان RTS يقترب من $+\infty$ اذا كانت $x_1 < x_2$ وفى حالة النهاية فان التعميش يكون مستحيلا . وطى هذا فسوف يكون شكل المنحنى مقربا من الزاويه القائمة .

الحالة الثانية : اذا كانت $0 < \sigma < 1$ فان $\rho > 0$ ، ويمكن كتابة منحنيات المعادله (٧-٥) على النحو التالى :

$$(١١-٥) \quad \alpha x_1^\rho + (1-\alpha)x_2^\rho = \left(\frac{q}{A}\right)^\rho = K$$

حيث ان K ثابت موجب لاي قيمة مختلفة من q لانه لا يمكن لاي حد من الحدود الموجودة فى الطرف من ان تكون سالبه او طى هذا فلا يمكن لاي حد ان يفوق قيمة K وكلما $x_1 \rightarrow 0$ فان $\alpha x_1^\rho \rightarrow +\infty$ ، وما انه يوجد حدا طى K لقيمة αx_1^ρ فان x_1 لا يمكن ان تساوى صفر . ونفس الاسباب ، لا يمكن ان تساوى صفر . وطى هذا فان المنحنى سوف لا يقطع ولا يقطع ولا يقترب من المحاور ولكنه سوف يكون فى اقتراب متواصل بالنسبة للخط $x_1 = (K/\alpha)^{1/\rho}$ وكذلك بالنسبة للخط $x_2 = [K/(1-\alpha)]^{1/\rho}$.

الحالة الثالثة : واذا كانت $\sigma = 1$ فان $\rho = 0$ ولقد لوحظ انه فى حالة $\sigma = 1$ فان دالة الانتاج CES تصبح دالة كـب - دو جلاس . ولا يمكن شرح هذه الحالسه من المعادله (٧-٥) لان هذه الحاله غير واضحه من هذه المعادله . فعندما تكون $\rho = 0$ فان المعادله (١١-٥) تصبح معادله متطابقه identity ولا تساعد فى التوصل الى معييرات لهذه الحاله . ويمكن فحص بعض هذه المعييرات من طريق استخدام قاعدة لوبيتال

والتي تنص على (١) انه اذا كان :

$$\lim_{z \rightarrow 0} h(z) = 0 \quad \text{وإن} \quad \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 0$$

وإنه اذا كان كذلك :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{h'(z)}{g'(z)} = \alpha$$

فإنه اذا :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{h(z)}{g(z)} = \alpha$$

فاذا كتبنا اللوغاريتم الطبيعي للمعادله (٧-٥) كنحارج قسمة دالتين لـ ρ نحصل على :

$$\ln q - \ln A = \frac{-\ln [\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)x_2^{-\rho}]}{\rho} = \frac{h(\rho)}{g(\rho)}$$

بحيث ان $h(\rho) \rightarrow 0$ وأن $g(\rho) \rightarrow 0$ كلما $\rho \rightarrow 0$ وبأخذ اشتقاق المقام :

$$h'(\rho) = \frac{\alpha x_1^{-\rho} \ln x_1 + (1-\alpha)x_2^{-\rho} \ln x_2}{\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)x_2^{-\rho}}$$

وهذا الاشتقاق سوف يقترب من $\alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2$ converges to كلما $\rho \rightarrow 0$ وأخيراً ، فإن $g'(\rho) = 1$. وباستخدام قاعدة لوبيتال تصبح هذه الحالة على النحو التالي :

$$\ln q - \ln A = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2$$

وبهذا تكون $q = Ax_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ هي دالة كـ بـ دو جلاس .

الحالة الرابعة : اذا كانت $1 < \sigma < \infty$ فإن $0 < \rho < 1$ أن قوى حدود الطرف الايسر للمعادلة (١١-٥) تكون موجبه وسوف تتقابل المنحنيات مع المحاورين . فاذا كانت $x_1 = 0$ فإن $x_2 = [K/(1-\alpha)]^{-\sigma}$ وإذا كانت $x_2 = 0$ فإن $x_1 = (K/\alpha)^{-\sigma}$.

الحالة الخامسة : اذا كانت $\sigma \rightarrow +\infty$ فإن $\rho \rightarrow -1$. وبأخذ النهايه limit للمعادله (١١-٥) نجد ان الحدود على الجانب الايسر منها عؤول الى واحد ، وان المنحنيات تكون خطوط مستقيمه وتكون الدواخل inputs بدائل متكامله perfect substitutes في هذه الحالة .

The Equilibrium Condition شروط التوازن :

ان دالة الانتاج CES والمعطاه بالمعادله (٧-٥) تكون مريكة وصعبه المعامله ولكن RTS الخاص بها يكون سهلا للغاية ، وهذا واحد من اسباب شهرته واستخدمته الواسعة . وبالتصغير لـ σ من المعادله (١٠-٥) وضع RTS في المعادله (٨-٥)

(١) راجع كتاب T. M. Apostol تحت عنوان 'Calculus' المجلد الاول على صفحات ٢٩٢ - ٢٩٥ .

يساوى نسبة اسعار الداخلى ، نحصل على :

$$(١٢٠٥) \quad \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{1/\sigma} = \frac{p_1}{p_2}$$

وكذلك نحصل على :

$$\frac{x_2}{x_1} = a \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^\sigma$$

بحيث ان

$a = [(1-\alpha)/\alpha]^\sigma$ ويمكن للقارىء من ان يتحقق من المعادله (١٢٠٥) ان مرونة التعميم الثابتة تكون ايضا المرونة الثابتة لنسبة استخدام الداخلى والمعطاه بالمعادله (x_2/x_1) بالنسبه لنسبة اسعار الداخلى .

وتنص معادله (١٢٠٥) على نسبة استخدام الداخلى تكون دالة اسبه بسيط لنسبه اسعار الداخلى وما ان هذه الدالة خطيه بالنسبه للوقتيات المتغيرات فان المتغيران (ذوالقيمه الثابتة) a و σ قابلان لمعطية التقدير estimation عن طريق استخدام تحاليل التطور العكسى الخطى linear regression analysis من المعلومات الملميه data المعطاه للسلسلات الزمنيه time-series . فاذا كانت x_2 و x_1 تمثلان العمل labor ورأس المال capital على الترتيب فان المعادله (١٢٠٥) تبين كيف تتغير نسبة رأس المال للعمل capital-labor ratio لسلمة محدده مع التغيرات فى نسبة ايجار الاجر العمالى الى رأس المال wage-capital rental .

A Generalized CES Production Function : على وجه العموم :

لقد مررنا دالة الانتاج CES على انها دالة متجانسه من الدرجه الاولى وهنا سوف نسمحا لتغضى اى درجه من التجانس . اعتبر دالة الانتاج التاليه :

$$(١٢٠٥) \quad q = B[\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)x_2^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

ضمن نطاق المجال $x_1, x_2 > 0$ بحيث ان B, α, k يكونوا جميعا موجبين، وهذه الدالة تكون متجانسه من الدرجه k بحيث ان :

$$B[\alpha (tx_1)^{-\rho} + (1-\alpha)(tx_2)^{-\rho}]^{-1/\rho} = t^k B[\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)x_2^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

وان انتاجاتها الحدييه MPs تكون :

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{k\alpha q^{(k+\rho)/k}}{B^{\rho k} x_1^{(\rho+1)}} \quad \frac{\partial q}{\partial x_2} = \frac{k(1-\alpha)q^{(k+\rho)/k}}{B^{\rho k} x_2^{(\rho+1)}}$$

يمكن التعبير عن الدالة فى المعادله (١٢٠٥) على انها تحويله مطروده موجب المعادله (٢٠٥) وان منحنيات تساوى الكميه سوف لاتتغير اشكالها بعزل هـ هذه التحويلات . ونتيجة لهذا فان RTS للمعادله (١٢٠٥) يكون معطاه بالمعادله

(٨٥) وتكون مرونة التعويض معطاء بالمعادلة (١٠٥) ويكون شرط الدرجة الاولى للحصول على الحد الأدنى من التكلفة (تحت شروط وتقيود) معطاء بالمعادلة (١٣٥) فإذا كانت $\lambda < 1$ فإن المعادلة (١٣٥) تكون مقعرة بانضباط وان شروط الدرجة الاولى للحصول على الحد الاطلى من الربح والمعطاء بالمعادلة (١٩٤) يكون لها معنى .

٥ - ٣ شروط شكون - تكر : THE KUHN-TUCKER CONDITIONS

ان شروط كون - تكر تكون مفيدة ومجدية للتحاليل فى مواضيع عديدة فى نظرية الوحدة الانتاجية theory of the firm فالشروط الركيزة Corner conditions مثل تلك الشروط الموضحة فى الجزء ٢-٢، قد تحدث للوحدة الانتاجية مثلما تحدث للمستهلك . ونعطى هنا مثالين لاقتراح حالات اخرى قد تغطى بشروط كون - تكر .

فى المثال الاول ، يكون لماحب الوحدة الانتاجية الحق فى اختيار بين انتاج او شراء الدواخل اللازمة له . اما فى المثال الثانى ، فانه يجب عليه ان يقرر كميا العمل الاضافى (اذا كان هناك اى عمل اضافى overtime labor التى لابد من شرائها .

حرية اختيار الداخلى : An Input Option

افترض ان صاحب الوحدة الانتاجية يمتلك دالة انتاج ذات داخلين ، بمعنى انها تستخدم داخلين فى عملية الانتاج ، على النحو التالى :

$$q = f(x_{11} + x_{12}, x_2)$$

بحيث ان x_{11} تمثل كمية X_1 والتى ينتجها صاحب الوحدة الانتاجية ، وان x_{12} تمثل الكمية التى يشتريها من السوق بسعر ثابت للوحده يساوى p_1 من الرهالات اما x_2 فانها تمثل الداخلى الثانى والذى اشترت كامل كميته بسعر ثابت للوحده يساوى p_2 من الرهالات . وعلى هذا فان دالة الانتاج لماحب الوحدة الانتاجية للداخلى تكون :

$$x_{11} = g(x_2)$$

حيث ان X_1 تمثل كمية الداخلى الثالث المستخدم فى انتاج x_3 ويكون سعره الثابت هو p_3 ويفترض هنا انه اذا كان $x_{11} = 0$ فان هذا يتطلب ان تكون $x_2 = 0$. ان دالة لاقتراح المناسبه للحصول على الحد الاطلى من الربح هى :

$$Z = pf(x_{11} + x_{12}, x_2) - p_1x_{12} - p_2x_2 - p_3x_3 + \lambda[g(x_2) - x_{11}]$$

وبافتراض ان كلا الدالتين الانتاجيتين تكونا محدبتين ، فان شروط كون - تكر للحصول على الحد الاطلى من الربح تكون كالتالى :

$$\frac{\partial Z}{\partial x_{11}} = pf_1 - \lambda \leq 0$$

$$x_{11} \frac{\partial Z}{\partial x_{11}} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_{12}} = pf_1 - r_1 \leq 0$$

$$x_{12} \frac{\partial Z}{\partial x_{12}} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_2} = pf_2 - r_2 \leq 0$$

$$x_2 \frac{\partial Z}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_3} = \lambda g' - r_3 \leq 0$$

$$x_3 \frac{\partial Z}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = g(x_3) - x_{11} \geq 0$$

$$\lambda \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 0$$

ومن المتطلبات ، ايضا ان تكون المتغيرات الخمسة غير سالبة .

ثلاثة نتائج هامة تكون محتله الحدوث :

(١) يشترى الداخل ولا ينتج .

(٢) ينتج الداخل ولا يشتري .

(٣) يشتري الداخل وينتج معا .

والحالة السائدة هنا بمقارنة تكلفة الانتاج الحدي $\text{marginal production cost}$ للداخل

X_1 بقيمة انتاجها الحدي ومن اللامتناهيات الاولى والرابعة من المعادله (١٤-٥)

نحصل على :

$$MC_n = \frac{r_3}{g'(x_3)} \geq \lambda \approx pf_1$$

وسوف ينتج الداخل مادام $MC_n \leq r_1$ اما اذا اشترى الداخل ولم ينتج فان $x_{11} = 0$

وكذلك $x_{12} > 0$ وتعطينا علاقات التوازن في المعادلة (١٤-٥) العلاقة التالية :

$$pf_1 = \lambda \leq$$

$$x_{12} = 0 \quad \text{وكذلك} \quad x_{11} > 0 \quad \text{فان} \quad \text{اشترى الداخل} \quad \text{وعدم شرا} \quad \text{الداخل} \quad \text{فان} \quad x_{11} > 0 \quad \text{وكذلك} \quad x_{12} = 0$$

$$\text{ونحصل على} \quad pf_1 = r_1 \leq \lambda$$

واخيرا اذا كان الداخل ينتج ويشترى معا فان تكلفة الانتاج الحدي في حالة

التوازن تساوي سعر السوق لهذا الداخل .

A Discontinuous Labor Contract

لقد افترضنا وحتى هذه النقطة ان صاحب الوحدة الانتاجية يستطيع ان يشتري أى

كميه من الداخل هو يرغبها بسعر ثابت ولكن الانسان لا يحتاج الى النظر بعينها

لايجاد حالات تتضارب مع هذا الافتراض . افترض الان ان صاحب الوحدة الانتاجية قد

وقع عقد labor contract a يقتضاه يشتري صاحب الوحدة وحدات من العمـل

لا تزيد عن \bar{L} حسب معدل الاجر السارى w ولكن يجب عليه ان يدفع مبلغا اضافيا

لخارج وقت العمل لتأمين وحدات اضافية من العمل . فإذا افترضنا بالتحديد انسه بإمكان صاحب الوحدة ان يتحصل على وحدات اضافية من العمل بمقدار $0.2\bar{L}$ باجر قدرة $1.5w$ ونسمى هذه وقت نصف عمل ويتحصل على مقدار $0.2\bar{L}$ وحدة باجر قدرة $2w$ ونسمى هذه ضعف وقت عمل فإذا افترضنا ان L_1, L_2 و L_3 يمكن شراؤها باجر عادي وباجر ونصف وباجر من عمل ، بالترتيب فان استخدام المعالمة مسوف يكون عرضة للانضباطات اللامتساوية الاتية :

$$(15-5) \quad \bar{L} \geq L_1 \quad 0.2\bar{L} \geq L_2 \quad 0.2\bar{L} \geq L_3$$

ويكون رأس المال الداخلى الثانى الوحيد وتتحكم دالة الانتاج المقعرة

$$q = f(L_1 + L_2 + L_3, K) \text{ فى الانتاج .}$$

وتكون دالة لا قرائج فى هذه الحالة هى :

$$V = pf(L_1 + L_2 + L_3, K) - wL_1 - 1.5wL_2 - 2wL_3 - rK + \mu_1(\bar{L} - L_1)$$

$$(16-5) \quad + \mu_2(0.2\bar{L} - L_2) + \mu_3(0.2\bar{L} - L_3)$$

بحيث أن p و r يمثلان على التوالى ناتج ثابت واسعار رأس المال وتكون شروط كون - نكر على النحو التالى :

$$\frac{\partial V}{\partial L_1} = pf_{L_1} - w - \mu_1 \leq 0 \quad L_1 \frac{\partial V}{\partial L_1} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial L_2} = pf_{L_2} - 1.5w - \mu_2 \leq 0 \quad L_2 \frac{\partial V}{\partial L_2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial L_3} = pf_{L_3} - 2w - \mu_3 \leq 0 \quad L_3 \frac{\partial V}{\partial L_3} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = pf_K - r \leq 0 \quad K \frac{\partial V}{\partial K} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu_1} = \bar{L} - L_1 \geq 0 \quad \mu_1 \frac{\partial V}{\partial \mu_1} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu_2} = 0.2\bar{L} - L_2 \geq 0 \quad \mu_2 \frac{\partial V}{\partial \mu_2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu_3} = 0.2\bar{L} - L_3 \geq 0 \quad \mu_3 \frac{\partial V}{\partial \mu_3} = 0$$

وبالطبع لا بد وان يكون كل واحد من المتغيرات السبعة غير سالب .

وباستدكار ان $\mu_1 = \partial V / \partial L_1$ بحيث ان « ترمز إلى القيم المثلى ، فان هذه المتغيرات قد غسر على انها ارباح بديلة shadow profits لكل واحد من الحالات الثلاث للعمل اى أن الكمية التى شوق عندها قيمة الانتاج الحدى للعمل على دفعة الاجر لكل واحد منهم .

والحالات العامة السبعة التالية من المحتمل وقوعها معتمدة على قيم المتغيرات :

الحالة :

1. $L_1 = 0$	$L_2 = 0$	$L_3 = 0$	$pf_L \leq w$
2. $0 < L_1 < \bar{L}$	$L_2 = 0$	$L_3 = 0$	$pf_L = w$
3. $L_1 = \bar{L}$	$L_2 = 0$	$L_3 = 0$	$w \leq pf_L \leq 1.5w$
4. $L_1 = \bar{L}$	$0 < L_2 < 0.2\bar{L}$	$L_3 = 0$	$pf_L = 1.5w$
5. $L_1 = \bar{L}$	$L_2 = 0.2\bar{L}$	$L_3 = 0$	$1.5w \leq pf_L \leq 2w$
6. $L_1 = \bar{L}$	$L_2 = 0.2\bar{L}$	$0 < L_3 < 0.2\bar{L}$	$pf_L = 2w$
7. $L_1 = \bar{L}$	$L_2 = 0.2\bar{L}$	$L_3 = 0.2\bar{L}$	$pf_L \geq 2w$

وسوف يساوى صاحب الوحدة الانتاجية قيمة الانتاج الحدى للعمل بمعدل الاجر المناسب بقدر ما يستطيع ففى حالة لا توجد الرغبة فى الانتاج وسوف يسود واحداً من المعدلات الثلاثة للاجر فى الحالات ٢ ، ٤ ، ٦ اما فى الحالتين ٣ ، ٥ فان القيمة المثلى للانتاج الحدى MP للعمل سوف تقع بين معدلى الاجر ، وفى الحالة ٧ حيث ان جميع العمل المتوفر قد استخدم فانه قد يفوق ضعف الاجر .

DUALITY IN PRODUCTION

يمكن هنا تطبيق التحاليل الخاصة بالازدواجية والمعطاء فى الجزء (٤-٣) مع بعض التعديلات لتفطى الحصول على الحد الاعلى من الانتاج تحت قيد التكلفة بالنسبة للوحدة الانتاجية firm ولكن على كل حال فان مسالة الحصول على الحد الادنى للتكلفة تحت شرط الانتاج تكون مسالة أكثر منفعة بالنسبة لدراسة الوحدة الانتاجية ، ولقد اركز على ازدواجية الوحدة الانتاجية لمثل هذه المسالة . واهم ازدواجية هى تلك التى توحد بين دوال الانتاج والتكلفة ولقد غطينا اشتقاق دالة الانتاج فى الجزء (٤-٤) ونبحث هنا عن كيفية اشتقاق دالة الانتاج مع دالة التكلفة .

اعتبر منحنى تساوى الكمية بالنسبة للوحدة الانتاجية والمعطى بالمعادلة —————
 $q^0 = f(x_1, x_2)$ واعتبر ان شرط الدرجة الاولى للحصول على الحد الادنى من التكلفة لهذا الناتج هو $-dx_2/dx_1 = r_1/r_2$
 ويحل هذه المعادلات لدوال الداخلى input functions نحصل على :

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(r_1/r_2, q^0) \\ x_2 &= \psi_2(r_1/r_2, q^0) \end{aligned} \quad (١٧-٥)$$

بحيث أن x_1 و x_2 تكونان قيمتي الحد الأدنى للتكلفة بدلالة نسبة أسعار الداخـل وبـدلالة مستوى الناتج المعطى به ^(١).

والآن نفاضل معادلة التكلفة $C = p_1x_1 + p_2x_2$ ونأخذ المعادلة (١٧-٥) كمعطى وكذلك شروط الدرجة الأولى $\eta_1 = \lambda f_1$ لنحصل على :

$$(١٨-٥) \quad \frac{\partial C}{\partial \eta_1} = x_1 + \lambda \left(f_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_1} + f_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta_1} \right) = x_1 > 0 \quad l = 1, 2$$

بحيث أن λ هي مضروب لاقتراح في مسألة الحصول على الحد الأدنى للتكلفة المشروطة بحيث أن الحد داخل القواس يساوى $\partial q^0 / \partial \eta_1 = 0$ على منحنى تساوى الكميات .

وتعرف معادلة (١٨-٥) ببديهية شيفارد *Shephard's lemma* ونجد أن الاشتقاقات الجزئية لدالة التكلفة (٢٨-٤) بالنسبة لأسعار الداخـل تساوى قيم الحد الأدنى للتكلفة للداخـل .

$$(١٩-٥) \quad \frac{\partial C(q, p_1, p_2)}{\partial p_1} = x_1 \quad \frac{\partial C(q, p_1, p_2)}{\partial p_2} = x_2$$

وبما أن دالة التكلفة المتغيرة تكون متجانسة من الدرجة الأولى في أسعار الداخـل فإن اشتقاقاتها الجزئية ^(٢) تكون متجانسة من الدرجة صفر في أسعار الداخـل وتعتمد على نسبة سعر الداخـل بدلا من أسعار الداخـل المطلقة . وتحت شروط معينة، فإنه من الممكن حل المعادلتين (١٩-٥) لقيم المتغيرين q و p_1/p_2 .

بحيث أن الحل لقيم q يعدنا بدالة الانتاج المطلوب . ولكن (١٩-٥) قد يكون من الصعب جدا حلها بالطريقة الصليبية .
ونذكر هنا بعض النظريات النموذجية للازدواجية :

- (١) أن أى دالة انتاج مقعرة سوف تعطى دالة تكلفة متجانسة من الدرجة الأولى فـسـى أسعار الناتج إذا اعطينا شروط انتظامية معينة *specified regularity conditions*.
- (٢) أن أى دالة تكلفة متجانسة من الدرجة الأولى أسعار الداخـل تعطى دالة انتـاج مقعرة إذا اعطينا شروط انتظامية معينة .
- (٣) أن دالة التكلفة التى اشتقت من دالة انتاج معينة سوف تعطى هى بدورها دالة

(١) هذه ليست هى نفس دوال طلب الداخـل المعطاه بالمعادلة (٢٢-٤) والـتى اشتقت من عطية الحصول على الحد الأعلى من الربح .

(٢) تذكر أن الاشتقاقات الجزئية لدوال التكلفة الاجمالية والمتغيرة تكون هى نفسها .

الانتاج نفسها •

مثال : اعتبر دالة التكلفة في المعادلة (٣٠-٤)

$$C = \gamma(r_1 r_2)^{1/(n+\beta)}$$

حيث أن $\gamma = (\alpha + \beta)(A\alpha^\alpha \beta^\beta)^{-1/(n+\beta)}$ والتي اشتقت لدالة الانتاج $q = Ax_1^\alpha x_2^\beta$ وبهذا أصبح معادلات (١٩-٥) على النحو التالي :

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) \gamma q^{1/(n+\beta)} (r_2/r_1)^{\beta/(n+\beta)} = x_1$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) \gamma q^{1/(n+\beta)} (r_2/r_1)^{-\alpha/(n+\beta)} = x_2$$

ومن السهل جدا حل هاتين المعادلتين لقيمتي q برفع جانبي المعادلة الاولى الى القوة α وجانبي المعادلة الثانية الى القوة β ثم بجمعها • وهذه المعطية تؤدي الى دالة الانتاج التالية :

$$q = Ax_1^\alpha x_2^\beta.$$

PRODUCTION UNDER UNCERTAINTY

انه من الممكن تطبيق التحاليل التي اجرت على المنفعة المتوقعة في الجزئية (٨-٣) و (٩-٣) على الوحدة الانتاجية عندما تتعرض لظروف عدم التاكيد وذلك بافتراض ان المنتج يكون له دالة منفعة ويكون الربح احد عناصرها ، وان المنتج ايضا يخضع لبداهيات فون نيومان ومورجنستيرن • ونقدم مثالين على هذا في المثال الاول يكون الناتج بصفة مؤكدة certain ويكون السعر معرضا لعدم التاكيد uncertainty اما المثال الثاني فالعكس حيث ان السعر يكون مؤكدا والناتج يكون غير مؤكد •

افترض ان سعر الناتج يمكن ان يكون احد القيم المتباينة التالية والتي يكون عددها n بالاحتمال الاتي :

(v_1, \dots, v_n) بحيث ان $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ فيكون الربح المتوقع للوحدة الانتاجية هو :

$$E[\pi] = \sum_{i=1}^n v_i [p_i q - C(q)]$$

وبوضع اشتقاق الناتج مساويا لصفر نحصل على :

$$(٢٠-٥) \quad \frac{dE[\pi]}{dq} = \sum_{i=1}^n v_i [p_i - C'(q)] = \bar{p} - C'(q) = 0$$

بحيث ان \bar{p} تكون القيمة المتوقعة للسعر • وللحصول على الحد الاعلى من الربح المتوقع

فان صاحب الوحدة الانتاجية سوف يقوم بصاواة السعر المتوقع بالتكلفة الحديه ، وسوف تتغير التحالفيل بصفه بسيطه نظرا لوجود حالة عدم التأكد .

والان لنفترض حاله بحيث ان صاحب الوحدة يرفض فى الحصول على الحد الاطى من الصغفه المتوقعه للربح :

$$E[U(\pi)] = \sum_{i=1}^n v_i U(\pi_i) \quad \text{حيث أن}$$

$\pi_i = p_i q - C(q)$ وللمره الثانيه يكون مستوى الناتج هو المتغير الذى يدور حوله
أخذ القرار .

$$\frac{dE[U(\pi)]}{dq} = \sum_{i=1}^n v_i U'(\pi_i) [p_i - C'(q)] = 0 \quad (21-5)$$

فإذا كانت $d^2 U/d\pi^2 = 0$ فان صاحب الوحدة سوف يكون محايدا بالنسبه للمخاطره وتكون $U'(\pi_i)$ ثابتة ، او تكون التكلفة الحديه ساويه للسعر المتوقع كما هو الحال فى المعادله (20-5) .

وبالطبع فان النتيجة سوف تختلف اذا افترض ان صاحب الوحدة الانتاجيه متفاديا للمخاطره . وفى هذه الحاله تكون $d^2 U/d\pi^2 < 0$ وتكون :

$$\sum_{i=1}^n v_i U'(\pi_i) [p_i - C'(q^*)] < 0 \quad (22-5)$$

بحيث أن q^* هى مستوى الناتج الذى يعطى حل للمعادلة (20-5) افترض ان النتائج سوف ترقم بحيث ان p_i و π_i سوف تزداد كلما زادت i و عليه فان الحدود داخل القوس الكبير سوف تزداد من سالب للغاية الى موجب للغاية **from most negative to most positive**. وان $U'(\pi_i)$ سوف تنخفض مع i ونتيجة لهذا فان المعادله (22-5) تكون لها قيمة اصغر من المعادله (20-5) .

وبما ان MC يكون متزايدا فان q^* (وهى قيمة التوازن بالنسبه للناتج) يجب ان تكون اقل من q و عليه فان $C'(q) > p$ وسوف يكون MC فى حالة التوازن اقل من السعر المتوقع وسوف يقود تفادى المخاطره الى مستويات اقل من الناتج عنها فى غيابها وسوف تكون هناك نتيجة عكس ما سبق اذا كان صاحب الوحدة الانتاجية محبا للمخاطرة ، ولكن هذا الافتراض نادرا ما يحدث

مثال : افترض ان متجه السعر المحتمل possible price vector هو (6,7,8,9,10) مع احتمال حدوث كل واحد 0.2 فاذا $U(\pi) = \ln \pi$ وضعنا $C = 0.05q^2$ فان القيمه المتوقعة للسعر هى $p = 8$ وان حل المعادله (20-5) يعطى $q^* = 80$ وبالتصويش تصبح معادله (21-5) على النحو التالى :

$$\frac{dE[U(\pi)]}{dq} = \sum_{i=1}^n \left(0.2 \frac{p_i - 0.1q}{p_i q - 0.05q^2} \right) = 0$$

ويمكن للقارئ التحقق من $q \approx 74.88$ تعطى حلا تقريبا .
والان اعتبر حالة الفلاح الذي يكون عنده سعر مضمون p ومستوى ناتج يهدف اليه q وقد
ألف الناتج الحقيقي من الناتج المنشود كنتيجة للطقس وطى هذا نفترض وجود n من
هذه المستويات المحتملة للناتج وهي $(\delta_1 q, \dots, \delta_n q)$ وباحتمال حدوث كالتسالي
 (v_1, \dots, v_n) بحيث ان $v_i \delta_i$ وكذلك v_i يكونا كميتين غير سالبتين ويكـون
مجموعها يساوى واحدا وسوف يحدد مستوى الناتج الذى يهدف اليه الفلاح (وكـمية
المستوى المنشود) تكاليفه ويكون هو المتغير الذى على اساسه يأخذ الفلاح قراراته .

وسوف تكون المنفعة المتوقعة لربح الفلاح كالتالى :

$$E[U(\pi)] = \sum_{i=1}^n v_i U[p \delta_i q - C(q)]$$

وبوضع اشتقاقها الجزئى مساويا لصفره نحصل على :

$$(23-5) \quad \frac{dE[U(\pi)]}{dq} = \sum_{i=1}^n v_i U'(\pi_i) [\delta_i p - C'(q)] = 0$$

ويمكن معاملة المعادلة (٢٣-٥) على انها حالة خاصة من المعادلة (٢١-٥)
بحيث ان $p_i = \delta_i p$ ان وجود عدم التاك بالنسبة للناتج يقود الى النتيجة العامـه
المشابهة لنتيجة عدم التاك بالنسبة للاسعار وهنا سوف يكون MC المتوقع اقل من السعر.

مثال : افترض ان δ_i هي (0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4) وافترض ان v_i هي :

$$(0.1, 0.2, 0.4, 0.2, 0.1)$$

دع الان $p = 5$ و $C = 0.04q^2 + q$ و $U(\pi) = -e^{-0.01\pi}$ والتى لهو
غاديا للمخاطر بقيمة مطلقة ثابتة (راجع الجزء ٣-٩) فاذا ساوينا بين MC المتوقعه
والسعر فان $q = 50$ وتكون المنفعة المتوقعة كالتالى :

$$E[U(\pi)] = - \sum_{i=1}^n v_i e^{-0.01(p \delta_i q - 0.04q^2 - q)}$$

ويكون شروط الدرجة الاولى كالتالى :

$$\frac{dE[U(\pi)]}{dq} = 0.01 \sum_{i=1}^n v_i (p \delta_i - 0.08q - 1) e^{-0.01(p \delta_i q - 0.04q^2 - q)} = 0$$

ويمكن للقارئ التحقق من ان $q \approx 43.59$ تعطى حلا تقريبا .

٥ - ٦ دوال الإنتاج الخطية : LINEAR PRODUCTION FUNCTIONS

تعرف حركة الانتاج الخطية A linear production activity بانها العملية التى
يتم من خلالها إنتاج واحدا او اكثر من المنتجات بنسب ثابتة باستخدام واحد أو اكثر

من الداخل بنسب ثابتة. وحيث أنها متجانسة من الدرجة الأولى فإنها تعطى حجما للخلل ثابتا (constant returns to scale) أي أنه إذا ازدادنا جميع الدواخل (أو خفضناها) نسبيا ، فإن جميع المنتجات سوف تزداد (أو تنخفض) بنفس النسبة . وتتكون دالة الانتاج الخطية من مجموعة من الحركات الانتاجية الخطية التي يمكن الاستفادة منها في ان واحد .

حالة الناتج الواحد : The One-Output Case

اعتبر الحرك الانتاجية الخطية التي يتم خلالها انتاج ناتج واحد فقط من استخدام m من الدواخل . ونصف هذه الحركة تماما من خلال مجموعة من العوامل a_i ($i = 1, \dots, m$) التي تعطي كميات الدواخل الضرورية لانتاج وحدة واحدة فقط من الناتج. ونستطيع تقرير بطريقة فريدة مستويات الدواخل الضرورية لأي مستوى معين من الانتاج :

$$x_i = a_i q \quad i = 1, \dots, m \quad (24-5)$$

ونستطيع ايضا ان نقرر الحد الاعلى من الناتج الذي يمكن تأمينه من مجموعة كميات محددة من الدواخل :

$$q = \min_i \left(\frac{x_i}{a_i} \right) \quad a_i > 0 \quad (25-5)$$

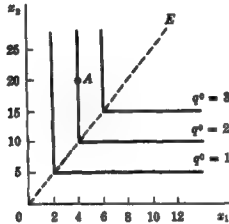
ويستطيع كل داخل ان يصبح العامل الذي يحدد الناتج ويتبع من المعادلة (24-5) ان الكمية x_i سوف تساند كمية من الناتج قدرها x_i/a_i من الوحدات ولكن جميع الدواخل الاخرى يجب ان تكون متوفرة بالكميات المناسبة لتحقيق هذا المستوى من الانتاج . وعلى هذا فان اصغر الكميات x_i/a_i سوف تقرر الحد الاعلى الممكن انتاجه من المنتجات . وقد تبقى اجزا من كميات بعض الدواخل غير مستخدمة بسبب قلة موارد هذه الدواخل المحددة .

مثال : دع عوامل الحركة المستخدمة فيها داخليين تكون $a_1 = 2$ و $a_2 = 5$ وعليه فان وحدة واحدة من الناتج تتطلب $x_1 = 2$ و $x_2 = 5$ وان وحدتين من الناتج تتطلب $x_1 = 4$ و $x_2 = 10$ وهكذا فاذا كان صاحب هذه الوحدة الانتاجية يمتلك 4 وحدات من الداخل الاول و 20 وحدة من الثاني ، فانه يستطيع انتاج وحدتين من الناتج .

$$q = \min \left(\frac{4}{2}, \frac{20}{5} \right) = 2$$

فالداخل الاول يكون محددًا ويجبر صاحب الوحدة على ترك 10 وحدات من العشرين وحدة للداخل الثاني غير مستخدمة وشكل (1-5) يتضمن اشكال منحنيات تساوي الكمية لمثل هذه الحركة الانتاجية بحيث ان OE هو مجرى التوسع الذي عرفناه بانسه المحل

الهندسى للنقط x_1 و x_2 بالنسبة 2:5 وكل منحنى يعمل زاويه قسائه على مجرى التوسع . فاذا بدأنا من نقطة ما على مجرى التوسع ، فان اى زياده فى احدى الداخل بدون زياده متناسبه لآخر سوف تسمح بزيادة فى الناتج وتقطع نقطة A ومحاوره —
 $x_1 = 4$ و $x_2 = 20$ ، على المنحنى $q^0 = 2$.



افترض الان ان صاحب الوحدة الانتاجيه يمتلك n وحده حركيه انتاجيه خطيه معينه بحيث انه يستطيع الاستفاده من كل واحد منها على حده او كلها مجتمعها لانتاج ما تحتاجه من المنتجات . افترض ان a_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) يمثل كمية الداخل i الضرورى لانتاج وحده واحد من المنتج باستخدام الحركه الانتاجيه j وتكون نتائجها قابله للجمع additive بحيث ان اجمالى الانتاج هو :

$$q = \sum_{j=1}^n q_j$$

بحيث ان q_j هى الكمية المنتجه باستخدام الحركه الانتاجيه j وان اجمالى الداخل المطلوب هو :

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \quad i = 1, \dots, m \quad (٢٦-٥)$$

ان متطلبات الداخل المركب Composite input لكل وحده انتاج a_i ($i = 1, \dots, m$) تكون معدلات ذات ثقل weighted averages لمعامل الحركات الانتاجيه الفرديه :

$$a_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{ij} \quad i = 1, \dots, m \quad (٢٧-٥)$$

بحيث ان $0 \leq \lambda_j \leq 1$ وان $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ وان $\lambda_j = q_j/q$ تمثل النسبه من الانتاج الاجمالى المنتج بالحركه الانتاجيه j وتسمح الحركات الانتاجيه المركبه بالتمويض بين

الداخل الذى تغير، جزئيا الخط فى المعادلة (٢٥-٥) ويكون الحد الاعلى للناتج الذى يمكن تامينه من مجموعة محدده من كميات الداخل على النحو التالى :

$$q = \min \left(\frac{x_i}{a_i} \right) \quad a_i > 0 \quad (٢٥-٥)$$

وتكون النسبة الاى x_i/a_i محدده ولكن تم اختبار λ_i للحصول على الحد الاعلى من النسبة الاى x_i/a_i .

مثال : افترض ان صاحب وحدة انتاجيه يستطيع انتاج منتج ما باستخدام داخلىين وثلاثة حركات انتاجيه بحيث ان :

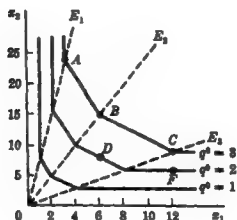
$$a_{11} = 1 \quad a_{12} = 2 \quad a_{13} = 4$$

$$a_{21} = 8 \quad a_{22} = 5 \quad a_{23} = 3$$

ويمثل الشكل (٢٥-٥) شكلا رسميا لمنحنيات تساوى الكمية لمثل هذه الدالة الانتاجيه الخطيه، وتمثل OE_1 , OE_2 , OE_3 مجرى التوسع للحركات الانتاجيه رقم ١ ٢ ٣ على الترتيب، فاذا اعتبرنا المنحنى $q^0 = 3$ فان النقط A , B , C تعطى متطلبات الداخل اذا استخدمنا احدى الحركات الانتاجيه وتعطينا قطعة الخط AB متطلبات الداخل لجميع الحركات الانتاجيه المركبه والتي تكونت من الحركات الانتاجيه ١، ٢ لانتاج ٣ وحدات وهذه تكون حالة خاصه للمعادلة (٢٧-٥) بحيث ان :

$$x_1 = 3a_1 = 3[\lambda + 2(1 - \lambda)]$$

$$x_2 = 3a_2 = 3[8\lambda + 5(1 - \lambda)]$$



وهذه حسب تغيرات A من صفر (نقطة B) الى واحد (نقطة A) وبالمثل فإن قطعة الخط BC تعطى متطلبات الداخل للحركات الانتاجية المركبة من ٢، ٣ والتي لا يمكن تعويض داخل مكان داخل اخر (تحت هذه الحركات) وخصوصا الى يساره OE_1 اى للمقدار $x_2/x_1 > 8$ بحيث ان الحركة الانتاجية 1 فقط هي التي سوف تستخدم ، وان بعضا من X_2 سوف يظل بدون استخدام . اما على يمين OE_1 اى للمقدار $x_2/x_1 < 8$ فان الحركة الانتاجية ٣ فقط هي التي سوف تستخدم وان بعضا من X_1 سوف يبقى بدون استخدام .

وتعطى منحنيات تساوى الكمية التي اشتقت في الباب الرابع الكمية x_2 كدوال محدبة بانضباط بالنسبة للكمية x_1 ويكون لها RTS متصل ومتناقص .

والمنحنيات في شكل (٢٨٥) تعطى x_2 كدوال محدبة (ولكن ليس بانضباط) بالنسبة للمقدار x_1 ولها RTS غير متصل وغير متزايدة . وسوف تولد دوال الانتاج الخطية دائما منحنيات بهذا الشكل العام المعروض في الشكل (٢٨٥) وهذه المنحنيات تعدنا بحل شكل (اى حل بالرسم) للمعادله (٢٨٥) بمعنى ، انها تعطى الحد الاعلى لمستويات الانتاج التي يمكن تأمينها من كل مجموعة دواخل وبهذا نتخلص من اى حركه انتاجية تكون اقل كفاءة ، وتعرف اى حركه مبسطة او حركه مركبه بانها اقل كفاءة $inefficient$ اذا كان هناك حركه اخرى مبسطة او مركبه وتتطلب اكثر من اى داخل تتطلبه الحركه اقل كفاءة ولكن اقل منها على الاقل بواحد من الدواخل . وواضح من الشكل (٢٨٥) ان مجموعة الحركتين ١، ٣ تكون اقل كفاءة ونتحصل على متطلبات الداخل للمنحنى $q^0 = 3$ من طريق قطعة الخط الواصلة بين A و C والتي تقع فسوق قطعتى الخط AB و BC .

Multiple-Output Cases

حالات مضاعفات الإنتاج :

انه من السهل ترجمة مفهوم دالة الانتاج الخطية لتضم اكثر من ناتج واحد . افترض ان كل واحد من s من النائج يتم انتاجه بحركه انتاجية خطية باستخدام m من الدواخل مع العلم بانه لا تزال توجد امكانيه انتاج منتج معين باكثر من حركه انتاجية واحدة افترض ان q_i تمثل كمية الداخل i المطلوبه لانتاج وحده واحده من النائج j فتكون متطلبات الداخل لانتاج مجموعة معينه من المستويات لنتائج u على نفس نمط المعادله (٢٦٥) :

$$(٢٩٥) \quad x_i = \sum_{j=1}^u a_{ij} q_j \quad i = 1, \dots, m$$

حيث ان q_j هي الكمية المحدده للنتائج j ويكون التعويض بين المنتجات والدواخل محتمل مثل هذه الحالة .

وقد تعطى الحركات الانتاجية الخطية اكثر من ناتج واحد في اغلب الحالات العامه . افترض ان كل من n حركة خطية تعطى s من المنتجات وتستخدم m من الدواخل ، وافترض ايضا ان z_j ($j = 1, \dots, n$) ترمز الى مستوى الحركة الانتاجية j وسوف يكون اختياره وحدة مستوى للحركة اعتباطا arbitrary مادام الدواخل والمنتجات المخصصه . فاذا وضعنا a_{ij} لتمثل كمية الناتج j و b_{ij} لتمثيل كمية الداخل i المطلوب لوحدة المستوى للحركة j وبهذا تكون المنتجات والدواخل التي تولدت من طريق المجموعة المعينه من الحركات الانتاجية هي :

$$\begin{aligned} q_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j & i &= 1, \dots, s \\ x_i &= \sum_{j=1}^n b_{ij} z_j & i &= 1, \dots, m \end{aligned} \quad (30-5)$$

وتعرف هنا ايضا الحركات الانتاجية المركبه بانها المعدلات ذات النقل للحركات الانتاجية المبسطه .

٥ ٧ البرمجة الخطية : LINEAR PROGRAMMING

تغطي البرمجه الخطية لمسائل المحتويه على عطية الحصول على الحد الاعلى لداالة خطية او محتويه على عطية الحصول على الحد الادنى تحت شرط مجموعة من اللاتساويات الخطيه والمشتله على المتطلب الذى ينص على ان تكون جميع قيم المتغيرات غير سالبه . وبما ان الدوال الخطيه تكون محدبه ، فان البرمجه الخطيه سوف تمدنا بحالة خاصة قد نستخدم فيها تحليل كون - تكرر (انظر التعرين ٨-٣) وعلى كل حال ، فان المميزات الخاصه بالمجموعات الخطيه تسمح باستخدام طرق مختطفه ولكنها متكافئة لمعالجة مثل هذه المجموعات .

ان النمط (الشكل) العام للبرمجه الخطيه هو ايجاد قيم للمتغيرات q_i ($j = 1, \dots, n$) والتي تعطى الحد الاعلى للمعادله الاتيه :

$$y = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n \quad (31-6)$$

تحت شرط :

$$a_{i1} q_1 + a_{i2} q_2 + \dots + a_{in} q_n \leq x_i^0 \quad i = 1, \dots, n \quad (32-5)$$

$$q_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (32-5)$$

ان الرموز المألوفه للقارى x, q, p تكون مريحه لمناقشة البرامج المكونسه من حركات الانتاج الخطيه . ولكن الاطار العام للبرمجه يغطي مدى اوسع من المسائل وعلى

العموم فان المتغيرات x_i, a_{im}, p_i قد تكون موجبه سالبه او صفر بترجمة معتدده على المساواة تحت الفحص والمناقشه .

فالاطار الموضح في المعادلتين (٣١-٥) و (٣٣-٥) يكون عاما بعض الشيء لتلك المعطيه هي للحصول على الحد الأدنى لدالة خطيه ، فان المساواة قد تكتب على النمط العام المتفق عليه للحصول على الحد الاعلى لسالب المساواة . اما اذا كان الشرط على النمط \geq فان هذه اللامساويه تتغير الى النمط المعطى بالمعادلة (٣٢-٥) بضرب طرفيها في (-١) اما اذا كان الشرط مساويه ، فيمكن تمثيلة بلامساويتين ضعيفتين \leq او \geq ويمكن قلب اللامساويه الثانيه بضربها بالكيه (-١) .

ان نظام البرمجه الخطيه المعتبر هنا هو النظام الذى يختار من خلاله صاحب السوحده الانتاجيه عدد n من مستويات الناتج (وهى ال q 's) ليحصل من خلالها الحد الاعلى من ايراداته المعطاه بالمعادله (٣١-٥) باسعار ثابتة للناتج (وهى ال p 's) ويمتلك صاحب السوحده كميات ثابتة (وهى ال x 's) للدواخل $\binom{1}{m}$ وسوف توصف فيه الانتاج بعوامل الدواخل والمنتجات input-output coefficients (وهى ال a_{ij}) والتي تعطى المطلب الثابت للدواخل i الضروري لانتاج وحده واحده من الناتج j وتنص اللامساويات في (٣٢-٥) على ان صاحب السوحده الانتاجيه محدود بما لديه من دواخل حيث انه يمكن ان يستخدم كميات اقل مما لديه من الدواخل ولكنه لا يستطيع ان يستخدم كميات اكثر مما عنده بالطبع . واخيرا تنص المعادله (٣٣-٥) على ان مستويات الناتج لا يمكن ان تكون سالبه .

مجموعة نقاط التحقق : The Feasible Point Set

ان اى مجموعة اعداد حقيقيه تحقق المعادلتين (٣٢-٥) و (٣٣-٥) تكون حلا يمكن تحقيقه feasible solution لنظام البرمجه الخطيه . وتكون مجموعة نقاط امكانيه التحقق feasible points في الفراغ المكون من n - بعدا n -dimensional space (R^n) ما يسمى بمجموعة نقاط التحقق feasible point set لهذا النظام . انه من المفيد مراجعة بعض الخواص العامه لمجموعات النقاط في الفراغ R^n point sets قبل الشروع في اشتقاق الخواص الخاصه لمجموعات نقاط التحقق . وتعرف هنا المجموعه المحدبه " A convex set " بأنه له خاصية ان كل نقطه على قطعة الخط المستقيم الواصل بين نقطتين في المجموعه تكون ايضا ضمن المجموعه . وتعرف " نقطة الحدود " boundary point بان لها نقاط ملاصقة داخله ضمن المجموعه وان لها نقاط اخرى

(١) لا توجد دواخل مشتراه في هذا المثال ، ولكن يمكن اضافتها بدون صعوبه جمة .

ملاصقه ليست داخله ضمن المجموعة . وان جميع النقاط الملاصقة لنقطة داخلية *interior point* تكون ضمن المجموعة . ويقال للمجموعة بانها "مغلقة" *closed* اذا كانت تحتوى جميع نقاط الحدود ، ويقال ان المجموعة "مفتوحة" *open* اذا كانت لا تحتوى على اى ان المجموعة الخالية *null set* بدون نقاط والمجموعة بنقطة واحدة يكون معا ، معرفتين انها محد بين ومغلقتين .

وتكون مجموعة جميع النقط في الفراغ R^n مغلقة ، وانه ليس لها نقاط حدود وانها تحتويهم جميعا . وتعرف المعادلة الخطية مثل المتساوية للشرط i في المعادلة (٣٢-٥) ، السطح المفرط في R^n *hyperplane* ويمثل هذا السطح المفرط خطا في R^2 وسطحا مستويا في R^3 وسطحا بابعاد $(n-1)$ في R^n اذا كانت $a_i = 0$ ، فان السطح المفرط يكون موازيا لمحور q_i واما اذا كانت $q_i \neq 0$ فانه سوف يتضمن نقطة اصل R^n وسوف يفصل السطح المفرط والمعرف بالشرط i R^n الى فضاءات نصفية مغلقة *closed half-space* :

$$a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \dots + a_{in}q_n \leq x_i^0$$

ونقط هذه الفضاءات تحقق الشرط i ويفصل ، ايضا (R^n) الى فضاءات نصفية مفتوحة *open-half space*.

$$a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \dots + a_{in}q_n > x_i^0$$

ونقط هذه الفضاءات تنقض الشرط i وتكون هذه الفضاءات النصفية مجموعات محد به وتكون الفضاءات النصفية المغلقة مجموعات محد به مغلقة .

ان اى مجموعة نقط *point set* تحقق الشرط الغير سالب f في المعادلات (٣٣-٥) تكون فضا "نصفيا مغلقا" وعليه فانها تكون مغلقة ومحد به .

وسوف تكون النقاط التي تحقق جميع الشروط المنصوص عليها في المعادلتين (٣٢-٥) ؛

(٣٣-٥) بطريقة فردية ، مجموعة محد به مغلقة . ولا بد من اى حل محقق لنظام البرمجة ان يحقق جميع الـ $(m+n)$ من الشروط وتحتوى مجموعة نقاط التحقق على نقاط محتوية في كل من الـ $(m+n)$ مجموعة والتي كونت عن طريق الشروط ، اى انها تكون تقاطع الـ $(m+n)$ مجموعة . وتنص احد نظريات مجموعة النقط *point-set theory* على ان التقاطع لاي عدد

معين للمجموعات المحد به المغلقة يكون هو نفسه مجموعة محد به مغلقة . وتضع الشروط الغير سالبة للمعادلة (٣٣-٥) حد ادنى *lower bound* لقيم المتغيرات ويتبع من هذا ان مجموعة نقط التحقق لنظام البرمجة الخطية تكون ، دائما مغلقة ومحد به ومحد د

من الاسفل (١) bounded from below وهذه النقطة مهمه جدا لان خواص مثل هذه المجموعات تكون معروفه جدا .

مثال : افترض ان صاحب وحدة انتاجيه يمكنه انتاج منتجين مستخدما ثلاثه دواخل كمياتها كالتالى : $x_1 = 18$, $x_2 = 8$, $x_3 = 14$ وتصف الشروط التاليه فرص الانتاج المتاحة لصاحب الوحده الانتاجيه :

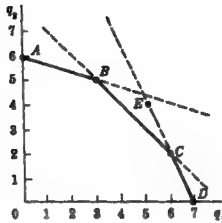
$$\begin{aligned} q_1 + 3q_2 &\leq 18 \\ q_1 + q_2 &\leq 8 \\ 2q_1 + q_2 &\leq 14 \\ q_1, q_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (٣٤-٥)$$

وتحدد كل واحد من هذه الشروط حلول المساله ضمن فضاءات نصفه مغلقه . وتحدد الشروط (٣٤-٥) حلول المساله في الربح التغير سالب من الفضاء اليوكليدي وسوف تكون مربحه للقارى حصر بقية الشروط في هذا الربح الغير سالب .

ويمثل الشكل (٣-٥) بعض السطوح المفرطه hyperplanes. وهى خطوط نفسى R^2 ويحدد الشرط الاول من مجموعات المعادلات (٣٤-٥) الحلول في نقط تقع على او اسفل الخط الذى يضم نقطتى A و B اما الشرط الثانى ، فيحدد الحلول في نقط تقع على او اسفل من الخط الذى يضم نقطتى B و C اما الشرط الثالث فيحدد الحلول في النقاط التى تقع على او اسفل من الخط الذى يضم نقطتى C و D .

وتعرف مجموعه نقط التحقق بحدود الخطوط الغير مقلعه $OABCD$ وهى مغلقه ومحدده ، ومحدده من اعلى ومحدده من اسفل . وتحقق كل نقطه في المجموعه جميع الشروط المعطاه بالمعادلات (٣٤-٥) وان كل نقطه ليست ضمن المجموعه تخالف واحد او اكثر من الشروط السابقه . فعلا نقطه $E (q_1 = 9, q_2 = 4)$ تحقق الشرط الاول ، والثانى وشرط $q_1, q_2 \geq 0$ ، ولكنها لا تدخل ضمن مجموعه نقط التحقق لانها تخالف الشرط الثانى من (٣٤-٥) .

(١) وهذا لا يلقى لاثبات ان نظام البرمجه له حل امثل محدود . ويجب ايضا اثبات ان مجموعه نقط التحقق ليست خاليه not null وعليه فان شرط كفايه لتحديد الحل الامثل finiteness ينص على ان مجموعه نقط التحقق لا بد وان تكون محدوده مسن الاعلى bounded from above بمعنى ان المتجه vector التالى (u_1, \dots, u_n) موجود بحيث ان $u_i \geq q_i$ لجميع قيم (q_1, \dots, q_n) في مجموعه نقط التحقق .



Optimal Solutions

الحلول المثلى :

ومضى ما عرفنا مجموعة نقاط التحقق ، فان العمل التالي هو إيجاد نقطة من نقاط المجموعة بحيث أنها تمكننا من الحصول على القيمة العظمى للدالة المطلوبة (٣١-٥) وسوف تعرف مفهومين إضافيين في نظرية مجموعة - النقاط point-set theory لانهما سوف يكونا مفيدين لهذا الغرض . نتعرف نقطة الطرف extreme point لمجموعة محدبة مغلفة على أنها نقطة الحدود التي تقع على أى خط يوصل بين أى زوج من النقاط في المجموعة . فمثلا النقاط O, A, B, C, D في الشكل (٣-٥) تكون نقاط أطراف ونعرف أيضا السطح المفرط الذي يحتوى على نقطة حدود . تابعه لمجموعة محدبة مغلفة بأنه سطح مفرط مساعد supporting hyperplane للمجموعة اذا كانت كل مجموعة موجودة داخل ضمن واحد من الفضاءات النصفية المغلفة المعرفه به .

افترض الان ، انه يوجد حل امثل لنظام البرمجه المعطى بالمعادلتين (٣١-٥) و (٣٣-٥) وافترض ان $(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$ تمثل أى نقطة في مجموعة نقاط التحقق ضح هذه القيم في المعادله (٣١-٥) للحصول على القيمة المقابله للداله المطلوبه y^0 :

$$y^0 = p_1 q_1^0 + p_2 q_2^0 + \dots + p_n q_n^0$$

عرف فضا' نصفى مغلق يحتوى على جميع النقاط بقيم الداله المطلوبه بحيث انها لا تزيد من y^0 :

$$(٣٥-٥) \quad p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n \leq y^0$$

وعرف ايضا فضا' نصفى مفتوح يحتوى على جميع النقاط بقيم اكبر من y^0 :

$$(٣٦-٥) \quad p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n > y^0$$

وبذلك تكون النقطه المختاره هي النقطه المثلى اذا كانت (٣٥-٥) تمثل سطح مقروط مساعد لمجموعه نقطه التحقق ، وان المجموعه المعرفه بالمعادله (٣٦-٥) تكون مجموعه خاليه فاذا كانت (٣٥-٥) ليست سطح مقروط مساعد . فان النقطه المختاره لا تكون نقطه مثلى . ففى هذه الحاله تكون المجموعه المعرفه بالمعادله (٣٦-٥) محتويه على الاقل على نقطه تحقق واحده بقيمة لـ y اكبر من y^0 . وبما ان السطح المقروط المساعد لا يحتوى على نقطه داخلية لمجموعه نقطه التحقق ، فانه ينبع من ذلك ان النقطه المثلى تكون دائما على الحدود لمجموعه نقطه التحقق . وسوف تذكر هنا نظرية ذات اهميه كبرى بالنسبه للبرمجه الخطيه وتنص هذه النظرية على ان : اى مجموعه محدبه مغلقه تكون محدده من الاسفل (اى لها حد ادنى) تمتلك نقطه واحده او اكثر من نقاط الاطراف فى كل سطح مقروط مساعد ^(١) وهذه النظرية تعنى انه اذا كان لنظام البرمجه حل امثل ، فانه سوف يوجد ، على الاقل ، نقطه طرف واحده مثلى . وسوف يكون البحث عن الحل الامثل محدودا على عدد معين من النقاط حيث ان عدد نقاط الاطراف يكون محدودا . وهذا يعنى انه على الغالب يوجد m من عدد n من q^s التى تحتاج ان يكون لها قيم موجبه فى حل امثل .

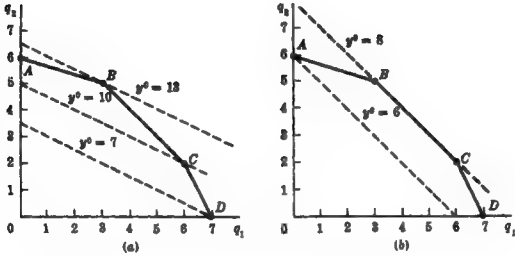
مثال : افترض ان صاحب الوحده الانتاجيه والذى يمتلك فرصه انتاجيه موضحه بالمعادله (٣٤-٥) ومرسومه على الشكل (٣-٥) يرغب فى بيع ما ينتجه بالسعريين p_1 و p_2 . وانه يرغب فى الحصول على الحد الاعلى من ايراداته فى الحاله التى تكون فيها السعريين $p_1 = 1$ و $p_2 = 2$ ، وان :

$$y = q_1 + 2q_2$$

مرسومه على الشكل (١-٥) ويكون السطح المقروط والمعرف بـ $y^0 = 7$ اوطى المنحنيات المقطمه ، ويحتوى على نقطه الطرف ($q_1 = 7, q_2 = 0$) D ويحتوى الفضاء النصفى المفتوح والمقابل لهذه النقطه (وهو المعرف بالمعادله (٣٦-٥) :

على نقطه التحقق A, B, C على سبيل المثال . وعليه فان النقطه D ليست نقطه مثلى . وتتبع النقطه الطرفيه ($q_1 = 6, q_2 = 2$) C فى السطح المقروط المعرف بالمعادله $y^0 = 10$ ويحتوى الفضاء النصفى المفتوح المقابل لهذه النقطه على نقطه التحقق ، وعليه فان النقطه C ليست نقطه مثلى وتكون النقطه ($q_1 = 3, q_2 = 5$) B نقطه مثلى لانها داخله ضمن محتويات السطح المقروط المساعد المعرف بالمعادله $y^0 = 13$ ولا يحتوى الفضاء النصفى المفتوح المقابل لهذه النقطه على اى نقطه من نقاط التحقق ويتبع الحل الامثل عند نقطه طرف ويكون حلا فريدا unique .

(١) راجع اثبات هذه النظرية فى كتاب G. Hadley تحت عنوان :



ويوضح الشكل (٥-٤ب) عن طريق الرسم ، مجموعة نقاط التحقق نفسها باسعار مختلفة للمنتجات وبدالة مطلوبه مختلفه وهما : $p_1 = p_2 = 1$ وكذلك $y = q_1 + q_2$ وتتبع نقطه الطرف A ($q_1 = 0, q_2 = 6$) على السطح المفرط والمعرف بالمعادله $y^0 = 6$ ولكنها ليست نقطه مثلى . وتتبع نقطتي الطرف B و C ، وجميع النقاط التي تقع على الاطراف المتداخله لمجموعة التحقق على السطح المفرط المساعد الامثل المعروف بالمعادله $y^0 = 8$ ولا يوجد حل امثل فريد في هذه الحاله ، ولكنه يوجد نقاط حدود مثلى ولكنها ليست نقاط اطراف . وبالرغم من هذا ، فانه توجد نقاط اطراف مثلى .

وتمثل حدود مجموعة نقاط التحقق الموضحه في الشكل (٥-٤ا) والخاصه بالبرمجه الخطيه ، النظر لمنحنى تحويل الانتاج والمعرف للحاله المتصله والمشروحه في الجز (٥-٤) ففي مثل هذه الحاله (الحاله المتصله) يعطى منحنى تحويل الانتاج x_2 بدلاله x_1 (حيث ان الداله تكون مقعره بانضباط) بمعدل تحويل انتاج (RPT) متصل ومتزايد . اما في حالة النظر للبرمجه الخطيه ، فان x_2 تكون بدلاله x_1 (بحيث ان الداله تكون مقعره وليست بانضباط) بمعدل تحويل انتاج غير متصل وغير متزايد وتعتمد النقطه المثلى للحد الاعلى من الايرادات على نسبه اسعار المنتجات في كلا الحالتين .

Duality

الازدواجية :

افترض نظام البرمجة الخطى التالى ، ثم اوجد قيم r_i ($i = 1, \dots, m$) والى تمكنا من الحصول على الحد الاعلى للنظام التالى :

$$(٣٧-٥) \quad C = r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n$$

تحت الشروط التالية :

$$a_{11}r_1 + a_{21}r_2 + \dots + a_{m1}r_m \geq p_1$$

$$(٣٨-٥) \quad a_{12}r_1 + a_{22}r_2 + \dots + a_{m2}r_m \geq p_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{1n}r_1 + a_{2n}r_2 + \dots + a_{mn}r_m \geq p_n$$

$$(٣٩-٥) \quad r_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

ويظهر لنا ما سبق ، ان انظمة البرمجة الخطية تكون دائما مزدوجة . فالنظام فـسـى المعادلات من (٣٧-٥) الى (٣٩-٥) تكون لثنائى dual للنظام فى المعادلات من (٣١-٥) الى (٣٣-٥) فالنظام الاولى يحتوى على m من الشروط و n من المتغيرات ، بينما النظام الثانى له يتكون من n من الشروط و m من المتغيرات وتكون الفرض من الدالة الاولى هو الحصول على الحد الاعلى بينما الفرض من الدالة الثانية هو الحصول على الحد الادنى ويمكن تبادل عوامل الدالة وكذلك ثوابت الشروط فى كلا النظامين وتكون اللامساويات معكوسة ومثال ذلك ان العامل a_{ij} يكون فى الصف i والمعمود j فى المعادلات (٣٢-٥) بينما هو فى المعادلات (٣٨-٥) يكون فى الصف i والمعمود j وهذا تكون الازدواجية عليه تامة .

وقد يرفض القارىء فى التحقق من ان النظام الاولى يكون الثانى لثنائية هو نفسه (١) dual of its dual ويرتبط اى نظام بثنائية its dual من عدة جهات وسوف نذكر هنا بعض نظريات الازدواجية الهامة نمثلا : اذا وجد حل امثل محدود لاي واحد من الانظمة فانه يوجد بالتالى حل امثل محدود للانظمة الاخرى . وكذلك اذا وجد حل محققه لكلا النظامين (النظام الاول وثنائيه) فانه بالتالى توجد حلول متشابهة . محدده لكليهما .

افترض انه توجد حلول متطابقة (وقد تم الحصول عليها بالفعل) لكلا النظامين وافترض

$$\text{كذلك ان هذه الحلول المتطابقة يعطيا الكميات التالية } q_1, \dots, q_m \text{ و } r_1, \dots, r_n$$

(١) اضرب (٣٧-٥) و (٣٩-٥) فى (١-) لنضع هذا النظام فى النمط التقليدى ثم طبق القواعد المعطاة سابقا لاجراء ثنائى هذا النظام ، ومن ثم اضرب ثنائيه (دالة وشروط) بالعدد (١-) وتكون النتيجة هو نفس النظام المعطى بالمعادلتين (٣١-٥) و (٣٢-٥) .

ففي هذه الحالة نجد أن أحد نظريات الأزد واجبه تنص على أن القيمة المثلى لمتغير ما في أحد الانظمة يساوي صفراً إذا كان الشرط المقابل في النظام الآخر تحقق على أساس أنه لامتناهية بحتة (أي أو بدون علامة التساوي) وتكون غير سالبة إذا كان الشرط المقابل تحقق على أساس أنه لامتناهية :

$$\begin{aligned} a_{11}q_1^* + \dots + a_{m1}q_m^* &< x_1^* \quad \text{implies} \quad r_1^* = 0 \\ (٢٠٥) \quad a_{11}q_1^* + \dots + a_{m1}q_m^* &= x_1^* \quad \text{implies} \quad r_1^* \geq 0 \end{aligned}$$

وأنه كذلك : $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} a_{1j}r_1^* + \dots + a_{mj}r_m^* &> p_j \quad \text{implies} \quad q_j^* = 0 \\ (٢١٥) \quad a_{1j}r_1^* + \dots + a_{mj}r_m^* &= p_j \quad \text{implies} \quad q_j^* \geq 0 \end{aligned}$$

$j = 1, \dots, n$

وتنص نظرية أخرى مقاربه للنظرية السابقة على أنه إذا كانت القيمة المثلى لمتغير ما في أحد الانظمة موجبه ، فإن القيم المثلى للمتغيرات في النظام الآخر سوف تحقق الشرط المقابل كمتساوية وليس كلامتناهية :

$$\begin{aligned} (٢٢٥) \quad r_i^* > 0 \quad \text{implies} \quad a_{1i}q_1^* + \dots + a_{mi}q_m^* &= x_i^* \\ i &= 1, \dots, m \\ (٢٣٥) \quad q_j^* > 0 \quad \text{implies} \quad a_{1j}r_1^* + \dots + a_{mj}r_m^* &= p_j \\ j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

فإذا وضعنا القيمة المثلى لـ q_j^* في المعادلتين (٢١٥) و (٢٢٥) ثم ضربنا الشرط i بالكمية r_i^* ($i = 1, \dots, m$) ثم جمعنا الشروط الناتجة نحصل على :

$$(٢٤٥) \quad \sum_{i=1}^m r_i^* \sum_{j=1}^n a_{ij}q_j^* = \sum_{i=1}^m r_i^* x_i^*$$

وهذه المتساوية ناتجة من المعادلة (٢٢٥) ^(١) فإذا وضعنا تبعاً r_i^* المثلى في المعادلة (٢٣٥) والمعادلة (٢٨٥) ثم ضربنا الشرط j بالكمية q_j^* ($j = 1, \dots, n$) ثم جمعنا n الشروط الناتجة ، نحصل على :

$$(٢٥٥) \quad \sum_{j=1}^n q_j^* \sum_{i=1}^m a_{ij}r_i^* = \sum_{j=1}^n q_j^* p_j$$

وهذه المتساوية تتبع من المعادلة (٢٣٥) ونلاحظ أن الطرف الأيسر من المعادلة

(١) إذا كانت $r_i^* > 0$ فإن الشرط المقابل سوف يكون متساوية ويظل كذلك حتى بعد عملية الضرب . ولكن إذا كانت $r_i^* = 0$ فإن الشرط المقابل سوف يتحول إلى المتساوية البديهية ($0 = 0$) بعد عملية الضرب . وعلى هذا فإن المعادلة (٢٤٥) تتكون من مجموع متساويات .

(٤٤-٥) هو نفسه الطرف الايسر للمعادلة (٤٥-٥) وبالتعميم من المعادلة (٣٧-٥)
 فى المعادلة (٤٤-٥) وبالتعميم ايضا من المعادلة (٣١-٥) فى المعادلة (٤٥-٥)
 نحصل على :

$$(٤٦-٥) \quad R = \sum_{j=1}^n p_j q_j^* = \sum_{i=1}^m x_i^0 r_i^* = C$$

ومن هذا نجد ان : القيم المثلّى للدوال المطلوبة لنظامى البرمجة يكونا متساويين
 وتعطى القيمة المثلّى للمتغير الثانى r^* المعدل الذى سوف يجعل القيمة المثلّى
 للمعادلة (٣١-٥) تتزايد مع كل وحدة زيادة فى x_j^* مع المحافظة على المعطيات من
 الداخلى ثابتة غير متغيرة . وتفسيرها هو نفس تفسير المضروب فى تحاليل كون - تكرر
 (انظر تعرين ٨-٥) وتفسير المتغيرات الثانوية على انها أسعار دواخل منسوبة
 imputed input prices للنظام المناقش هنا ، وقد تفسر هذه الاسعار فى نظم اخرى
 على انها اسعار السوق التنافسية competitive market prices ويعطى الجانسيب
 الايسر من الشرط فى المعادلة (٣٨-٥) تكلفة الانتاج للوحدة الواحدة من المنتج j
 بدلالة الاسعار المنسوبة imputed prices وتنص الشروط الثانوية على ان تكلفة الوحدة
 تساوى او غرق السعر (وحدة الايرادات) لكل ناتج . ويتبع من المعادلة (٤٣-٥)
 ان تكلفة الوحدة تساوى سعر الناتج الذى تم انتاجه وسوف تؤدى اسعار الداخلى
 المنسوبة الى الكفاءة efficiency بحيث انه لا يمكن لصاحب الوحدة الانتاجية من زيادة
 ربحه بتغييره لمستويات الانتاج .

وتمطى الدالة المطلوبة الثانوية مخزون stocks صاحب الوحدة من الداخلى بسعر
 الداخلى المنسوب . ونجد من المعادلة (٤٥-٥) ان القيمة المثلّى لمخزون صاحب
 الوحدة من الداخلى يساوى ايراداته المثلّى . فاذا دفع لاصحاب الداخلى المخزيره
 الاسعار المنسوبة ، فان اجمالي التكلفة سوف يتفد وسوف يصبح اجمالي الربح صفرا .

اما اذا حقق الناتج الامثل شرط الداخلى j على اساس انه لا متساويه فقط (بمعنى
 انه لا توجد اشارة = مع اللامتساويه) ، فان صاحب الوحدة الانتاجيه سوف يتبقى لديه
 كمية من الداخلى j غير مستخدمة وسوف تنص المعادلة (٤٦-٥) على ان السعر
 المنسوب سوف يكون صفرا .

وسوف يكون فقط الداخلى النادر (بمعنى الداخلى المستفاد منه تماما) اسعار
 موجبه .

مثال : ثنائى النظام dual system للحاله المعطاه فى الشكل (٤٥-٥) هو
 كالتالى : للحصول على الحد الادنى من :

$$C = 18r_1 + 8r_2 + 14r_3$$

تحت الشروط :

$$r_1 + r_2 + 2r_3 \geq 1$$

$$3r_1 + r_2 + r_3 \geq 2$$

$$r_1, r_2, r_3 \geq 0$$

فيكون الحل الأمثل للنظام البدائي initial system هو : $q^* = 5, q^* = 3$.
 $y^* = 13$ وسوف تتحقق المساواة للشروطين الأول والثاني من شروط الداخلة في النظام البدائي ، وسوف تتحقق اللامساوية فقط \langle أو \rangle للشرط الثالث وسوف يتبع الحل الأمثل للنظام الثنائي dual system من المعادلتين (٤٠-٥) و (٤١-٥) من المعادلة (٤٠-٥) نجد أن $r^* = 0$ ومن المعادلة (٤١-٥) نجد أن :

$$r^* + r^* = 1$$

$$3r^* + r^* = 2$$

ومن هاتين المعادلتين نجد أن $r^* = 0.5$ وأن $r^* = 0.5$ وبتقييم الدالة الثنائية المطلوبه يتحقق لنا أن $C^* = 13$ كما نصت عليه المعادلة (٤٦-٥) .

SUMMARY

ملخص ما سبق :

لقد قمنا بالتوسع في النظرية الاساسيه للوحده الانتاجيه (اوالمؤسسة) firm وتحملنا على بعض خواص دوال التكلفة والانتاج وتوصلنا كذلك الى بعض النتائج الغفيدة اذا كانت دالة الانتاج متجانسه من الدرجة الأولى أى ان أى تغيير نسبى فى مستويات الداخلة سوف ينتج عنه تغير نسبى فى مستوى الناتج بدون تغيير فى الانتاج الحدى للدواخل وسوف يكون مجموع مرونة الناتج بالنسبة للدواخل مساويا للوحده . ولتقسيد استغندا من نظرية أولير لتوضيح ان مجمل الناتج سوف ينفذ اذا دفع لكل داخل ماقيمة الانتاج المادى الحدى . ولكن افتراضات الحصول على الحد الاعلى من الربح فى حالة المنافسة غشلى اذا كانت دالة الانتاج للحدى الطويل متجانسه من الدرجة الاولى .

وعرفنا دالة الانتاج CES بانها دالة متجانسة من الدرجة الاولى وان لها مرونة تعويض ثابتة فى كل مكان . وسوف نأخذ أشكال منحنيات دوال CES اشكالا مختلفه من خطوط مستقيمة الى خطوط بزوايا قائمة كلما كانت مرونة التعويض تتراجع بين القيمتين للنهاية : $+\infty$ و صفر .

وتتطلب دالة الانتاج الخاصة بـ دو جلاس مرونه تصوييف ثابتة وبعقدار يساوى واحداً وهى عضو فى مجموعة دوال CES وتنش شروط الدرجة الاولى لدالة CES على ان نسبة الداخلى المستخدم تعامل كدالة خطيه بالنسبه للوثرات تحت لنسبة سعر الداخلى.

ولقد وجدنا ان تحاليل كون - تكرر فعيده لمسائل فى مجالات مختلفه لنظريات الوحدة الانتاجيه . ولقد اعتبرنا مسالتين هامتين تضمنان عدم انصصال رئيسى $\text{major discontinuities}$ وسمحت لنا الازدواجيه بين دوال الانتاج والتكلفه باشتقاق دوال الانتاج من دوال التكلفه وبالعكس . وتنش بديهية شيفارد على ان اشتقاق دالة التكلفه بالنسبه لسعر الداخلى تساوى مستوى استخدام الداخلى المستخدم للحصول على التكلفه الادنى .

لقد ادخلنا عدم التاكيد Uncertainty فى نظريات الوحدة الانتاجيه بافتراض ان المنفعة صاحب المؤسسه (او الوحدة الانتاجيه) تكون بدلاله الربح الذى يتحمل عليه من عليه الانتاج . فاذا كان صاحب الوحدة متقاديا للمخاطره فانه تحت الظروف العاديه ، سوف يختار الناتج بحيث ان السعر المتوقع سوف يفوق التكلفه الحديه MC المتوقعه وسوف ينتج صاحب الوحدة الانتاجيه المعاييد بالنسبه للمخاطره اكثر يساوى بين الاثنين ، وسوف ينتج محب المخاطره اكثر واكثر لمساواة الاثنين .

وتتميز الحركة الانتاجيه الخطيه بالمستويات الثابته للداخلى والناتج وتتكون دوال الانتاج الخطيه من عدد من الحركات الانتاجية الخطيه والتى قد تستخدم فى ان واحد .

وسوف يكون التعوييف بين الداخلى ومجتزلا اذا توفرت اثنين او اكثر من الحركات الخطيه لمنتج ما وتغطى البرمجه الخطيه طليه الحصول على الحد الاعلى لداله خطيه مكونه من n متغير غير سالب تحت m من الشروط الخطيه بشكل لامتناهيات ، وسوف تكون النقاط الغير سالبه فى الفضاء المكون من n من الابعاد $n\text{-dimensional space}$ والتى تحقق شروط نظام البرمجه الخطيه ، مجموعه نقاط التحقق $\text{feasible point set}$ وتتكون هذه المجموعه مغلقه ومحدده ومحدده من الأسفل . فاذا وجدت قيعه مثبلى محدده للداله المطلوبه ، فان هذه القيمه سوف تقع عند واحد او اكثر من نقط الاطراف extreme points لمجموعه نقاط التحقق . وسوف يكون لاي نظام برمجه خطى محتوى على n متغير و m شرط نظام ثنائى dual system محتوى على m متغير و n شرط . وسوف تعطى متغيرات احد النظامين ، القيم الحديه marginal values لشروط النظام الاخر ، وسوف تكون القيم المثلى لكلا الدالتين فى النظامين متساويه .

EXERCISES

5-1 Each of the following production functions is homogeneous of degree one. In each case, derive the marginal products for X_1 and X_2 and demonstrate that they are homogeneous of degree zero:

$$(a) \ q = (ax_1x_2 - bx_1^2 - cx_2^2)(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

$$(b) \ q = Ax_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + bx_1 + cx_2$$

5-2 An entrepreneur uses two distinct production processes to produce two distinct goods, Q_1 and Q_2 . The production function for each good is CES, and the entrepreneur obeys the equilibrium condition for each. Assume that Q_1 has a higher elasticity of substitution and a lower value for the parameter α than Q_2 [see (5-12)]. Determine the input price ratio at which the input use ratio would be the same for both goods. Which good would have the higher input use ratio if the input price ratio were lower? Which would have the higher use ratio if the price ratio were higher?

5-3 An entrepreneur has the production function $q = Ax_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$. She buys inputs and sells the output at fixed prices, but is subject to a quota which allows her to purchase no more than x_1^0 units of X_1 . She would have purchased more in the absence of the quota. Use the Kuhn-Tucker analysis to determine the entrepreneur's conditions for profit maximization. What is the optimal relation between the value of the marginal product of each input and its price? What is the optimal relation between the RTS and the input price ratio?

5-4 Use Shephard's lemma to find the production function that corresponds to the cost function $C = (r_1 + 2\sqrt{r_1r_2} + r_2)q$, and demonstrate that it is CES.

5-5 A farmer, who sells at a fixed price of 5 dollars per unit and has the cost function $C = 3.5 + 0.5q^2$, plants to maximize profit under certainty. After planting she discovers that she can have a fertilizer applied that will increase her yield 40 percent with a probability of 0.25, 60 percent with a probability of 0.5, and 88 percent with a probability of 0.25. Her utility function is $U = \sqrt{\pi}$. Determine the maximum amount that she is willing to pay for the fertilizer application. Contrast this amount with the expected value of the increase in her profit as a result of fertilizer application.

5-6 A linear production function contains four activities for the production of one output using two inputs. The input requirements per unit output are

$$a_{11} = 1 \quad a_{12} = 2 \quad a_{13} = 3 \quad a_{14} = 5$$

$$a_{21} = 6 \quad a_{22} = 5 \quad a_{23} = 3 \quad a_{24} = 2$$

Are any of the activities inefficient in the sense that there is no input price ratio at which they would be used?

5-7 Each of n linear activities yields s outputs and uses m inputs as described by (5-30). An entrepreneur possesses fixed quantities of each of the inputs. She desires to maximize her total revenue from the sale of the outputs at constant market prices. Formulate her optimization problem as a linear-programming system, and derive its dual programming system.

5-8 Consider the basic linear-programming problem given in (5-31) to (5-33). Use the Kuhn-Tucker conditions to establish that the dual system constraints (5-39) and the equilibrium conditions (5-40) to (5-43) are satisfied.

SELECTED REFERENCES

- Arrow, K., H. B. Chenery, B. Minhas, and R. M. Solow: "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency," *Review of Economics and Statistics*, vol. 43 (August, 1961), pp. 228-232. The original statement of the properties of the CES production function.
- Baumol, W. J.: *Economic Theory and Operations Analysis* (4th ed., Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977). Chaps. 8 and 12 cover Kuhn-Tucker analysis and linear programming respectively. The mathematics is fairly elementary.
- Dorfman, R., P. A. Samuelson, and R. Solow: *Linear Programming and Economic Analysis* (New York: McGraw-Hill, 1958). An elementary presentation of linear programming and the input-output model.
- Gale, David: *The Theory of Linear Economic Models* (New York: McGraw-Hill, 1960). An original approach to linear programming, games, and input-output. The necessary advanced mathematics is summarized in chap. 2.
- Hadley, G.: *Linear Programming* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962). A text with economic applications. Matrix algebra and point-set theory are used.
- Jorgenson, D. W., and L. J. Lau: "The Duality of Technology and Economic Behavior," *Review of Economic Studies*, vol. 41 (April, 1974), pp. 181-200. An advanced discussion of duality for the firm.
- McCall, J. J.: "Probabilistic Microeconomics," *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 2 (Autumn, 1971), pp. 403-433. A summary of analysis of the firm under uncertainty. Some knowledge of continuous probability theory is required.
- McFadden, Daniel: "Constant Elasticity of Substitution Production Functions," *Review of Economic Studies*, vol. 30 (June, 1963), pp. 73-83. Fairly advanced mathematics is employed.
- Shephard, R. W.: *Theory of Cost and Production Functions* (Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1970). Fundamental discussions of duality in production. Advanced mathematics is used.
- Varian, H. R.: *Microeconomic Analysis* (New York: W. W. Norton, 1978). Chap. 1 contains an advanced modern mathematical statement of the theory of the firm.

الفصل السادس

توازن السوق

MARKET EQUILIBRIUM

لقد تم تحليل سلوك المستهلك وصاحب الوحدة الانتاجية بافتراض انهما غير قادرين على التأثير على اسعار الاشياء التي يبيعونها والتي يشترونها فهذا المستهلك المعزول تماما يواجه باسعار معطاء له لا يستطيع تغييرها ثم يقوم بشراء المجموعه من السلع التي تعطى له الحد الاطلى من المنفعة . اما صاحب الوحدة الانتاجية فانه سوف يواجه منتجا معطى له وكذلك يواجه اسعار للداخل لا يستطيع تغييرها ثم يقوم بعد ذلك بانتاج مستوا معين يعطيه الحد الاطلى من الربح . وعلى هذا فان كل واحد منهما يجب عليه ان يحل مسألة اما لايجاد الحد الاطلى من المنفعة او الحد الاطلى من الربح .

وتضمن حركات المستهلك وصاحب الوحدة الانتاجية معا الاسعار التي كانت تعتبر غير قابلة للتغير عندما اعتبرنا كل واحد منهما على حدة . لان الاسعار تتمييز نفسى السوق حيث يتلاقى المستهلك وصاحب الوحدة الانتاجية ثم تتم بينهما عملية تبادل السلع فيصبح المستهلك هو المشتري وصاحب الوحدة الانتاجية هو البائع في سوق السلع النهائية *final good* . اى السلع التي لا تحتاج الى اى عليه انتاجية اخرى لاستكمال استهلاكها . وينعكس دورهما في السوق الذي يباع فيه المواد الاولى مثل العمالة *labor* فبعض هذه المواد الاولى قد تكون منتجات وحدات اخرى فمثلا الحبوب تمثل مواد اوليه لطاحن الحبوب ولكنها ناتج من المنتجات الزراعيه . وبهذا يصبح كلا منهما صاحب وحدة انتاجية في سوق مثل سوق السلع الوسيطة *intermediate goods* وهى التى لم تستكمل شكلها النهائى فيمكن استخدامها كمواد اوليه .

وتبحث تحاليل توازن السوق في تقرير اسعار السوق والكميات المباعة والمشتراة . ففي هذا الباب سوف نركز على السلوك في الاسواق الانفرادية ولقد قمنا بتخصيص الافتراضات الاساسيه وخواص السوق التنافسيه الكامله في الجزء (٦-١) ثم اشتقنا دوال الطلب في الجزء (٦-٢) وفى الجزء (٦-٣) تحمّلنا على دوال العرض للسوق على المدى القصير

والمدى الطويل ، بالإضافة الى مناقشة الوفورات الخارجية external economies وزيادة نفقات الانتاج الخارجية external dis economies ولقد استخدمت دوال العرض والطلب لتقرير توازنات سوق السلع commodity-market equilibria في الجزء (٤-٦) ثم طبقنا هذه التماثل على مسألة الضرائب في الجزء (٥-٦) ثم وسعنا تحليل توازن السوق ليعطى اسواق العناصر factor markets في الجزء (٦-٦) ثم ناقش وجود existence وانفرادية uniqueness توازن السوق في الجزء (٧-٦) وناقشنا الاستقرار stability في الجزء (٨-٦) موضوع الجزء (٩-٦) هو خواص التوازن في اسواق يتخلف فيها ردود الفعل بالنسبة للعرض lagged supply reactions ثم ناقش سوق المستقبل على اساس بسيط في الجزء (١٠-٦) .

٦ - ٩ الافتراضات المثالية المتكاملة :

THE ASSUMPTIONS OF PERFECT COMPETITION

ان اى سوق للسلع يجب ان يحقق الشروط التالية اذا كان سوقا تنافسيا متكاملا :

- (١) تنتج الوحدات الانتاجية سلعة متجانسة ويكون المستهلكون متساوون من وجهة نظر البائع بحيث ان لا يحظى احدا منهم بعبء او خلافا بالبيع لمستهلك معين .
- (٢) الوحدات الانتاجية والمستهلكون هددون وتكون المبيعات والمشتريات قليلة بالنسبة لحجم الصفقات .
- (٣) يمتلك كلا من الوحدات الانتاجية والمستهلكون معلومات متكاملة عن الاسعار الراهنة والمناقصات الجارية ، current bids ويقتنوا اى فرصة سانحة لزيادة الارباح والمنفعة كل حسب حاجته .
- (٤) يكون الدخول entry والخروج exit الى ومن السوق مفتوح للوحدات الانتاجية والمستهلكون في المدى الطويل .

ويضمن الشرط (١) اخفا هوية anonymity الوحدات والمستهلك ١٠ اما بالنسبة للوحدات الانتاجية ، فان هذا يعنى ان منتجات الوحدة غير ملحوظة عن منتجات الوحدات الاخرى مثل : الماركة ، نوعية الاختراع ، النوعية الخاصة ، والمظهر الخارجى النح ، وان هذه لا تكون موجودة بحيث ان لا يكون للمستهلك سبب في تفضيل انتاج وحدة على وحدة اخرى ، وسوف يضمن توحيد المستهلكين بيع السلعة لمن يقدم اعلى عرض وسوف لا يسمح للمعادن والتقاليد المتبعة (مثل قاعدة اول واحد اتى يكون اول واحد تقدم له الخدمة) بالعمل في توزيع المنتجات بين المستهلكين .

ضمن شرط (٢) ان كثيرا من الباعة سوف يواجهون كثيرا من المشتريين . فاذا كانت

الوحدات الانتاجيه كثيره ، فان قرار صاحب واحد من هذه الوحدات بزيادة أو تخفيض إنتاجه سوف لا يترك اثرا ملحوظا على السوق بحيث تتأثر الاسعار وكذلك الحال بالنسبه للمستهلك بحيث أن زيادة أو نقصان طلبه سوف لا يؤثر على السعر في السوق وبهذا يتصرف البائع والمشتري كما لو لم يكن له أى تأثير على السعر وعليه أن يتكيف مع حالات السوق . وعليه فان المشتري سوف يكون "مقبلا للسعر" "price takers" بحيث أنه يعدل في الكميات التي يشتريها حتى يجعلها الكميات المطلوبة بالنسبه له وحسب الاسعار التي قبلها في السوق بدون أى اعتبار على ان هذه المشتريات سوف تؤثر على الاسعار . أما البائع فانه يلاحظ السعر في السوق ويعدل في الكميات المباعه بحيث ان هذه الكميات تكون هي الكميات المطلوبة له ولا يكون لها أى تأثير على الاسعار .

وضمن الشرط (٣) المعلومات الكامله للطرفين في السوق . فالبائع والمشتري يتحصلان على معلومات كامله عن وجوده وطبيعة النتائج وكذلك عن السعر الراهن .

وبما أنه لا يوجد مشترين غير موحدين ، فان البائع لا يستطيع أن يبيع بسعر غير السعر الموجود في السوق وسوف لا يستطيع المستهلكون شراء السلع من بائعين وباقبل سعرا بنفس الانسياب السابقه . وبما أن السلعه المنتجه متجانسة وان كلا الطرفين في السوق يحصلان على معلومات كامله ، فانه يجب ان يعم سعر واحد في السوق التنافسيه الكامله . ويمكن اثبات هذا بافتراض حدوث العكس بحيث ان السلعه تباع بـسعرين مختلفين . ولكن بالافتراض ، فان المستهلك يعنى الحقائق التاليه :

(١) انه يمكن شراء السلعه بسعرين مختلفين .

(٢) وان الواحده من هذه السلعه هي نفسها في السلعه الاخرى . وبما ان المستهلك يحرص دائما على الحصول على أعلى منفعة من أى سلعه يشتريها فانه سوف لا يشتري السلعه ذات السعر العالي وبذلك سوف يسود السوق سعر واحد وهو السعر الذي يشتري به المستهلك وهو السعر الأقل .

وسوف يضمن الشرط الأخير عدم انسياب عناصر الإنتاج بين الوظائف البدلية على المدى الطويل . ويفترض هذا الشرط أن عناصر الإنتاج مرنة وقابله للتنقل بين الوظائف المختلفه بحيث أنها تحقق أكبر منفعة ممكنه .

فالوحدات الانتاجيه تبقى في الأماكن التي تحقق فيها أرباحا وتترك الأماكن التي لا تحقق فيها أرباحا . ويعمل عنصر المعامله الى التواجد في الأماكن المصاحبه التي يكون الطلب على منتجاتها في ازدياد . وبهذا نتخلص من الوحدات الانتاجيه القليله الكافيه وأبدلها بوحداث أكثر كفاءه .

وسوف تعم وتنتشر المنافسة الكاملة بين البائعين إذا كان للبائع نفسه تأثير طفيف على السعر في السوق وعلى حركات الآخرين ، ولكن كل بائع يجب أن يتصرف كما لو لم يكن له أى تأثير ويجب أن تسود شروط مشابهة بين المشتريين ، وتكون السوق تنافسية كاملة إذا كانت المنافسة الكاملة منتشرة (أو سائدة) بين طرفي السوق من مشتريين وبائعين وسعر السوق الذي اعتبر في الماضي كمتغير بقيمة ثابتة يعتبر الآن متغيرا فقط ومقداره سوف يتغير بما يتخذه البائع أو المشتري مما من قرارات .

DEMAND FUNCTIONS

٦ - ٢ دوال الطلب :

نتمتع على دالة الطلب لسوق بالنسبة لسلعة ما بجمع دوال الطلب للمستهلكين على حده . وحيث أن المنتج الواحد بسبب صغر حجمه بالنسبة للسوق لا يستطيع أن يواجه دالة الطلب للسوق ككل . وبهذا فإن دالة طلبه سوف تعكس افتراضه بأنه يستطيع بيع كل ما يرغب في بيعه بسعر السوق .

Market Demand

الطلب في السوق :

وبأشباع الاشتقاقات في الجزء (٢-٣) ثم التعميم في الجزء (٢-٦) نجد أن طلب المستهلك i للسلعة Q_i يعتمد على سعر Q_i وأسعار السلع الأخرى وكذلك يعتمد على دخل المستهلك .

$$D_i = D_i(p_1, p_2, \dots, p_n, y_i)$$

ونتمتع على دوال الطلب للمستهلك من شروط الدرجة الأولى للحصول على الحد الأدنى من المنفعة بافتراض أن شروط الدرجة الثانية قد تحققت وسوف يكون رد فعله للتغيرات في الأسعار والدخل يتغير طلباته للسلع بحيث أنه يحافظ على المساواة بين RCS ونسبه السعر لكل زوج من السلع ، وفي نفس الوقت يحقق شروط ميزانيته .

وقد يتغير طلب المستهلك للسلعة Q_i كنتيجة للتغير في p_k ($k \neq i$) وبالرغم من أن p_i ظل بدون تغير أو نتجه لرد الفعل للتغيرات في دخله مع المحافظة على جميع الأسعار ثابتة بدون تغيير ويفترض أن تكون جميع الأسعار ودخل المستهلك ثابتة من أجل عزل السلوك في السوق z وسوف يكون طلب المستهلك للسلعة Q_i بدلالة p_i فقط .

$$D_i = D_i(p_i) \quad (١-٦)$$

ولا تزال الكمية المطلوبة تعتمد على أسعار السلع الأخرى وعلى دخل المستهلك ولكن هذه المتغيرات فعالمها على أساس أنها ذات قيمة ثابتة . ولكي يحقق شروط الدرجة

الأولى ، فإن المستهلك سوف يغير طلباته للسلع غير Q_i كلما تغيرت p_i وهذه التغيرات تشمل عادة في التحاليل المركزة على سوق السلعة Q_i فإذا قمنا بتصنيف السلعة (والذى رمزنا له بالحرف i) في المعادلة (١-٦) نحصل على :

$$D_i = D_i(p) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

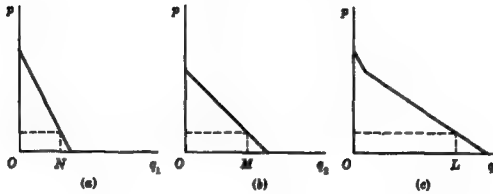
وعلى هذا يكون الطلب الاجمالى للسلعة Q عند اى سعر ، هو مجموع الكميات المطلوبة من المستهلكين وهدم n بالسعر السائد فى السوق .

$$(٢-٦) \quad D = \sum_{i=1}^n D_i(p) = D(p)$$

حيث ان D هى الطلب الاجمالى والنقط الموجود فى المعادلة (٢-٦) مبنى على الافتراض بان جميع الاسعار الاخرى والدخول لجميع الـ n من المستهلكين تكون ثابتة وفى العادة نفترض ان طلبات المستهلكين الفردية تكون دوال متناقصة باضطراب بدلالة السعر ولكن احتمال وجود دالة السعر ، ولكن احتمال وجود دالة متزايدة بدلالة السعر موجود فى حالة سلعة جيغون *Giffen good* (راجع الجزء ٢-٥) ومن الواضح انه اذا كانت دوال طلب الفرد متناقصة باضطراب ، فان دالة الطلب الاجمالية تكون ايضا تناقصية باضطراب فاذا كان هناك بعض دوال طلب فردية متناقصة والبعض الاخر متزايدة فان التأثير الصافى على دالة الطلب الاجمالى تكون مائة فاضه ونتحصل على منحنى الطلب الاجمالى لسلعة ما عن طريق رسم المعادلة (٢-٦) وقد يتغير شكله ومكان المنحنى كلما تغيرت عناصر المعادلة (٢-٦) اى انه كلما تغيرت اسعار السلع الاخرى وكذلك كلما تغير دخل المستهلك وفى الحقيقة فان المنحنى قد ينتقل من مكانه الى مكان اخر حسب التغيرات التى تحدث فى توزيع الدخل بدون اى تغيير فى الدخل الاجمالى - فاذا انقص من دخل احد المستهلكين وزيد فى اخر بنفس نسبة النقص ، فان منحنيات الطلب الفردية المقابلة لهذا سوف تنتقل (أو تتزعزع) من مكانها على القالب وسوف يتأثر منحنى الطلب الاجمالى اذا عوض الانتقال بعضها البعض .

وحسب العرف التقليدى العام للأشكال والرسومات فان منحنى الطلب الاجمالى يكون المجموع الاقنى لمنحنيات الطلب الفردية . وتمثل اجزاء (a) و (b) من الشكل (١-٦) منحنيات الطلب لمستهلكين فقط فى السوق التنافسية المفترضة (١) وتمثل الجزء (c) منحنى الطلب الاجمالى لهم جميعا والذي رسم بجمل الصائفة OL شأوى مجموع الصائفتين OM و ON .

(١) لا يمثل مستهلكين العدد الكبير الضرورى فى حالة المنافسة الكاملة ولكنهما استخدمتا لشرح سلوك عدد كبير منهم .



شكل ٦ - ١

Producer Demand

طلبات صاحب الإنتاج (المنتج)

سوف يواجه دالة طلب السوق أو دالة الطلب الإجمالي جميع البائعين ويعتبر صاحب الإنتاج أنه غير قادر بفرد أنه يؤثر على السعر الموجود في السوق وسوف ينتج عن تغييره في إنتاجه حركة طفيفة عبر منحنى طلب السوق ، ويعتقد هو أنه يستطيع أن يبيع أي كمية وأنه أيضا قادر على الإنتاج بالسعر الموجود في السوق وسوف يظهر منحنى الطلب للإنتاج الذي قام به صاحب الوحدة الإنتاجية على أنه خط مستقيم ممطس بالمعادلة التالية :

$$p = \text{ثابت}$$

ولكن منحنى طلب السوق ليس هو المجموع الأتقى لمنحنيات الطلب التي تواجهها الوحدات الإنتاجية المنفردة .

ويكون إجمالي إيرادات الوحدة الإنتاجية هي :

$$R = pq$$

وتعرف الإيرادات الحدية **Marginal revenue** بأنها المعدل التي يزداد منه مجموع الإيرادات كنتيجة للتغير البسيط في المبيعات وباللغة الرياضية :

$$\frac{dR}{dq} = p$$

حيث أن p ثابتة وسوف يكون منحنى الإيرادات الحدية والذي تواجهه الوحدة الإنتاجية المنفردة مطابقا لمنحنى الطلب لهذه الوحدة .

SUPPLY FUNCTIONS

٦ - ٣ دوال العرض :

يمكن تعريف دوال العرض للوحدات الإنتاجية المنفردة للحالات التالية :

- (١) فترة زمنية قصيرة جدا لا يمكن خلالها تغيير مستوى الإنتاج .
- (٢) فترة على المدى القصير والتي يمكن خلالها تغيير مستوى الإنتاج ولكن لا يمكن تغيير

حجم الوحدة الانتاجيه •

(٣) والفترة طويلة المدى التى يكون خلالها جميع الدواخل متغيرات •

الحالة الأولى : الفترة القصيرة جدا : The Very Short Period

افترض ان صاحب الوحدة الانتاجيه يقرر كل صباح كمية الانتاج التى سوف ينتجها ذلك اليوم ثم يقوم بتطبيق هذا القرار فى الحال ويقضى بقية النهار فى محاولة بيع ما أنتج للمستهلك الذى يدفع السعر الاعلى • وليس باستطاعته زيادة أنتاجه خلال اليوم وبيع مقدار معين من السلعة فى نفس الوقت^(١) وبما انه قد تم انتاج q^0 فان التكلفة الحديه لاي انتاج اقل من q^0 سوف تكون صفرا • ولا يمكن زيادة الناتج بأكثر تكلفه غير محدوده • ويمثل الخط العمودي عند هذه النقطة منحنى التكلفة الحديه •

وتحصل الوحدة الانتاجيه على الحد الاعلى من الربح ببيع كمية بحيث ان $MC = p$ وبما ان MC لاي ناتج اقل من q^0 يساوى صفرا ، وان MC لاي ناتج اكبر من q^0 يكون غير محدودا فان المعادله $MC = p$ لا يمكن أن تتحقق وأن الوحدة الانتاجيه سوف توسع مبيعاتها للنقطه التى يتوقف منها السعر من غرقه على MC وعلى هذا فان الوحدة سوف تبيع انتاجها (اى مجموع المخزون لديها من السلع) بالسعر الموجود فى السوق^(٢) وهذا سوف يجعل الوحدة تحصل على الحد الاعلى من الربح لان السعر الموجود فى السوق هو اعلى الاسعار التى يمكن بيع المنتجات عند وسوف لا تتأثر الكمية المباعه لتغيرات الاسعار وتنشأ دالة العرض الاجمالى عموما على أن الكمية المعروضه من المنتجين تكون دائما بدالة السعر • وبما ان ناتج كل وحده من وحدات الانتاج تكون محددا (ثابتا) فان العرض الاجمالى للسلعه يكون ايضا معطى ولا يعتمد على السعر ، وعليه فان منحنى العرض يكون خطا عموديا ، وتكون مسافته من محدود السعر تساوى مجموع انتاج الوحدات الانتاجيه على انفراد •

(١) لقد تمنا بتبسيط الشرح الحالي بافتراض أن الإنتاج وجميع التمدلات الاخرى تحدث حالا - وقد يكون اقرب للواقع أن نفترض أن الإنتاج على فترات متواصله ثابتة • فإذا كانت العمليه الانتاجيه عليه مستهلك للوقت فان أى تغيير فى مستوى الانتاج لا يمكن تحقيقه فى الحال • وعلى هذا فان الفترة الزمنية القصيرة جدا تكون الوقت الزمنى الاقل من الفترة الزمنية التى مضت بين التغير فى مستوى الدواخل والتغير المقابل فى مستوى الانتاج •

(٢) ربما أن التحاليل الراهنه ساكنه (غير ديناميكيه) static فانطيس من المحتمل أن تبقى السلعه لبيعها فى وقت متأخر (لاحق) •

The Short Run

الحالة الثانية : المدى القصير :

تتم دالة العرض لوحدة انتاجيه تناقصيه كامله على ان الكمية التي سوف تنتج بدلالة سعر السوق يمكن اشتقاقها من شرط الدرجة الأولى لعملية الحصول على الحد الاقصى من الربح وان الاحداثيات المستقيمة لاى نقطه على الجزء الاخذ فى الارتفاع من منحنى MC والمقابل له لاى سعر معطى يقيس الكمية التي سوف تقدمها الوحدة الانتاجيه للعرض بذلك السعر وسوف يكون منحنى العرض للمدى القصير للوحده الانتاجيه مطابقا لذلك الجزء من منحناه التابع للتكلفه الحديده MC على المدى القصير والتي تقع أعلى منحنى AVC الخاص بها ولا تعرف دالة عرضها لمنتجات أقل من الاحداثيات السبقيه لتقاطيع منحنى MC و AVC وسوف تكون الكميات المعروضه مساويه لصفر عند جميع الاسعار التي تكون أقل من الاحداثيات الصادية لهذه النقطة (نقطة تقاطع MC مع AVC) ويتكون منحنى العرض للوحده الانتاجيه من القطعتين OA و BC فى الشكل (٢-٦) ان

التكلفه الحديده MC على المدى القصير للوحده الانتاجيه i تكون بدلالة انتاجها :

$$MC_i = \Phi_i'(q_i) \quad (٢-٦)$$

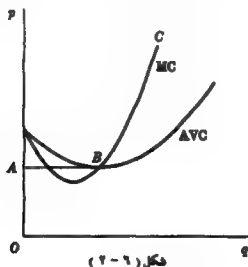
ونحصل على دالة العرض للوحده الانتاجيه i من شرط الدرجة الاولى لها لعملية الحصول على الحد الاقصى من الربح بوضع $p = MC$ ثم حل المعادله (٢-٦) لقيم

$$q_i = S_i \quad S_i = S_i(p) \quad \text{من اجل } p \geq \min AVC$$

$$S_i = 0 \quad \text{من اجل } p < \min AVC$$

ونحصل على دالة العرض الاجمالى للسلعه Q بجميع الـ n دوال العرض المنفردة فيكون العرض الاجمالى هو :

$$S = \sum_{i=1}^n S_i(p) = S(p)$$



ويكون منحنى العرض الاجمالي هو المجموع الافقى لمنحنيات العرض الفردية •

ويطلب شرط الدرجة الثانية لعطية الحصول على الحد الاعلى من الربح بان يكون منحنى MC في تصاعد • وعلى هذا تكون دالة العرض للوحدة الانتاجية متزايدة باضطراب بالنسبة للأسعار الواقعة عند او على من ادنى AVC وبما ان المجموع الافقى للسدوال المتزايدة باضطراب هو نفسه متزايد باضطراب فانه يكون لدالة العرض الاجمالي للمدى القصير ميلا موجبا (١).

مثال : افترض ان منحنى التكلفة الاجمالي يكون :

$$C_i = 0.1q_i^3 - 2q_i^2 + 15q_i + 10$$

نمن هذا نحصل على :

$$MC_i = 0.3q_i^2 - 4q_i + 15$$

وبوضع $MC_i = p$ بالحل لقيم q_i نحصل على :

$$q_i = S_i = \frac{4 + \sqrt{1.2p - 2}}{0.6} \quad (٤-٦)$$

وتكون دالة العرض الفردية مبهمة بالنسبة لجميع الاسعار التي تكون اكبر من او تساوى ادنى AVC. وتكون دالة AVC :

$$AVC_i = 0.1q_i^2 - 2q_i + 15$$

ويمكن تحديد مكان النقطة الادنى لدالة AVC بوضع الاشتقاق بالنسبة للمقدار q_i تساوى صفر ثم نحل لقيم q_i (٢) :

$$\frac{d(AVC_i)}{dq_i} = 0.2q_i - 2 = 0 \quad q_i = 10$$

وبتمويض $q_i = 10$ فى دالة AVC نحصل على القيمة 5 فعندما يكون السعر اقل من خمسة ريالات فان الوحدة الانتاجية سوف انه من الربح جدا بالنسبة لها عدم الانتاج وتكون دالة العرض للوحدة هي :

(١) وسوف ينطبق منحنى العرض الاجمالي مع محور السعر لاسعار اقل من ادنى AVC لجميع الوحدات • وعلى هذه القطعة يكون العرض غير تنافسيا بالنسبة للسعر اى انه لا يمكن الانتاج مع زيادة فى السعر وقد يكون محتلا ان لمنحنيات MC للوحدات المتفرده قطعاً بميل سالب فى المدى $MC > AVC$ وسوف يكون هذا المنحنى للوحدة المتفرده غير متصل وقد يكون منحنى العرض الاجمالي غير متصل ولكن هذا لا يحدث الا فى الحالات الغير عادية •

(٢) يصف الحل الرياضى للمعادلة ٤-٦ . منحنيا بطرفين مقابلين لاشارة (+) والاشارة (-) مام الجزاء التريبيعى • ويمكن القاء النظر عن الطرق المتقابل لاشارة الجزر السالبة لان ميله سالب ولان شرط الدرجة الثانية يتطلب ان يكون MC تصاعديا • ويمكن للقارئ اثبات ان شرط الدرجة الثانية للحد الادنى قد تحقق •

$$p \geq 5 \quad \text{إذا كانت} \quad S_i = \frac{4 + \sqrt{1.2p - 2}}{0.6}$$

$$p < 5 \quad \text{إذا كانت} \quad S_i = 0$$

وسوف يكون العرض الاجمالي مساويا لـ ألف وخمسمائة وحده إذا كان السعر مساويا
22.50 ريالاً .

The Long Run

الحالة الثالثة : المدى الطويل :

يقرر الإنتاج الأمثل على المدى الطويل بالنسبة لاي وحده انتاجيه من المساواة بين
السعر التكلفة الحدية MC للمدى الطويل . ويكون الإنتاج صفراً عندما تكون الاسعار
اقل من AC وتكون دالة العرض للمدى الطويل للوحده الانتاجيه مكونه من ذلك الجزء
من دالة MC للمدى الطويل بحيث ان MC تغرق AC عدته وشبه اشتقاق دالة العرض
الاجمالي للمدى الطويل للاشتقاق من دالة العرض للمدى القصير . فتكون دالة MC
للوحد الانتاجيه i هي :

$$MC_i = \Phi'_i(q_i) \quad i = 1, \dots, n$$

وبوضع $p = MC_i$ والحل لقيم $q_i = S_i$ نحصل على :

$$S_i = S_i(p) \quad i = 1, \dots, n$$

ويمكن الحصول عندئذا على دالة العرض الاجمالي باضافه دوال العرض الفردي (نفسه
(وعددها n) في المعادله (٥-٦) وفي حالة غياب اى تأثيرات خارجيه فان
دالة العرض للمدى الطويل تكون موجبه الميل لنفس اسباب دالة العرض للمدى القصير

الوفورات الخارجية وزيادة في نفقات الإنتاج الخارجية :

External Economies and Diseconomies

لقد افترض ان التكلفة الاجماليه للوحده الانتاجيه المنفردة تكون بدلالة مستوى
الإنتاج الذي تنتجه هذه الوحده فقط . ولكن على كل حال ، قد تعتمد التكلفة
الاجماليه ، في بعض الاحيان ، على مستوى الإنتاج لمجموع الوحدات (ونسمى
مجموع وحدات الإنتاج الوحده الصناعيه) وتذكر وجود الوفورات الخارجيه
External economies في اقتصاد ما اذا احدث التوسع في ناتج الوحده الصناعيه
انخفاض في متحنى التكلفة الاجماليه لكل وحده من وحدات الصناعه . وتذكر كذلك
وجود الزيادة في نفقات الإنتاج الخارجيه External diseconomies في اقتصاد ما اذا
حدث التوسع في ناتج الوحده الصناعيه ارتفاعا لمتحنى التكلفة ، الاجماليه لكل وحده

من وحدات الصناعة (١).

وهذه الوفورات والزيادة في النفقات قد يسببها عوامل عدة • فقد يؤدي التوسع نفسى الانتاج الى قوة طائلة اكثر تعريتها واكثر كثافة من السابق مما يؤدي بدوره الى انخفاض نفسى التكلفة للوحدات بدون اى تفاؤل فى انتاجها ، وقد يؤدي انخفاض الانتاج للوحدة الصناعية الى قوة طائلة اقل تدريجيا من السابق وتتسبب فى ازدياد التكلفة للوحدات وقد تعدت الزيادة فى النفقات الخارجيه اذا سبب التوسع فى الانتاج للوحدة الصناعية ارتفاعا فى اسعار المواد الاولية وهذا بدوره يؤدي الى ارتفاع التكلفة الاجمالية للوحدات •

افترض صوباً ان التكلفة للمدى الطويل للوحدة i تعتمد على مستوى الانتاج للوحدة الصناعية بالاضافة الى انتاج الوحدة i نفسها (٢)

$$C_i = \Phi_i(q_i, q) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

حيث ان q_i هو انتاج الوحدة i بينما $q = \sum_{i=1}^n q_i$ ان كل صاحب وحدة انتاجيه سوف يضيف ، بانتاجه الى انتاج الوحدة الصناعية (ولو ان الجزء المضاف صفر) وحاصل الحصول على الحد الاعلى من الربح بالنسبة لانتاجه هو بافتراض ان مستوى انتاجه سوف لا يؤثر على انتاج الوحدة الصناعية من حيث المستوى وتكون دوال الربح كالتالى :

$$\pi_i = R_i - C_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

حيث ان $R_i = p q_i$ ويتغاضل π_i بالنسبة ل q_i (بافتراض ثبوت q) وكذلك يتغاضل π_i بالنسبة ل q ، وهكذا ، ثم نضع الاشتقاقات الجزئية الناتجة تساوى صفراً :

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = p - \frac{\partial \Phi_i(q_i, q)}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (٦-٦)$$

وتتطلب شروط الدرجة الثانية ان $\partial^2 \Phi_i(q_i, q) / \partial q_i^2 > 0$ لجميع $i = 1, 2, \dots, n$ ويتميز $q = \sum_{i=1}^n q_i$ وحل مجموعة المعادلات المعطاه (وعددها n) بالمعادله (٦-٦) لقيم q_i ثم كتابة $S_i = q_i$:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1(p) \\ S_2 &= S_2(p) \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= S_n(p) \end{aligned} \quad (٦-٧)$$

فكل صاحب وحدة انتاجيه يبنى سلوكه على دالة MC الخاصه به • وفى نفس الوقت

- (١) لاحتاج فى اغلب الوقت ، لجعل نتائج الوفورات والزيادات فى النفقة اكثر غموضاً بتخصيصها لاقتصاديات وعدم اقتصاديات لانه من الممكن ان زيادة انتاج الوحدة الصناعية قد يؤدي الى ارتفاع فى منحنيات التكلفة الاجمالية لبعض الوحدات وانخفاضها للبعض الاخر •
- (٢) وباختيار نمط اكثر صوبية من السابق ، نجد ان دالة التكلفة تكون بدلالة المستويات المختلطة لكل واحد من الوحدات الانتاجيه بشكل واضح : $C_i = \Phi_i(q_i, q_1, \dots, q_n)$ •

بلاحظ (اوتوقع) ناتج الوحده الصناعيه ثم يختار ناتجه ليساوى بين السعر والتكلفه الحديه MC فاذا كان جميع اصحاب الوحدات يتوقعون نفس ناتج الوحده الصناعيه واذا كان انتاج الوحده الصناعيه يتفق مع توقعاتهم ، فانه ليس من الضروري القيام بعملية التعديل والا فان بعض او جميع منحنيات MC سوف تتزحزح من مكانها التوقعيه وسوف يضطر صاحب كل وحده انتاجيه من تعديل مستويات انتاجه حسب العواقب التوقعيه .
وسوف يواصل كل صاحب وحده هذه العطييه التعديليه حده لا يكون هناك حاجه الى اى عطيه تعديل ضروريه بعد ذلك وتتص دوال العرض في المعادله (٧-٦) طس ان كميه العرض المثلثي لكل وحده انتاجيه تكون بدالة السعر بعد اجرا " جميع التعديلات " ونحصل على دالة العرض الاجمالي كما فعلنا من قبل وذلك باضافه دوال العرض الفرديه في المعادله (٧-٦) .

$$S = \sum_{i=1}^n S_i(p) = S(p)$$

وقد يكون لدالة العرض الاجمالي ميل سالب في حالة وجود اقتصاديات وفرة وزنهاده external economies وتتطلب شروط الدرجة الثانيه ان منحنيات MC الفرديه يجب ان تكون تصاعديه عندما نفترض ان ناتج الوحده الصناعيه يكون متغيرا بقيمه ثابتة .

مثال : اعتبر ان الوحده الصناعيه معطيه بوحدين انتاجيتين متنافستين بحيث ان دالتي التكلفة الاجماليه لهما كالتالي :

$$C_1 = \alpha q_1^2 + (\alpha + \beta) q_1 q_2 + \beta q_2^2 \quad C_2 = \alpha q_2^2 + (\alpha + \beta) q_1 q_2 + \beta q_1^2$$

حيث ان $q = q_1 + q_2$ ويجب ان يكون العامل α موجبا والا فان التكلفة الحديه سوف تصبح سالبه لقيم عاليه بدرجة كافيه للمتغير q_1 او q_2 اما العامل β فقد يكون سالبا او موجبا . فاذا كان $\beta < 0$ فانه يوجد وفرة اقتصاديه external economies ولكن اذا كان $\beta > 0$ فانه يوجد خارجيه external diseconomies فشروط الدرجة الاولى المقابله للمعادله (٦-٦) هي :

$$p - 2\alpha q_1 - (\alpha + \beta) q_2 - \beta q_2 = 0 \quad p - 2\alpha q_2 - (\alpha + \beta) q_1 - \beta q_1 = 0$$

وبحل المعادلتين السابقتين للقيمتين $q_1 = S_1$ و $q_2 = S_2$:

$$S_1 = S_2 = \frac{p}{2(\alpha + \beta)} - \frac{(\alpha + \beta)}{2}$$

وطى هذا ، فان دالة العرض الاجمالي تكون خطيه في هذه الحاله :

$$S = S_1 + S_2 = \frac{p}{(\alpha + \beta)} - (\alpha + \beta)$$

وبغض النظر من علامه $(\alpha + \beta)$ فان قاطع منحنى العرض سوف يكون المقسدار التالي $p = (\alpha + \beta) > 0$ فاذا وجدت زياده نفقات خارجيه ($\beta > 0$) فان منحنى العرض سوف

يكون له وإن كمية العرض سوف تزداد بكمية أقل سرعة مع السعر مما لو كانت عليه في غياب مثل هذه الزيادات في النفقات الخارجية أما إذا وجدت وفرة اقتصادية ، ($\beta < 0$) ، فإن مصححى العرض سوف يكون له ميلا موجبا أو سالبا حسبما تكون إشارة المقام ($\alpha + \beta$) موجبه أو سالبه وسوف يكون لمصححى العرض للمدى الطويل ميلا سالبا فقط إذا كانت التخفيضات في التكاليف الناتجة عن التوسع في ناتج الوحدة الصناعية بقدر كبير من الضخامة لتعادل الزيادات في التكلفة الناتجة من توسع انتاجات الوحدات الانتاجية .

٦ - ٤ توازن سوق السلع : COMMODITY-MARKET EQUILIBRIUM توازن المدى القصير : Short-Run Equilibrium

إن قوى السوق التي تغير السعر والكمية المعاملة يمكن اعتبارها من خلال دوال الطلب والعرض الاجمالي . ان ميل دالة الطلب $[D(p)]$ يكون عادة سالبا ، اما ميل دالة العرض $[S'(p)]$ فيكون موجبا في حالة غياب الوفورات الاقتصادية وسوف نفترض ان $S'(p)$ يكون دائما موجبا الا اذا نصينا على خلاف ذلك .

تخيل ان البائعين والمشتريين وصلوا الى السوق بدون معرفة مسبقة من ماذا سوف يكون عليه السعر الراهن . وبما ان السلعة تكون متجانسة ، فانه يجب ان يسود السوق سعر واحد ، وسوف تساوى الكمية المطلوبة الكمية المعروضة عند سعر التوازن :

$$D(p) - S(p) = 0 \quad (٨-٦)$$

فاذا لم تتساوى $[D(p)]$ مع $[S(p)]$ عند $(p = p_e)$ فان رغبات البائعين والمشتريين تكون غير متطابقة : اما ان المشتريين يريدون شرا أكثر مما يعرضه البائعون او ان البائعون يعرضون أكثر مما يرغب فيه المشترون ونضمن لنا المساواة في المعادلة (٨-٦) ان رغبة البائعين والمشتريين لابد وان تكون متطابقة .

افترض ان الانتاج يكون فوريا وان المنتجين يصلون الى السوق بدون اى ناتج فعلى ثم يحاول المشترون والبائعون في الدخول في عقود مع بعضهم البعض فعندما يصل بائع ومشتري الى توقيع العقد بهنما فانه يحق لكليهما ان يتعاقد مع شخص اخر اعطاء عرضا لتقليل من العرض الاول افترض ان بعض المستهلكين يقوم باعطاء عرض اولى ويقدم السعر p^0 من الريالات للسلعة المعروضة ثم يقوم المروج auctioneer بتسجيل هذا السعر واعلانه في السوق وعلى هذا الاساس يحاول البائعون والمشترون الدخول في عقود حسب السعر المعلن p^0 فاذا كان p^0 أقل من سعر التوازن p_e فان المستهلكين الذين يرغبون في الشرا بهذا السعر سوف يجدون ان الكمية المعروضة غير كافية لتعقيق رغباتهم . فبعض المستهلكين الذين لم يستطيعوا تحقيق رغباتهم سوف يبيسون واستعدادهم لرفع مروضهم على امل اغراء البائعين بالتعاقد معهم وهم المتعاقد مع

الآخرين . وحالما يقوم المخرج بتسجيل هذا السعر الاطلى $p^{(1)}$ ويعلنه فى السوق ، فان البائعين سوف يتفقدون مقدورهم القديم على السعر القديم ويقرمون بالتعاقد حسب السعر الجديد العالى . . وطما كانت الاسعار عالية كلما كانت الكميات المطلوبة اقل ، لان المستهلكين الذين هم على الحدود قادروا السوق بقوة السعر العالى الجديد ، واصبح كل مستهلك باقى فى السوق يطلب كمية اقل . ولكن فى نفس الوقت تكون الكمية المعروضة من قبل البائعين اكبر . وتستند عليه التعاقد واعادة التعاقد مادام السعر المعلن بالمخرج اقل من سعر التوازن اى انه ما دامت الكمية المطلوبة تفوق الكمية المعروضة . . فعندما يصل السوق الى سعر التوازن لا يكون عند البائع او المشتري اى رغبة فى اعادة التعاقد وعندما يتوقف اعادة التعاقد ، ويبدأ اصحاب الوحدات الانتاجية فى الانتاج وتوصيله الى اصحابه الذين تعاقدوهم وبهذا تتم عملية التبادل . اما اذا حدث وان كان السعر البدائى p^0 كبير من p_e فان بعض المنتجين سوف لا يقدر ان يبيع الكمية المطلوبة بالنسبة له عند هذا السعر لانهم سوف لا يجدوا مستهلكين للتعاقد معهم ومن اجل تحاشي مثل هذه الامور ، فان البائعين الذين لم يجدوا مشترين بهذا السعر البدائى سوف يضرون الى تخفيض السعر . وعندما يجد المشترين ، الذين تعاقدوا على السعر العالى القديم ، انه من الافضل لهم التعاقد بالسعر الجديد المنخفض ، وتستمر عليه اعادة التعاقد حتى يتم الوصول الى سعر التوازن p_e فعندما تتحقق رغبات البائعين والمشتريين ولا يستفيد احد من اعادة التعاقد .

ان خليط الكمية والسعر عند التوازن يجب ان يحققا دالتى العرض والطلب لان رغبان المستهلك والبائع قد تحققت عند هذا الخليط من الكمية والسعر . ويمكن الحصول على سعر التوازن بحل شرط التوازن فى المعادلة (٦-٨) للسعر p ونحصل على كمية التوازن بتعويض سعر التوازن فى دالة الطلب . وبما ان خليط السعر والكمية فى حالة التوازن تحقق منحنى العرض وكذلك منحنى الطلب ، فالمعطية السابقة تكون عطائفة لعملية ايجاد احداثيات نقطة تقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض .

مثال : افترض ان منحنى الطلب والعرض يكونا على النحو التالى :

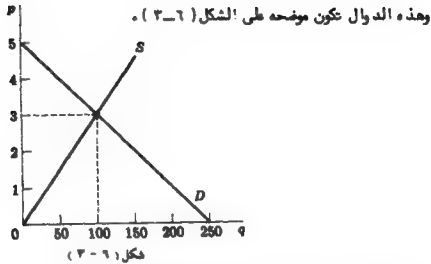
$$D = -50p + 250 \quad S = \frac{1}{2}p$$

وبوضع $D - S = 0$ نحصل على :

$$-50p + 250 - \frac{1}{2}p = 0$$

وطيه نحصل على :

$$p = 3 \quad D = S = 100$$



Long-Run Equilibrium : التوازن على المدى الطويل

إذا كان حجم الوحدة الانتاجية متغيراً فإن توازن الوحدات الانتاجية الموجودة في السوق يكون عند نقطة تقاطع منحنى العرض للمدى الطويل مع منحنى الطلب المقابل . وسوف تضم منحنيات العرض والتكلفة للمدى الطويل الربح العادي "normal profit," أي أن الربح الأدنى للوحدة الضروري من أجل بقائها في السوق وهو الربح الذي يحمله عليه صاحب الوحدة مقابل خدماته كمدبر للوحدة ، ولعملية التنظيم ولتغطيه الصاخر ٠٠ الى ٠٠ فإذا حدث وأن كان تقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض للمدى الطويل عند نقطة السعر الذي نتحصل عنده لوحدة الانتاجية على ربح يفوق الربح العادي فإن من الممكن دخول وحدات انتاجية أخرى فافتراض حرية الدخول يضمن للوحدات التي تريد الدخول أنها تدخل لتصبح ضمن الوحدة الانتاجية الصناعات بحيث أنها تنتج نفس الانتاج المتجانس ، ويكون عندها المعلومات المتاحة مثلما عند الوحدات القديمة السابقة لها . وسوف تضيف الوحدات الجديدة انتاجها الى الانتاج الموجود في السوق (وهذا بالطبع سوف يزيد من الكمية المعروضة في السوق) ، وكنتيجه لهذا فإن منحنى العرض للمدى الطويل سوف يتزحزح (ينتقل) الى اليمين . وسوف يدخل السوق منتجين جدد ماداموا قادرين على تحقيق ارباح موجبه ، ويواصل المنحنى تنقله الى اليمين حتى يحدد تقاطعه مع منحنى الطلب السعر الذي لا يكسب عند الداخلين الجدد أي ربح (الربح = صفر) .

ويمكن ، باستخدام نقاش معاكس للنقاش السابق ، تحليل الحالة التي يتحصل فيها للوحدات الانتاجية على خسائر بدل الارباح . فبعض الوحدات سوف تتسحب من المجموع وسوف ينخفض مجمل العرض ، وعليه فإن منحنى العرض سوف يتزحزح الى اليسار . وسوف

عوامل الوحدات انسحابها حتى يحدد تقاطع منحني الطلب على منحني العرض السعر الذي تكون منه العناصر صفر للوحدة التي تكون تكلفه انتاجها اقل التكاليف بالنسبة للوحدات الاخرى .

الطلب لابد وان يساوي العرض ، وان لابد وان تكون الارباح المحتملة للوحدات الجديدة الداخلة صفر للتوازن على المدى الطويل وان بالة العرض للوحدة i هي $S_i = S_i(p)$ فاذا افترضنا انه يوجد العدد n من الوحدات في الوحدة الانتاجية الصناعية وان جميع هذه الوحدات متكافئة من حيث دوال التكلفة فان دالة العرض الاجمالي تكون :

$$S(p) = nS_i(p) \quad (٩-٦)$$

وكما كان من قبل ، فان دالة الطلب الاجمالي تكون :

$$D = D(p) \quad (١٠-٦)$$

وبالاضافة لتساوي الطلب والعرض ، فان التوازن على المدى الطويل يتطلب ان يكون الربح لكل وحدة يساوي صفر :

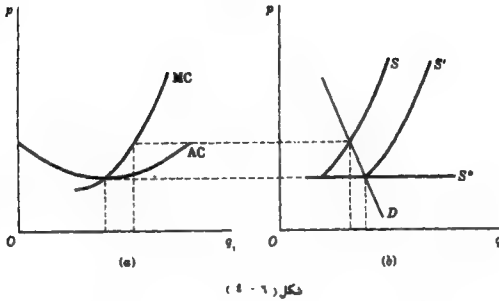
$$\pi_i = pS_i - \Phi(S_i) = 0 \quad (١١-٦)$$

بحيث ان $\Phi(S_i)$ هي التكلفة الاجمالية على المدى الطويل للوحدة i للناـتـجـ AC: $p = \Phi(S_i)/S_i$ وتطلب المعادلة (١١-٦) مساواة السعر $q_i = S_i = S/n$ ويمكن حل المعادلات من (٨-٦) الى (١١-٦) للمتغيرات (D, S, p, n) ونقرر ، على المدى الطويل ، قوى المنافسة الكاملة ليس فقط السعر والكمية ، ولكن ايضا عدد الوحدات الانتاجية ضمن الوحدة الصناعية .

وتوضح المناقشة في الشكل (٩-٦) بحيث ان الجانب الايسر من الشكل يبين منحنيات التكلفة لوحدة انتاجية نموذجية (او مثاليه) بينما يوضح الجانب الايمن من الشكل منحنيات الطلب والعرض في السوق مع تصغير في القياس الافقي .

ويكون التوازن النهائي من وجهة نظر الوحدة الصناعية عند تقاطع منحني الطلب والعرض بحيث ان الارباح تكون مساوية لصفر . اما من وجهة نظر صاحب الوحدة الانتاجية فانه يحصل على التوازن عندما يكون السعر مساويا لـ MC و AC وسوف نتوصل على الحالة المثلى ونضعها اذا كانت $p = MC$. واذا كانت الارباح تساوي صفر عند $p = AC$ وتحمل كل وحدة انتاجية عند النقطة الادنى لمنحني AC الخاص بها عند التوازن على المدى الطويل ، لان $MC = AC$ عند النقطة الادنى لمنحني AC .

ولقد عرفنا منحني الطلب على المدى الطويل S لتضمن جميع العروض المقدمة من



الوحدات الانتاجية الموجودة ، بالفعل في السوق وليست العروض للمنتجين المحتمل وجودهم في السوق . ويوضح منحنى الطلب S في الشكل (١-٦ ب) الحالات التي تدر فيها الوحدات ارباحا موجبه وعلى هذا فان الوحدات الجديدة سوف تدخل السوق، ثم يتزحزح منحنى العرض الى S' فلو ان منحنى الطلب هرف على ان يتضمن المعروضات الفعلية والمحتملة (كما هو الحال في S^*) فان تقاطع منحنى الطلب والعرض سوف يقرر التوازن النهائي بدون اى تزحزح ونتحصل على المنحنى S لعدد معين n في المعادله (٩-٦) ونتحصل على S^* من المعادله (١١-٦) بوضع p تساوى ادىنى (اقل) AC وسوف يكون منحنى العرض الاتقى (S^*) والخاص بالوحدة الصناعية ككل على المدى الطويل هو ايضا منحنى AC للوحده الصناعيه على المدى الطويل ويكون ايضا هو منحنى MC للوحده الصناعيه على المدى الطويل في الوقت الحاضر . ولقد وضعنا في الجزء (١-٥) ان دوال الانتاج المتجانسه من الدرجة الاولى $AC = MC$ ثابتة لاسعار عناصر انتاج ثابتة وتولد ، ايضا مستويات ارباح تساوى صفر باستخدام نظريه اويلر اذا دفع للد داخل قيم منتجاتهم الحديه . وهذه الشروط تكون هي نفسها الشروط للوحده الصناعيه ككل في مثل الحاله الموضحه في الشكل (١-٦) . ولهذا فانه غالباً ما يفترض ان الوحده الصناعيه يكون لها دالة انتاج على المدى الطويل متجانسه من الدرجة الاولى بالرغم من ان الوحدات داخل الوحده الصناعيه ليس لها هذه الميزه .

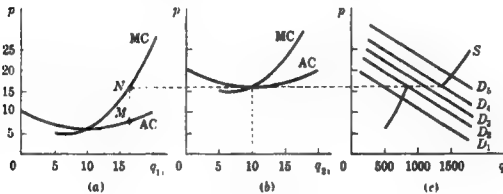
لا تكون دائما منحنيات العرض للمدى الطويل بالشكل الاتقى . وسوف يكون منحنى العرض دائماً لا على اذا لم يكن للوحدات نفس التكلفة ولا يوجد وفورات اقتصاديه تلقى

بعضها البعض • ويمكن ان تولد الوفورات الاقتصادية (او زيادة النفقات منحنيات عرض على المدى الطويل مائله الى الاسفل) او الى الاعلى) وذلك فى حالة تكافؤ دالة التكلفة لجميع الوحدات •

شروط التكلفة التفاضلية والايجار : Differential Cost Conditions and Rent

ان افتراض التماثل يكون مفيدا لاغراض العرض ولكنه ليس ضروريا للحصول على التوازن فقد تختار الوحدات الطريقة الفنية التى تعمل بها وقد يختلف اصحاب الوحدات نفسى طريقة ادارتها وتنظيمها كل حسب قدرته التنظيميه ، وقد يبنى اصحاب الوحدات احكاما مختلفه نتيجته لتوقعات الاسعار المتفرقه • وقد يمتلك البعض بعض عناصر الانتاج النادره (مثل الاراضى الخصبه) التى قد لا يمتلكها البعض الاخر ، فتحتاى من الشروط السابقة لا تكون دوال التكلفة متساويه لجميع الوحدات •

افترض انه يوجد نوعين محددين من الوحدات الانتاجيه وان منحنياتها MC و AC للمدى الطويل تكون ممثله فى الجزئين (١) و (ب) فى الشكل (٦ - ٥) اما الجزء ج فانه يوضح منحنى العرض للوحده الصناعيه وخمسه منحنيات طلب افتراضيه •



شكل (٦ - ٥)

لقد بنى منحنى العرض على الافتراض بانه يوجد خمسين وحده انتاجيه من كسل صنف ولنفتقر انه لا يمكن زيادة عدد الوحدات الموجوده من كل صنف فعلا ، ان عدد المنتجين بتكلفه واطليه (الصنف ١) قد يعطى بدون تغيير (بكميه بعض عناصر الانتاج النادره مثل الاراضى الخصبه • ولا تستطيع وحدات جديده من الدخول ضمن الصف (١) حتى ولو كانت الوحدات فى هذا الصف تنكسب ارباحا موجب •

اعتبر منحنى الطلب D_4 حيث ان كل وحده انتاجيه من نوع التكلفة الواطيه ، تنتج ما يعادل ١٦ وحده من المنتجات ، وان كل وحده انتاجيه من الوحدات الاخرى تنتج

ما يعادل ١٠ وحدات وتعمل الوحدات الاخيره عند النقطه الادنى لمنحنيات AC الخاصه بهم وتكسب ارباحا عاديه . اما وحدات التكلفة الواطيه فانها تبيع ما يعادل NM وحده ربح زياده عن الربح العادى . فاذا تزحزح منحنى الطلب الى D_2 فوق جميع وحدات التكلفة العاليه (المصف II) سوف تترك الوحدة الصناعيه ، ولكن وحدات التكلفة الواطيه لا تزال تكسب نفس الارباح الموجهه حتى ولو تزحزح منحنى الطلب الى D_1 اما بالنسبه للمنحنى D_2 فان بعض ، وليس جميع الوحدات ذات التكلفة العاليه سوف تترك الوحدة الصناعيه والباقيات سوف يكسبن ارباحا عاديه . اما اذا كان منحنى الطلب هو D_2 فان جميع الوحدات سوف يربحن اطن من الربح العادى وعلى هذا فان صفنا ثالثا (غير موضح على الشكل) سوف يجد انه من العرج لهم ان يدخلوا فى السوق . وسوف تستمر وحدات التكلفة الواطيه فى كسب ارباحا وتكون فى الموضع الاكثر فائده .

مثال : افترض ان دالتى التكلفة الاجماليه لوحدين نموز جيتين من الصنفين السابقين هما :

$$C_{11} = 0.04q_{11}^2 - 0.8q_{11} + 10q_{11} \quad C_{21} = 0.04q_{21}^2 - 0.8q_{21} + 20q_{21}$$

وتكون دالتى التكلفة الحديه وتكلفة المعدل المتقابلتين هما :

$$\begin{aligned} MC_{11} &= 0.12q_{11} - 1.6q_{11} + 10 & MC_{21} &= 0.12q_{21} - 1.6q_{21} + 20 \\ AC_{11} &= 0.04q_{11} - 0.8q_{11} + 10 & AC_{21} &= 0.04q_{21} - 0.8q_{21} + 20 \end{aligned}$$

وتكون النقاط الادنى لمنحنيات تكلفة المعدل النموذجيه $q_{11} = 10, p = 6$ وعند $q_{21} = 10, p = 16$ ونحصل على منحنى العرض لوحدة ذات التكلفة الواطيه بوضع $MC_{11} = p$:

$$p = 0.12q_{11} - 1.6q_{11} + 10$$

وبحل هذه المعادله التربيعيه لقيم q_{11} :

$$q_{11} = \frac{1.6 \pm \sqrt{2.56 - 0.48(10 - p)}}{0.24}$$

ويجب عدم الالتفات الى علامه السالب امام الجذر التربيعى لانها تعادل حالة الوحدة الانتاجيه التى لا يتحقق لها شرط الدرجة الثانيه للحصول على الحد الاعلى نبوضع S_{11} بدل q_{11} نحصل على منحنى العرض الاضى :

$$S_{11} = 0 \quad \text{اذا كانت } p < 6$$

$$S_{11} = \frac{1.6 + \sqrt{2.56 - 0.48(10 - p)}}{0.24} \quad \text{اذا كانت } p \geq 6$$

وطى نفس الطريقة ونفس الاسباب ، يكون منحنى العرض لوحدة نموذجيه من وحدات التكلفة العاليه على النحو التالى :

$$S_H = 0 \quad \text{اذا كانت} \quad p < 16$$

$$S_H = \frac{1.6 + \sqrt{2.56 - 0.48(20 - p)}}{0.24} \quad \text{اذا كانت} \quad p \geq 16$$

وبالمحافظة على افتراض وجود خمسين وحده فى كل صف من الصفين السابقين فان دالة العرض الاجمالى يمكن وصفها بمجموعة المعادلات التالية :

$$S = 0 \quad \text{اذا كانت} \quad 0 \leq p < 6$$

$$S = 50 \frac{1.6 + \sqrt{2.56 - 0.48(10 - p)}}{0.24} \quad \text{اذا كانت} \quad 6 \leq p < 16$$

$$S = \frac{160}{0.24} + \frac{50}{0.24} [\sqrt{2.56 - 0.48(10 - p)} + \sqrt{2.56 - 0.48(20 - p)}] \quad \text{اذا كانت} \quad p \geq 16$$

افتراض ان منحنى الطلب فى الحاله الراهنه هو D ويكون مثلا بالمعادله التاليه :

$$D = -100p + 2050$$

وتعطى المعادله التاليه النقطه التى يتحدا الان من منحنى العرض (١) :

$$S = 50 \frac{1.6 + \sqrt{2.56 - 0.48(10 - p)}}{0.24}$$

وبوضع $D = S$ وحل المعادله لقيمتى p و S نحصل على $p = 13$ وكذلك $S = 750$ فاذا كانت $p = 13$ فان كل وحده انتاج ذات التكلفة الواطيه سوف تنتج 15 وحده بمعدل تكلفه تساوى سبعة ريالات وسوف لا تنتج وحدات التكلفة العاليه اى شئ وسوف تكون الكميه الاجماليه ، كما تقرر بحل ثلاثى العرض والطلب تساوى $750 = (15)(50)$ وحده وسوف تكسب كل وحده تكلفه واطيه ربحا يساوى 90 ريالا .

ونستطيع وحدات التكلفة الواطيه ان ينتج عند اوطى AC من الاخرين لانهم يمتلكون عناصر انتاج نادره (مثل الاراضى الخصبه) والتى لا تكون متوفره للاخرين ، فاذا تقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض عند نقطه بحيث ان بعض تشتت ارباحا اكثر من الارباح العاديه ، فان ارباحا كثيره سوف يتمتع بها الذين يمتلكون العناصر النادره وسوف يقوم بعض المنتجين (المحتطين) بعد مشاهدتهم وحدات التكلفة الواطيه يحصلون على ارباح عاليه ، باقتناع مالكي الاراضى بتاجيرها لهم بدلا من الوحدات المؤجره لها فى الوقت الحاضر ، وسوف يحاولوا تحقيق هذا بدفع ايجارات اعلى من اجل استخدام الارض . وسوف تقوم الوحدات المستأجره حاليا بزيادة اجورها للاراضى

(١) اذا لم يكن من الواضح اى قطع من منحنى العرض هي القطعه المبهمه فدع $D = S$ لكل قطع من القطع الثلاث لمنحنى العرض كلا على انفراد ثم حل لقيم الاسعار فنجد ان واحدا فقط من الاسعار الناتجه فى نفس المدى المناسب لقطع منحنى العرض المستخدمه ، فتكون هي القطعه المبهمه فى الحاله الراهنه .

حتى توافق العروض المقدمة من الوحدات الأخرى وتستمر عليه رفع الإيجارات من طريق المنافسة بين صفى الوحدات السابقة إلى النقطة بحيث أنه لا يكون هناك ميزة الربح المالى الناتج من استخدام الأرض. وبهذا يستطيع ملاك الأراضي من ابتزاز الارباح الزائدة من الارباح العادية من مستخدمي أراضيهم. وبهذا تكون هذه المجاميع المتميزة من مستخدمي الأراضي هي الإيجار *rent* الذى يدفعه صاحب الوحدة مقابل استخدامه هذا العنصر الانتاجى النادر. وقد يستتج البعض من انه ليس هناك ميزة يمكن الحصول عليها من كون المنتج أكثر كفاءة (بكونه منتجاً بتكلفة واطيه) بحيث ان ميزة فضل الربح قد محيت بالإيجار الإضافى الذى سوف يدفعه صاحب وحدة التكلفة الواطيه مقابل استخدام الأرض ففى المثال الحالى تكسب العناصر الانتاجيه النادره المستخدمه من قبل وحدات التكلفة الواطيه إيجاراً وقدره 90. رولا فإذا حدث وان كان صاحب الوحدة الانتاجيه هو مالك الأرض (العنصر النادر) فإنه ليس عليه أى دفعات اضافيه وان الإيجار سوف يعود اليه هو نفسه. وبهذا تعرف الإيجار *rent* بأنه ذلك الجزء من دخل الفرد او دخل الوحدة الانتاجيه الذى يكون زيادة على المقدار الأدنى الضرورى ليقا " الفرد او الوحدة الانتاجيه تعمل فى نفس وظيفتها او وظيفته. " سواء دفع هذا الإيجار لمالك العنصر النادر ام لا فهذا ليس المهم لان الانصباء الموزعه *Distributive shares* تكون معيروه بما تؤديه من وظيفته وليس بالشخص الذى تعود عليه.

٦ - ٥ تطبيق على الضرائب : AN APPLICATION TO TAXATION

ان تطبيق ضريبة البيع سوف تغير من مستوى الانتاج الامثل لصاحب الوحدة الانتاجيه لانها تزحف منحنيات العرض الفرديه وبهذا تزحف أيضاً منحنى العرض الاجمالى وهذا يغير خليط الكميه والسعر فى حالة التوازن. وتكون ضرائب البيع *Sales taxes* اما ضريبه نوعيه او ضريبه اضافيه قيمه *specific or ad valorem* وتسمى ضريبه النافيه على ان كل صاحب وحدة انتاجيه ان يدفع عدداً من الريالات على كل وحدة انتاج قام ببيعها. اما ضريبة اضافيه القيمه فانها تنص على ان يدفع صاحب الوحدة نسبة من سعر مبيعاته.

افترض ان ضريبة البيع هي ضريبه نوعيه بحيث انه يدفع t من الريالات لكل وحدة بيعت وعلى هذا تكون مجموع التكاليف بالنسبه لنموذج من اصحاب الوحدات هي :

$$C_i = \phi(q_i) + b_i + tq_i$$

ويتطلب شرط الدرجة الاولى للحصول على الحد الاعلى من الربح من هذا النموذج

$$MC = p \text{ ان } MC = p$$

$$\phi'(q_i) + t = p$$

$$(12-6)$$

$$\phi'(q_i) = p - t$$

وهذا يعنى ان صاحب الوحده سوف يساوى التكلفة الحديه لانتاجه زائداً ضريبه الوحده بالسعر . ويتطلب شرط الدرجة الثانيه ان يكون منحنى MC فى حالة صاعد . ونحصل على دالة العرض لصاحب الوحده بحل المعادله (12-6) القيم $q_i = S_i$ وبوضع $q_i = S_i$ لجميع الاسعار الاكبر من t ، او تساوى t ، او اصغر من ادنى AVC :

$$S_i = S_i(p - t)$$

ونحصل على دالة العرض الاجمالى لجميع دوال العرض الفرديه :

$$S = \sum_{i=1}^n S_i(p - t) = S(p - t)$$

وبهذا يكون اجمالى العرض بدالة السعر الصافى $(p - t)$ الذى تحمل عليه البائعون فاذا كان فى حالة عدم وجود ضريبه بيع ، اجمالى العرض هو S^0 من الوحدات بسعر p^0 من الريالات ، فان اصحاب الوحدات سوف يقدمون للعرض نفس الكمية S^0 بـضريبه بيع تساوى ريالاً واحداً اذا كان السعر الذى يدفعه المستهلك يساوى $p^0 + 1$ من الريالات . وهذا مكافئاً لتزحزح عمودى الى اعلى لمنحنى العرض بمقدار ريالاً واحداً وسوف يرفض اصحاب الوحدات بعرض كمية اقل عند كل سعر . نمن اجل تحديد خليط الكمية والسعر فى حالة التوازن ، فاننا نضع العرض يساوى الطلب :

$$D(p) - S(p - t) = 0 \quad \text{ونحل هذه المعادله لنتم } p$$

مثال : افترض وجود ضريبه زيادة قيمة بمعدل 100r فى المائد من سعر البيع وعلـم هذا تكون التكاليف الاجماليه هى :

$$C_i = \phi(q_i) + h + vpq_i$$

وبوضع MC زائداً ضريبه الوحده تساوى السعر :

$$\phi'(q_i) + vp = p$$

$$\phi'(q_i) = p(1 - v)$$

وعلى هذا يكون دالة العرض الفرديه هى :

$$S_i = S_i[p(1 - v)]$$

وتكون دالة العرض الاجماليه هى :

$$S = \sum_{i=1}^n S_i[p(1 - v)] = S[p(1 - v)]$$

وبهذا تكون العرض الاجمالى بدلالة السعر الصافى ، كما نؤدى ضريبة البيع الموجوده فى الدالة الى زحزحه منحنى العرض الى اعلى بحيث انها تكون متناسبه مع ارتفاع منحنى العرض الاصلى فوق محور الكمية وسوف يتقرر خليط الكمية والسعر فى حالة التوازن وللمرء

الثانية ، بوضع العرض مساويا للطلب .

افترض ان الوحدة الصناعية تكون مكونة من ١٠٠ بدوال تكلفه متطابقه

$$C_i = 0.1q_i^2 + q_i + 10$$

وبوضع MC مساويا للسعر ، وبالحل لقيم q_i ، وبوضع $q_i = S_i$

$$p < 1 \quad S_i = 0 \quad \text{اذا كانت}$$

$$p \geq 1 \quad S_i = 5p - 5 \quad \text{اذا كانت}$$

وتكون دالة العرض الاجمالي هي :

$$p < 1 \quad S = 0 \quad \text{اذا كانت}$$

$$p \geq 1 \quad S = 500p - 500 \quad \text{اذا كانت}$$

افترض ان دالة الطلب هي :

$$D = -400p + 4000$$

وبوضع العرض يساوى الطلب يكون خليط الكمية والسعر في حالة التوازن :

$$p = 5 \quad D = S = 2000$$

افترض الان ان ضريبه النوع بمقدار t من الريالات قد فرضت وان دالة التكلفة الاجماليه النموذجيه تصبح :

$$C_i = 0.1q_i^2 + (1+t)q_i + 10$$

وبوضع MC مساويا للسعر وبالحل لقيم $q_i = S_i$

$$p < 1+t \quad S_i = 0 \quad \text{اذا كانت}$$

$$p \geq 1+t \quad S_i = 5(p-t) - 5 \quad \text{اذا كانت}$$

وعلى هذا فتكون دالة العرض الاجمالي هي :

$$p < 1+t \quad S = 0 \quad \text{اذا كانت}$$

$$p \geq 1+t \quad S = 500(p-t) - 500 \quad \text{اذا كانت}$$

وبوضع العرض يساوى الطلب ثم الحل لقيم p :

$$p = 5 + \frac{1}{2}t$$

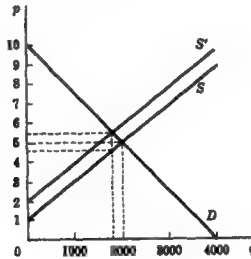
فاذا كان معدل الضريبه هو ٩٠ قرشا لكل وحده بيع ، فان خليط التوازن للكمية والسعر يكونان :

$$p = 5.50 \quad D = S = 1800$$

فتجد ان الاسعار ارتفعت والكمية المباعه نقصت ، وذلك نتيجة للضريبه ولكن ارغاع

السعر كان اقل من كمية الضريبه على الوحدة المباعه . وتمثل الخصمين قرشا ، وهى الزيادة في السعر ، وذلك الجزء من الضريبه التي قام بدفعها المستهلك عن طريق

شرائه للوحدات المباعة ١٠ اما الاربعين هلاله الباقية فانها تقع على عاتق صاحب الوحدة الانتاجية . ويمثل شكل (٦-٦) هذا المثال . فمعنى العرض هو S قبل الضريبة و S' هو منحني العرض بعد الضريبة وتمثل المسافة العمودية بين S و S' قيمه الضريبة وهي تسعون هلاله ونرى كيف ارتفع السعر المدفوع من خسة ربايات الى خسة ربايات ونصف وان السعر المقبوض من قبل صاحب الوحدة انخفض الى اربعة ربايات وستون هلاله ويمكن للقارئ التحقق من ان نسبة الضريبة التي دفعها المستهلك تكبر كلما كان ميل منحني الطلب والعرض صغيرا ونفسى حالة ثبات بقية المتغيرات ، فان السعر يتغير طرديا مع معدل الضريبة وتتغير الكمية عكسيا مع معدل الضريبة (١) .



شكل (٦ - ٦)

٦ - ٦ توازن سوق عناصر الإنتاج ; FACTOR-MARKET EQUILIBRIUM

لقد تركز النقاش في الاجزاء السابقة على اسواق السلع التنافسية الكاملة ويمكن الوصول الى نتائج مماثلة بالنسبة لاسواق الداخلة inputs والتي تمثل عناصر الانتاج الغير منتجة nonproduced factors of production تكون سوق العناصر الانتاجية تنافسية كاملا اذا كان :

- (١) العنصر متجانسا وكان المشترون المختطفون غير معينين من وجهة نظر البائع .
- (٢) البائعون والمشترون متعددين .

(١) ويمكن للتكاليف السابقة ان توضع نتائج التعويضات subsidies بمعالجة التعويض على انه ضريبة سالبة .

- (٣) البائع والمشتري يمتلكون معلومات كاملة .
- (٤) البائعون والمشترون في حرية تامه للدخول والخروج من السوق على المدى الطويل
- ففى حالة السلع ، فان المستهلك يقوم بشراء السلعة لانه يتحمل على منفعة منها اما عناصر الانتاج فان المشتري يقوم بشراؤها من اجل الاضافه التى تصنعها لعملية الانتاج . اما فى حالة المستهلك ، فان منحنيات الطلب للمنتجات النهائية فانها تشتق من دوال المنفعة للمستهلك على افتراض الحصول على الحد الاعلى من المنفعة . وفى حالة عناصر الانتاج ، فان منحنيات الطلب تشتق من دوال الانتاج بافتراض الحصول على اعلى حد من الربح .

Demand Functions

دوال الطلب :

ان عناصر الانتاج العلى، بالنسبه لمالك الوحدة الانتاجيه الذى يتصرف بحكمة وقل ، تحقق الشرط الذى ينص على ان سعر كل عنصر من عناصر الانتاج يساوى قيمة MP الخاصه به . ولقد قمنا بحل شروط الدرجة الاولى لعملية الحصول على الحد الاعلى من الربح فى الجز (٣-٤) للحصول على طلبات العناصر بالنسبه للوحدة الانتاجيه بدلالة اسعار هذه العناصر وبدلالة سعر الناتج ايضا . ففى حالة الناتج الواحد باستخدام متغيرين من عناصر الانتاج :

$$D_{11} = D_{11}(r_1, r_2, p)$$

$$D_{12} = D_{12}(r_1, r_2, p)$$

حيث ان D_i تكون طلب الوحدة الانتاجيه i للعنصر j وبافتراض ان جميع الاسعار الاخرى ثابتة ، ونحذف ارقام العناصر السفلى ، تكون دالة الطلب للوحدة الانتاجيه i لعنصر معين هي :

$$D_i = D_i(r)$$

حيث ان r يمثل سعر العنصر الانتاجى . ونحصل على دالة الطلب الاجمالى بجمع دوال الطلب الفردية . فاذا وجد m من الوحدات الانتاجيه والتى تطلب العنصر فان :

$$D = \sum_{i=1}^m D_i(r) = D(r)$$

ولقد بينا فى الجز (٣-٤) ان منحنيات طلب العناصر الفردية تكون دائيا بميل سالب وعلى هذا فان منحنيات طلب العناصر الاجماليه تكون ايضا ، دائيا بميل سالب بمعنى ان :

$$\partial D / \partial r < 0$$

Supply Functions

دوال العرض :

ان عناصر الانتاج اما ان تكون عناصر اوليه **primary** او انها تكون عناصر منتجه **Produced** وتعرف العناصر المنتجه بانها ناتج لوحدات انتاجيه اخرى . وتكون دالة العرض لهذه العناصر هي دالة العرض الاجمالي للوحدات الانتاجيه التي تقوم بانتاج هذا العنصر . ولقد اشقت مثل هذه الدوال في الجز (٣-٤) . وسوف نقوم باستخدام طرق مختلفه لعوامل الانتاج الغير منتجه **nonproduced factors** مثل العمل والذي يفترض فيه دائما انه بملك المستهلك الذي يقوم ببيعه للمنتجين من اجل الحصول على الدخل الذي يشتري به السلع . ويفترضه في بعض الاحيان ، ان المستهلك سوف يقوم ببيع كل ما عنده من العمل بغض النظر عن سعر السوق الراهن . ففي مثل هذه الحاله تكون دالة العرض لهذا العنصر خطا مستقيما صعوديا باحداثيات افقيه (احدثاى السيني) تساوى مخزون اجمالى ما عنده من العمل . وتمثل حاله بعض المستهلكين الذين يحصلون على منعة (او منفعة) من التحفظ على بعض ما عندهم من العمل (او كله) حاله اكثر فائده من الحاله السابقه .

لقد افترضنا في حاله العمل في الجز (٤-٢) ان المنفعه تكون بدلاله وتالفراغ من العمل **leisure** والدخل **income**

$$U = g(T - W, y)$$

حيث ان T تكون اجمالى كمية الوقت المتاحة (وهى طول الفتره الزمنيه التي تكون دالة المنفعه معرفه من اجلها) . وان W تكون كمية العمل الذي قام به الفرد ممثلا بعدد الساعات التي اشتغلها الفرد . ولقد بينا ان الفرد الذي يحاول الحصول على الحد الاعلى من المنفعه يوزع وقته بين العمل ووقت الفراغ بحيث ان :

$$\frac{g_1}{g_2} = r \quad (١٣-٦)$$

حيث ان r تكون معدل الاجر وان g_1 تكون الاشتقاق الجزئى لدالة المنفعه بالنسبه لعاملها z وتعتمد g_2 على الدخل وكمية العمل الذي قام بها الفرد وبما ان $y = rW$ فان المعادله (١٣-٦) تحتوى فقط على المتغيران r و W وبحسب (١٣-٦) لقيم W ووضع $W = S_i$ نحصل على دالة عرض العمل **labor supply function** للفرد i :

$$S_i = S_i(r)$$

وتتبع دالة العرض على ان كمية العمل التي يرغب الفرد في القيام بها تكون بدلالة معدل الاجر ونحصل على دالة العرض الاجمالي بجمع دوال العرض الفرديه . فاذا وجد n من الافراد الراغبين في العمل بمعدل اجر معين ، فان دالة العرض الاجمالي تكون :

$$S = \sum_{i=1}^n S_i(r) = S(r)$$

وقد يكون منحني العرض بعيل سالب ، او موجب ، او كلاهما . فاذا كان هناك فردا يقيم وقت الفراغ بدرجة عالية وانه يركز على زيادة اوقات الفراغ اكثر من زيادة دخله فان منحني العرض بالنسبة للعمل قد يكون بعيل سالب بحيث انه كلما ازغى الاجر كلما قلت كمية العمل التي يقوم بها هذا الفرد .

Market Equilibrium

توازن السوق :

اذا اعطينا دالتي العرض والطلب لعناصر الانتاج ، فان خليط التوازن للسعر والكمية يقرر بتطبيق شرط التوازن $D = S$ وسوف تغير قوى السوق كل تلك التي نوقشت في الجز (٦-٤) الحاله الراهنه حالما يخطف السعر الواقعى من سعر التوازن وسوف نصل الى التوازن عندما العرض يساوى الطلب فقط . وكما فى اسواق المنتجات فان اى مشارك فى السوق لا يستطيع تحسين وضعه فى السوق باعادة التعاقد بعد الوصول الى حالة التوازن .

وبما ان خليط التوازن للسعر والكمية يجب ان يقع على كلا منحني الطلب والعرض فان هذا الخليط يجب ان يحقق شروط التوازن للمنتج والتي من خلالها اشتقت منحنيات الطلب . ويكون سعر التوازن دائما مساويا لقيمة MP الخاصه به اى ان قيمة الريال الحديه التي صرفت على العناصر الانتاجيه تكون هى نفسها منسب كل استخدام^(١) وهذه المساواه ضرورية جدا كشرط لمطابقة الحصول على الحد الاعلى من الربح وان كل صاحب وحدة انتاجية يستطيع الوصول الى النقطه العظمى فى السوق التنافسيه الكامله اذا تحققت شروط الدرجة الثانيه لحصوله على الحد الاعلى من الربح .

٦ - ٧ وجود ووحدانية التوازن :

THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF EQUILIBRIUM

وحتى هذه النقطه ، كانت تحاليل توازن السوق مبنيه على الافتراض بوجود توازن السعر والكميه فى سوق منفصله وانه ليس من الصعب تكوين بعض الاصله التي لا ينطبق عليها افتراض وجود هذا التوازن ، فمثلا لا يتساوى العرض والطلب عند اى خليط سعر

(١) وهذه الحاله لها نظير فى نظريات سلوك المستهلك تذكر ان $f_1 = \lambda p_1$ و $f_1 = \lambda p_1$ حيث ان f_1 وان f_1 هى المنفعة الحديه للنقود . وطبعه فان $f_1(1/\lambda) = p_1$ او ان سعر السلعه يجب ان يساوى منفعتها الحديه ضرورية فى الكمية الاضافيه من النقود التي كان من الواجب دفعها لكل وحدة منفعة اضافيه .

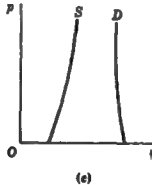
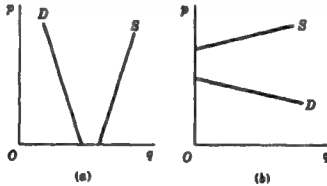
وكمية غير سالبة • وبالمثل ، فانه يمكن تكوين بعض الامثلة التى لا ينطبق عليها افتراض وحدانيه التوازن فمثلا : لا يتساوى العرض والطلب عند اكثر من خليط واحد من السعر . والكمية الغير سالبة • وسوف يكون هذا الجزء محددا على ملاحظات طامه ومناقشة بعض الحالات الخاصة • وسوف نعتبر مسائل وجود ووحدانيه التوازن باكثر صفا داخل نطاق تعدد الاسواق (او الاسواق المعده) فى الباب العاشر .

Existence

وجود التوازن :

سوف يكون توازن السوق التنافسيه موجود اذا كان هناك سعر واحد غير سالب او اكثر بحيث ان العرض والطلب يكونا متساويين عند هذا السعر ويكونا غير سالبين • وفى الوجبة البنديسيه والرسم ، فان التوازن سوف يكون موجودا اذا كانت لمنحنيات الطلب والعرض نقطه مشتركه واحده على الاقل فى الربح الغير سالب من الفضا •

وبمثل الشكل (٦-٧) ثلاثة حالات لا يكون لمنحنيات الطلب والعرض اى نقطه مشتركه فالعرض يفوق الطلب عند كل سعر غير سالب فى الحاله المرسومه فى الشكل (٦-٧) وطلبه فانه لا يوجد توازن حسب التعريف المعطى اعلاه •



شكل (٦-٧)

ويمكن توسيع تعريف التوازن ليشمل مثل هذه الحاله • افترض ان $p = 0$ اذا كانت

$D(0) > S(0)$ ونعرف " السلعة المجانية " *free good* بأنها السلعة ذات السعر صفر والتي تتأثر بهبوط العرض على الطلب ، فيستطيع المستهلك الحصول على كل ما يرغب من هذه السلعة مقابل لا شيء ويمكن اعتبار ان الماء والهوا " سلعتين مجانييتين " ولكن الماء قد يكون مجانيا لفترة معينة ، فعندما تبرد عليه تعفنه وتتقيه ونقل المياه ، فقد يصبح ضروريا وجود سعر عرض موجب *positive supply price* ويغطي الشكل (٧-٦ ب) الحالة التي يكون فيها سعر الطلب اقل من سعر العرض لكل ناتج غير سالب ، وتكون الكميات التي يرغب المستهلكون في دفعها غير كافية لتعويض المنتجين . وعلى هذا فان توازن السوق لا توجد تحت التمرينات المعطاه حتى الان . وللمرة الثانية ، فانه يمكن التوسع في تعريف التوازن ليغطي مثل هذه الحالات . وسوف يوجد توازن بانتاج يساوى صفرا اذا كان سعر العرض يفوق سعر الطلب لجميع المنتجات الغير سالبه . فمثلا يمكن من الناحية الفنية انتاج صنابير من الذهب خاصه لحمل غذا الاطفال ولكن لم يتم انتاج مثل هذه الصنابير لان الالباء والامهات غير مستعدين لدفع السعر الباهظ لمثل هذه الصنابير والتي سوف يطلبها منهم منتجي هذه الصنابير لتغطيه تكلفتهم .

فحالات السلعة المجانية وحالات انتاج لا شيء يكون لها مفدى في الاقتصاد وسوف نغطي مثل هذه الحالات بالطرق العامة التي سوف تناقش في الباب العاشر فاغلب الحالات الاخرى التي لا يوجد لها توازن انما هي نتيجة لمواصفات رهيفه للنميط الذي تشكلت به الحالة . فاذا واجهتنا مثل هذه الحالات ، فان الافتراضات القائمه عليها سلوك المستهلك والمنتج لابد من تغييرها من اجل الوصول الى اطار معقول لتحليله ، ويقدم لنا الشكل (٧-٦ د) مثالا لذلك ، ففي هذه الحالة يكون الطلب اكثر من العرض عند كل سعر ، ولا يوجد اى تفسير لتحليل مثل هذه الحالة .

Uniqueness

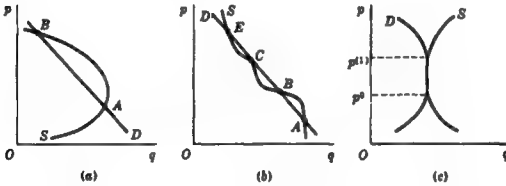
وحدانية التوازن :

ان من المحتمل ان يكون هناك اكثر من توازن واحد ، بمعنى ان العرض والطلب يكونا متساويين عند اكثر من نقطه سعر وكميه واحده غير سالبه . وتمثل نقطتي A و B في الشكل (٨-٦ ا) نقطتي توازن . ففي هذه الحالة يكون لمنحنى الطلب ماثلا الى اسفل بالشكل العادي ، ولكن منحنى العرض ينحني الى الخلف كلما زاد السعر فتكون الكمية مطله بدالة ذات قيمه مفرده بالنسبه للسعر لا يمثل دالة ذات قيمه مفرده بالنسبة للكمية .

ولقد وجد بعض الاقتصاديون ان منحنى العرض المنحني الى الخلف

"backward-bending" يكون موجودا في اسواق العمل لبعض الدوال التاميه ، ففى مثل هذه البلدان يكون لمنحنى العرض ميلا موجبا عند معدلات الاجور الواطيه نسبيا ، وان اى زيادة في معدل الاجور وسوف يزيد من عرض العمل ولكن كلما اخذ معدل الاجور في التزايد وبالتالي يزداد دخل العمال ، فانه سوف يتوصل الى نقطه ما يفغل عندها العمال وقت الفراغ على العمل وبالتالي على دخل اكثر .

افترض ان δ تمثل الفرق بين ميلين منحنى الطلب ومنحنى العرض بحيث ان $\delta = D'(p) - S'(p)$. فاذا كان لمنحنى الطلب ميلا سالبا في كل مكان وكان لميل منحنى العرض ميلا موجبا في كل مكان ، فان $\delta < 0$ لجميع الاسعار وانه لا يمكن ان يوجد اكثر من نقطه توازن واحدة فقط . فاذا كانت $\delta < 0$ عند سعر التوازن p^0 فان الطلب سوف يكون اقل من العرض عند سعر اكبر بقليل من p^0 وسوف يكون اكبر من العرض عند سعر اقل بقليل من p^0 . وما دامت $\delta < 0$ فان منحنى الطلب سيظل الى يسار منحنى العرض باسعار اعلى من p^0 وسيظل الى يمينه باسعار اقل من p^0 وعلى هذا فانه لا يمكن وجود نقطه توازن اخرى . وبمثل هذه المناقشه ، نستطيع ان نشبت انسه لا يمكن وجود اكثر من نقطه توازن واحدة اذا كانت $\delta > 0$ في كل مكان .



شكل (٦ - أ)

ففى الشكل (٦ - أ) تكون $\delta < 0$ لنقطه التوازن A وعند نقطه B يكون كلا المنحنيين يعيل سالبا ، ولكن منحنى الطلب اكثر حدة في الميل من منحنى العرض وتكون $\delta > 0$ عند النقطه B ^(١) ويظهر الشكل (٦ - ب) ربيعة نقطه توازن ويكون منحنى العرض يعيل سالبا في كل مكان ما كسا وجود وفورات اقتصاديه external economies وتكون قيم δ عند النقاط الاربعه كالتالى : سالبه عند A ، وموجبه عند B وصفر عند

(١) ان المشتقه $D'(p)$ والمشتقه $S'(p)$ يكونا بدلالة السعر فقط . وعلى هذا فان معنى ميل منحنى الطلب بحده الى الاسفل ان تكون $D'(p) > S'(p)$.

C ، وسالبه عند E ، وبإهمال نقط التوازن التي تكون عندها $\delta = 0$ نجد ان δ يجب ان تبدل اشارتها عند نقط التوازن المتجاورة. اما نقط التوازن التي تكون عندها $\delta = 0$ فانها قد تقع بين او على اى جانب للنقط مع تبدل في الاشارة وسوف يكون هناك نقاط توازن عدة عند $\delta = 0$ اذا عطاى منحى الطلب والعرض في جميع الاجزاء او في بعض الاجزاء ومثل هذه الحالة معروضة في الشكل (٦-٨ د) حيث ان كمية التوازن وحيدة، ولكن اى سعر من p^0 وحتى $p^{(1)}$ يمكن ان يكون سعر توازن.

٦ - ٨ استقرار (ثبات) التوازن : THE STABILITY OF EQUILIBRIUM

تقرر كمية وسعر التوازن بمساواة العرض والطلب ويتميز هذا التوازن بتسليم البائع والمشتري بالحالة الراهنة، اى انه لا يكون عند اى مشارك في السوق الرغبه نفس تغيير سلوكه. ولكن وجود نقطه توازن لا يضمن بقاؤها، لانه ليس هناك ضمان ان سعر التوازن سوف يتحقق اذا لم يكن السوق في توازن عند بداية التعاقد. وليس هناك ايضا ضمان ان السعر البدائي سوف يكون هو سعر التوازن. وعلى كل حال فان التغييرات في افضليات المستهلك سوف تزحزح، هامة منحى الطلب، والاختراعات الجديده سوف تزحزح منحى العرض، وكلا المنصرين (الافضليات والاخرعات) سيؤثران على حالة التوازن الراهنة، وسوف يكون هناك توازن جديد ولكن، ايضا ليس هناك اى ضمان لثبات هذا التوازن والمحافظة عليه.

وعامة يرمز الى الاضطراب او التشويش (او القلق) لحاله التوازن بانه الحاله التي يكون فيها السعر الفعلي *actual price* مختلفا من سعر التوازن. ويكون التوازن مستقرا *stable* اذا ادى الاضطراب او التشويش الى العوده الى حاله التوازن ويكون غير مستقر *unstable* اذا بعد التوازن الى ما كان عليه قبل الاضطراب^(١). ولقد افترض ضمنا في مناقشه التوازن في الجز ٦-٤ ان توازن السوق كان مستقرا.

العوازن الساكن : Static Stability

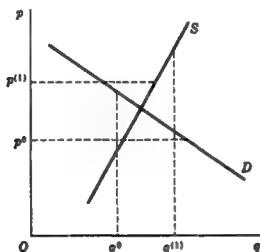
انه من الطبيعي ان يخلق اى اضطراب في السوق نوا من التعديل فعلا اذا

(١) لا يمثل هذا التعريف للتوازن المستقر تعريفا دقيقا انما هو واحد من عدة تعاريف بديله. انظر كتاب P. A. Samuelson تحت عنوان *Foundations of Economic Analysis* على الصفحات ٢٦٢ - ٢٦٠.

كان السعر الفعلي اقل من سعر التوازن ، فان عليه التعديل قد تتكون من بعض المشترين الذين سوف يرضون قيم عروضهم للسلعة . فالتحليل الساكنه تتجرد من مجرى الزمن لعملية التعديل وتعتبر فقط طبيعة التغير ، بمعنى ان هذا التعديل هل هو في اتجاه او هل هو بعيدا عن التوازن .

عرفنا : $E(p) = D(p) - S(p)$ على انه فائض الطلب excess demand عند السعر p نفى شكل (٩-٦) يكون فائض الطلب موجبا عند السعر p^0 وسالبا عند السعر $p^{(1)}$ ونشتق شروط الاستقرار من الافتراضات عن سلوك البائع والمشتري في السوق . ولقد اسس شرط فالراس للاستقرار *Walrasian stability condition* على افتراض ان المشتري يحيل لرفع عرضه اذا كان فائض الطلب موجبا وان البائع يحيل الى تخفيض اسعاره اذا كان فائض الطلب سالبا . فاذا كان هذا الافتراض السلوكي صحيحا ، فان السوق تكون مستقره اذا كان رفع السعر يقلل من فائض الطلب ^(١) بمعنى انه اذا كان :

$$\frac{dE(p)}{dp} = E'(p) = D'(p) - S'(p) < 0 \quad (١٤-٦)$$



شكل (٩-٦)

- (١) وبما داه كتابه دالتى الطلب والعرض في الشكل المعكوسه $p_s = S^{-1}(q)$ و $p_d = D^{-1}(q)$ وتعريف سعر فائض الطلب على انه : $F(q) = p_d - p_s = D^{-1}(q) - S^{-1}(q)$. وينص شرط مارشال للاستقرار *Marshallian stability condition* على ان المنتجين سوف يرضون من انتاجهم عندما تكون $F(q) > 0$ وسوف يخفضونه عندما تكون $F(q) < 0$ وعلى هذا فان التوازن يكون مستقرا من وجهة نظر مارشال اذا كان $dF(q)/dq = F'(q) = D^{-1}(q) - S^{-1}(q) < 0$ فاذا كان ميل منحنى الطلب سالبا وكان ميل منحنى العرض موجبا وان التوازن يكون مستقرا حسب وجهة نظرسر التصفين . فاذا كان لمنحنى العرض والطلب نفس الاشارة ، فان التوازن سوف يكون مستقرا حسب احد التعاريف وغير مستقر حسب التعريف الاخر .

وسوف يتحقق هذا الشرط بطريقة آليه اذا كان ميل منحنى الطلب سالبا وكان ميل منحنى العرض موجبا . فاذا كان كلاهما بميل موجب ، فان منحنى العرض يجب ان يكون اكثر انبساطا من منحنى الطلب $[S^{-1}(q) < D^{-1}(q)]$ ليحقق المعادلة (١٤-٦) . فاذا كان كلاهما سالبا ، فان منحنى العرض يجب ان يكون اكثر انحدارا من منحنى الطلب .

ان منحنى العرض يميله المصالب والمرسوم على الشكل (١٤-٦) يعطى نقط توازن ، فالنقاط الثلاث E, B, A تكون بالتبادل مستقره وغير مستقره حسب شرط فالراس للاستقرار في المعادلة (١٤-٦) . فمنحنى العرض اكثر انحدارا من منحنى الطلب عند A ويكون التوازن مستقرا عند هذه النقطه . اما عند نقطه B فان منحنى العرض يصبح اقل انحدارا من منحنى الطلب وبذلك تكون B غير مستقره وبفعل السبب تكون D مستقره . ولا يكون شرط الاستقرار في المعادلة (١٤-٦) شرط كفايه لتفطيع نقطه التوازن C . ان فائض الطلب يكون موجبا عند اسعار اقل من p_e وكذلك عند اسعار اعلى من p_e وسوف تعمل الاسعار الى الارتفاع للانحرافات للاعلى او للأسفل من التوازن . وتتصف نقطه C على انها شبه مستقره *semistable* .

الاستقرار الحركي : التعديل المتخلف .

Dynamic Stability: Lagged Adjustment

لقد نص على شرط الاستقرار الساكن في المعادلة (١٤-٦) باعتبار معدل التغير لفائض الطلب بالنسبه للسعر ، ولم نقل شيئا عن مجرى الوقت لعطية التعديل . وقد لا يتوقع شخص ما تعديلا لحظيا في الموديل الحالي . فاذا كان السعر البدائي لا يساوي سعر التوازن ، فانه سوف يتغير ، وتبدل عطية اعادة التعاقد . فاذا كان السعر الجديد لا يزال مختلفا عن سعر التوازن ، فانه سوف يتغير اجباريا . ومن الممكن وضع الطبعيه الحركيه لعطية اعادة التعاقد في موديل بحيث ان اعادة التعاقد تحصل خلال فترات زمنييه ثابتة ولكن ساعه زمنييه مثلا بحيث ان المخرج يقوم باعلان السعر الجديد في بدايه كل فتره زمنييه وسوف تستطلي تحليل الاستقرار الحركي مجرى السعر خلال الفتره الزمنييه . بمعنى ان الاستتسا سوف يكون من فتره لغيره اخرى ^(١) . ويكون التوازن مستقرا بالمعنى الحركي اذا اقترب السعر من سعر التوازن خلال الفتره الزمنييه ، ويكون غير مستقرا اذا كان التغير في السعر بعيدا عن سعر التوازن .

انه من الممكن وضع الافتراض الذي ينص على ان فائض الطلب الموجب يميل الى السقوط

(١) ان الاسعار التي تسجل من فتره لاخرى تكون اسعارا محتطه potential اكثر منها فعلية (او محققة) حتى تصل الى التوازن فما دام $D \neq S$ سوف لا ينفذ اي عقد وتستمر عطية اعادة التعاقد .

الاسعار ، في عدة صور ، منها الموديل الرياضى المستخدم بصفة عامة :

$$(15-6) \quad p_t - p_{t-1} = kE(p_{t-1})$$

حيث ان p_t تكون السعر فى الفترة الزمنية t وان k تكون ثابتا موجبا .
وتعتبر المعادلة (١٥-٦) من احد الانواع المحبطة لسلوك البائع والمشتري . افترض انه يوجد فائض طلب موجب $E(p_{t-1})$ فى الفترة الزمنية $(t-1)$ فان هذا يعبر عن الافتراض بان فائض الطلب $E(p_{t-1})$ يدفع البائع ليعرض السعر $p_t = p_{t-1} + kE(p_{t-1}) > p_{t-1}$ فى الفترة الزمنية اللاحقة . افترض ان دالة العرض والطلب تكونا :

$$(16-6) \quad D_t = ap_t + b$$

$$(17-6) \quad S_t = Ap_t + B$$

فيكون فائض الطلب فى الفترة $(t-1)$:

$$E(p_{t-1}) = (a-A)p_{t-1} + b-B$$

وبتمييز هذه المعادلة فى المعادلة (١٥-٦) :

$$p_t - p_{t-1} = k[(a-A)p_{t-1} + b-B]$$

$$(18-6) \quad p_t = [1 + k(a-A)]p_{t-1} + k(b-B)$$

وتصف المعادلة الفرقية من الدرجة الاولى first-order difference equation فى المعادلة (١٨-٦) المجرى الزمنى للسعر على اساس افتراض السلوك المضممن فى المعادلة (١٥-٦) فاذا اعطينا الشرط المبدئى $p = p_0$ عندما تكون $t = 0$ فان حلها يكون :

$$(19-6) \quad p_t = (p_0 - p_r)[1 + k(a-A)]^t + p_r$$

حيث ان $p_r = \frac{b-B}{A-a}$ هو سعر التوازن الذى تقرر من المعادله (١٧-٦) (١٦-٦) بوضع $D_t = S_t = 0$ ثم حل المساله لقيم $p_r = p_0$ فيكون التوازن مستقرا اذا كان مستوى السعر الفعلى يقترب من مستوى التوازن كلما ازدادت t وسوف يقترب مستوى السعر من p_r بدون تذبذب اذا كانت : $0 < 1 + k(a-A) < 1$ وسوف يتحقق الجانب الايمن من هذه اللائساويه اذا كان :

$$(20-6) \quad a < A$$

وسوف يتحقق الجانب الايسر اذا كان :

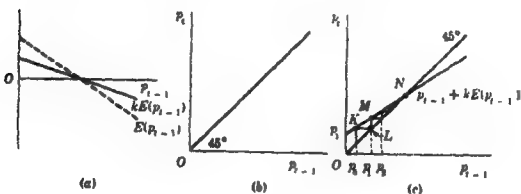
$$k < \frac{1}{A-a}$$

وسوف يتحقق الشرط فى المعادلة (٢٠-٦) بطريقة آليه اذا كان لمنحنى العرض ميلا موجبا ($A > 0$) وسوف يتحرك مستوى السعر الى اعلى مع الزمن اذا كان السعر المبدئى اقل من سعر التوازن وسوف يتحرك الى اسفل اذا كان السعر المبدئى اكبر من سعر التوازن . اما اذا كان ميل منحنى العرض سالبا ، فان الاستقرار يتطلب ان يكون ميل

منحنى الطلب (1/a) أكبر من الناحية الجبرية ، من ميل منحنى العرض (1/A) بمعنى أن منحنى العرض سوف يقطع منحنى الطلب من الأعلى . ويكون التوازن غير مستقر إذا كان منحنى العرض منحنى الطلب من أسفل وأن أي انحراف من التوازن سوف يتبعه انحرافات أكثر تبعده عن التوازن . فإذا كانت k كبيرة بما فيه الكفاية وكانت $a - A$ سالبة ، فإن : $1 + k(a - A)$ تكون أيضا سالبة ، وأن مستوى السعر سوف يتذبذب مع الزمن (١) .

إن كلا الاستقرارين الحركي والساكن يعتمدان على ميلين منحنى الطلب والعرض ولكن الاستقرار الحركي يعتمد أيضا على حجم التغير بقيمة ثابتة k والذي يؤثر الس الحد الذي يمكن للسوق أن يعدل الفروق بين الكميات المطلوبة والكميات المعروضة لكل وحدة زمنية وتدل قيمة كبيرة للتغير k على أن المشتري والبائع يميلان إلى تعديل أكثر من اللازم "overadjust" فإذا كان فائض الطلب موجبة فإن عملية العرض من قبل المشتري تكون حركية بدرجة كافية لرفع السعر أكثر من مستوى التوازن . وتكون كل تعديل في السعر الصحيح ولكنه مغالاة في حجمه . وعلى هذا فإن التحاليل الحركية تأخذ في الاعتبار قوة ردود الفعل للاضطرابات .

يمكن تحليل الاستقرار الحركي للتوازن عن طريق هندسه على النحو التالي فإذا رسمنا السعر على المحور الأفقي ، فإن الخط المنقطع على الشكل (١٠-٦) يمثل المنحنى العرضي . وبافتراض أن $k < 1$ فإن الخط الغير منقطع يمثل $kE(p_{t-1})$



شكل (٩-١٠)

(١) إذا كانت $1 + k(a - A) > 0$ (ولكنها أقل من صفر) فإن سعة الذبذبه سوف تتناقص مع الزمن ، ويقترب مجرى الزمن من مستوى التوازن إما إذا كانت أقل من -1 فإن السوق سوف يتعرض لتقلبات في زيادة الاسعار .

ويمثل خط ال 45 درجة في الشكل (١٠-٦ ب) المحل الهندسي للنقط المعرّضه بالمعادله $p_i = p_{i-1}$ ونتحمل على الدالة التالية :

$$p_i = p_{i-1} + kE(p_{i-1}) = f(p_{i-1})$$

بإضافة احداثيات الخطوط الغير مقطعه في الشكلين (١٠-٦ أ) و (١٠-٦ ب) وتكون النتيجة ظاهره في الشكل (١٠-٦ د) .

افترض ان السعر البدئي هو p_0 فيكون السعر في الفترة اللاحقه هو p_1 ويكون معطى باحداثيات النقطه على $f(p_{i-1})$ فوق p_0 راسا ومن اجل حساب السعر في الفترة اللاحقه فان p_1 سوف ينتقل (او يتحول) الى المحور الافقي برسم خط افقي من K الى L ونقع L على خط ال 45 وتكون الاحداثيات السينيه لكل نقطه عليه تساوي الاحداثيات الصاديه . ونوجد السعر p_2 بالتحرك عموديا الى M على $f(p_{i-1})$ ونجد بقيه الاسعار بنفس الطريقة . وفي الوضع الراهن ، يقترب مستوى السعر من سعر التوازن المعطى بمقاطع $f(p_{i-1})$ مع خط ال 45^(١) ويعتمد استقرار التوازن على ميل دالة الطلب الفائض وحجم k . فاذا كانت دالة الطلب الفائض في الشكل (١٠-٦ أ) بميل موجب فان الداله $f(p_{i-1})$ سوف تقطع خط ال 45 من اسفل ، وسوف يكون التوازن غير مستقر . اما اذا ميل دالة الطلب الفائض سالبا ، كما هو الحال في الشكل (١٠-٦ ب) ولكن k لم تكن كبيره بدرجة كافيه فان $f(p_{i-1})$ سوف يكون لها ميلا سالبا وسوف يتسذب مستوى السعر .

اما التقارب الحركي والسكن من الاستقرار عليتان مختلفتان اختلافا اساسيا فلا استقرار الساكن . لايعنى ضمنا الاستقرار الحركي بينما الاستقرار الحركي يعنى ضمنا الاستقرار الساكن . والسبب لهذا الاختلاف هو ان التحاليل الحركيه تكون اداة اكثر شعولا للبحث والتقصي في خواص التوازن بينما تهتم التحاليل الساكنه باتجاه عطيه التعديل وتهمل حجم عطيه التعديل من فتره الى فتره زمني اخرى .

مثال : اعتبر $D_i = -0.5p_i + 100$

$$S_i = -0.1p_i + 50$$

وافترض ان $k = 6$ فيكون التوازن مستقرا بالمعنى الفالراسي اذا كانت :

$$D'(p) - S'(p) < 0 \quad \text{وبالتعميم من دالتى العرض والطلب نجد ان :}$$

$$-0.5 - (-0.1) = -0.4 < 0.$$

(١) من السهوله تحقيق ان نقطه N تكون هي نقطه التوازن . فعند $N, p_i = p_{i-1}$ وسبب خط ال 45 وكذلك $p_i = p_{i-1} + kE(p_{i-1})$ ويتميز $p_i = p_{i-1}$ وهذا يعنى ان فائض الطلب يساوى صفرا عند نقطه N .

ويطلب الاستقرار الحركي أن تكون $1 < 1 + k(a - A) < 1$ - ويتعموض القيم المناسبة نحصل

$$1 + k(a - A) = -1.4 \quad \text{على :}$$

ونجد من هذا أن اللامتناهية المطلوبة (على الجانب الأيسر) لا تتحقق • وسوف يبين السوق ذبذبات متفجرة explosive oscillations •

الاستقرار الحركي : التعديل المتواصل :

Dynamic Stability: Continuous Adjustment

نصف المعادلة (١٥-٦) عملية تعديل السعر والتي تحدث خلال فترات زمنية منفصلة • ويعتمد البديل لهذه العملية على الافتراض بأن عملية التعديل تحدث بانتظام • وبالتالي فإن المعادلة (١٥-٦) تبدل بالمعادلة التالية :

$$\frac{dp}{dt} = kE(p) \quad (٢١-٦)$$

حيث أن k و $E(p)$ لهما نفس المعنى السابق ^(١) ويتعموض دالتى الطلب والعرض من المعادلتين (١٦-٦) و (١٧-٦) تصبح المعادلة (٢١-٦) كالتالى :

$$\frac{dp}{dt} = k(a - A)p + k(b - B) \quad (٢٢-٦)$$

وهى معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى first-order differential equation وحلها يكون (انظر الجزء ٤-٦) •

$$p = (p_0 - p_r)e^{k(a-A)t} + p_r$$

وحيث أن p_0 يكون السعر المبدئى عند $t = 0$ وأن $e = 2.71828 \dots$ تكون القاعدة لنظام اللوغاريتمات الطبيعية •

ويكون سعر التوازن p_r مستقرًا حركيًا، بمعنى أن $p \rightarrow p_r$ عند $t \rightarrow \infty$ إذا كان $(a - A) < 0$ والتي سوف تكون الحالة إذا كانت دالة الطلب بعامل سالب وكانت دالة العرض بعامل موجب • وسوف يؤثر حجم عامل عملية التعديل على سرعة التقارب والتباعد من التوازن ولكن وعلى عكس موديل التعديل المتخلف فإنها لا تأخذ أى دور فى تقرير ما إذا كان التوازن مستقرًا أم لا • وتكون شروط الاستقرار الساكن والحركى متطابقه فى هذه الحالة •

وتكون نقطة التوازن "مستقرة محلياً" locally stable إذا كان النظام يعود إليها إذا حدث وأن كان هناك انحراف بسيط من التوازن وتكون "مستقرة عالمياً" globally stable إذا كان النظام يعود إليها بعد أى انحراف مبدئى من التوازن • فالموديلات

(١) لقد مررنا قيمة p لجميع قيم t وأنه من المتعارف عليه أن نهدف t من اعتماد p على t قد يشار إليه بوضوح بكتابة $p(t)$ •

الخطية مثل تلك المعطاه بالمعادله (٢٢-٦) يكون لها نقاط توازن وحيدة (فريدة) عامة وإذا كانت هذه النقاط مستقره عالميا ايضا . اما الموديلات الغير خطية فقد يكون لها نقاط توازن وفي كل حاله فان الاستقرار المحلي للتوازن لاى نقطه لا يضمن استقرارها عالميا .

ويكون من المفيد جدا استخدام التقريب الخطي linear approximation للتعريف الاستقرار المحلي للموديلات الغير خطية . افترض ان دالة الطلب الفائض $E(p)$ تكون دالة مقعرة للسعر p بحيث ان المعادله التفاضليه (٢١-٦) صعبه او مستحيله الحل بالطريقه المباشرة . وتتبع المتساويه التقريبية :

$$\frac{E(p) - E(p_r)}{p - p_r} \approx E'(p_r) \quad (٢٣-٦)$$

حيث ان p_r هو سعر التوازن ، من تعريف الاشتقاق فى النهايه كلما $p \rightarrow p_r$ فسان المعادله (٢٣-٦) سوف تتحقق تماما وانه لبعض الانحرافات للسعر p من السعر p_r فان التقريب قد يكون جيدا وبتمويض $E(p_r) = 0$ وبحل المعادله (٢٣-٦) لتقيم $E(p)$ ثم بتمويض الناتج فى الجانب الايمن من المعادله (٢١-٦)

$$\frac{dp}{dt} = kE'(p_r)(p - p_r)$$

وتكون هذه المعادله معادله خطيه حيث ان $E'(p_r)$ وهى اشتقاق الطلب الفائض الذى قيمه عنده p_r تكون ثابتة ويكون جزر المعادله المعينه characteristic equation وهو حالنا فى حدود جوار p_r هو $kE'(p_r)$ وبهذا اذا كانت دالة فائض الطلب بميل سالب فى جوار p_r فان التوازن يكون مستقرا محليا وتكون شروط الاستقرار الحركى والساكن متطابقه .

وفى الغالب فان وجود الاستقرار العالمى يتحقق بتطبيق الطريقه الفنيه او التقييمه المعروفه بطريقه لياپونوف المباشرة *Liapunov's direct method* وتتضمن الطريقه فى التالى :

أولا : اوجد دالة لياپونوف $V(p)$ بحيث ان $V(p) > 0$ اذا كان $p \neq p_r$ وان $V(p_r) = 0$ فاذا كانت dV/dt سالبه اين ما كانت $p \neq p_r$ فان كل التوازنى يكون مستقرا عالميا (١) وتعطينا المعادله التالیه دالة لياپونوف التقريبية .

$$V(p) = (p - p_r)^2$$

وهى تمثل مربع مسافة النقطه الفعلية p عند الوقت t من نقطه التوازن :

(١) ان معظم البحوث تميز بين الاستقرار واستقرار محور الاقتراب asymptotic stability. راجع كتاب La Salle and S. Lefschetz بعنوان : *Liapunov's Direct Method of Stability* على الصفحات ٣٢-٣١ .

مثال : اعتبر دالة فائز الطلب الغير خطيه $E = b/p - a$ حيث ان $p_r = b/a$ وان $a, b > 0$:

$$\frac{dp}{dt} = k\left(\frac{b}{p} - a\right)$$

وبتفاضل $V(p)$:

$$\frac{dV}{dt} = 2(p - p_r) \frac{dp}{dt}$$

وبالتعويض لقيم p_r و dp/dt :

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2k(ap - b)^2}{ap}$$

والتي تكون سالبه لجميع $p \neq p_r$ حيث ان $a, p > 0$ و k ولى هذا فان التوازن لهذا المثال يكون مستقرا دائما .

٦ - ٩ التوازن الحركي مع التعديل المتخلف :

DYNAMIC EQUILIBRIUM WITH LAGGED ADJUSTMENT

تظهر دوال العرض للمتجين كيف يقوموا بتعديل أنتاجهم حسب السعر السارى فى السوق .

وبما ان الانتاج يحتاج لوقت فان عليه التعديل قد لا تكون فوريه ولكنها قد تكون ملموسه فى السوق بعد فتره من الزمن . وتعدنا السلع الزراعيه غالبا بامثله جيده للعرض المتخلف *lagged supply* فعاده يقوم المزارعون بعمل خطط الانتاج بعد عطيه الحصاد ويظهر الناتج المقابل لهذه المخططات الانتاجيه فى السوق بعد سنه . افترض ان دالتى الطلب والعرض هما :

$$(٢٤-٦) \quad D_t = ap_t + b$$

$$(٢٥-٦) \quad S_t = Ap_{t-1} + B$$

ويكون السوق فى توازن حركى اذا بقى السعر بدون تغيير من فتره لفره اخرى بمعنى ان $p_t = p_{t-1}$ وتعطينا المعادلتين (٢٤-٦) و (٢٥-٦) سعر التوازن الوحيد $p_r = (B - b)/(a - A)$ وتعتمد الكميه المطلوبه فى اى فتره زمنيه على السعر فى تلك الفتره ولكن الكميه المعروضه تعتمد على السعر فى الفتره السابقه . ويفترض عادة بان الكميه المعروضه فى الفتره t دائما تساوى الكميه المطلوبه فى نفس الفتره ، بمعنى ان p_t تتعدل بحيث ان $D_t = S_t$ حالما نعطىها S_t فى السوق وهذا يتطلب بان لا يترك اى منتج بمخزون غير مبيع وان لا يترك اى مستهلك بطلب غير متحقق . وبهذا فان :

$$D_t - S_t = 0$$

وبالتعويض من (٢٤-٦) و (٢٥-٦) :

$$ap_t + b - Ap_{t-1} - B = 0$$

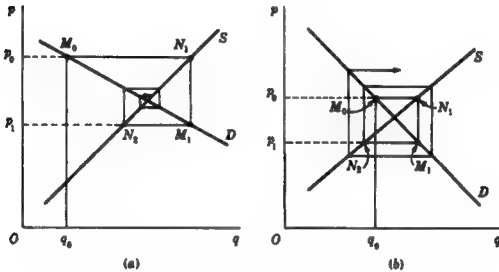
وبالحل لقيم p_t :

$$(٢٦-٦) \quad p_t = \frac{A}{a} p_{t-1} + \frac{B-b}{a}$$

افترض أن الشرط المبدئي يكون معطاه بالمعادله $p = p_0$ عندما تكون $t = 0$ فيكون حل المعادله الفرقية من الدرجة الاولى في (٢٦-٦) هو :

$$(٢٧-٦) \quad p_t = (p_0 - p_e) \left(\frac{A}{a} \right)^t + p_e$$

ويصف حل المعادله (٢٧-٦) مجرى السعر بدلالة الزمن . وبعض مجارى الزمن هذه يوضحه الشكلين (١١-٦ أ) و (١١-٦ ب) .



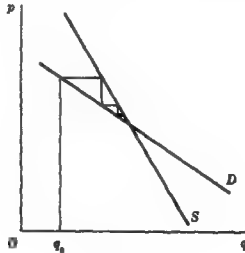
شكل (١١ - ٦)

افترض ان العرض المبدئي لا يساوى كمية التوازن نتيجة لاضطراب مثل القحط — drought اعتبار كمية العرض المبدئي تساوى q_0 في الشكل (١١-٦) فيكون السعر المقابل هو p_0 ويكون طلب المستهلك هو $p_0 M_0$ وهذه الكمية تساوى كمية العرض المبدئي وان السعر p_0 سوف يغرى اصحاب الوحدات الانتاجية لعرض الكمية $p_0 N_1$ في الفترة القادمة . ولكن السعر ينخفض فوراً الى p_1 وتصبح الكمية المطلوبة هي $p_1 M_1$ (والتي تساوى $p_0 N_1$ وهي الكمية المعروضة في تلك الفترة) وفى الفترة اللاحقه يكون السعر p_1 مغريا اصحاب الانتاج لانتاج $p_1 N_2$ وتستمر هذه المعطيه الى ما لانهايه ، كونه شكلا يشبه بيت المنكبوت cobweb pattern ولكن مستوى السعر سوف يتأرجح ولكنه سوف يقترب من مستوى التوازن كما هو موضح بتقاطع منحنى الطلب والعرض . وتعمل نفس القوسى فى الشكل (١١-٦ ب) ولكن تأرجح السعر فى هذه الحالة يميل الى الابتعاد عن مستوى التوازن ويصبح مقدار أكبر فأكبر . وهذا يتمرض السوق لذبذبات متعبره .

ويكون السوق مستقر حركيا إذا كانت $p_1 \rightarrow p_2$ كلما اقتربت $\infty \rightarrow t$ فإذا كانت القيمة المطلقة للمقدار (A/a) أقل من واحد فإن الحد الأول في الجانب الأيمن من المعادلة (٢٧-٦) سوف تختفى كلما $\infty \rightarrow t$ وسوف يكون السوق مستقرا حركيا . فإذا كان لميل منحنى الطلب $(1/a)$ ومنحنى العرض $(1/A)$ اشارتين مختلفتين ، فإن السعر سوف يتذبذب حول مستوى سعر التوازن وإذا كان لميل منحنى الطلب قيمه مطلقه أقل من ميل منحنى العرض $|1/a| < |1/A|$ فإن الذبذبه سوف تتخفى سعتها ، وسوف يكون السوق مستقرا حركيا كما هو واضح من الشكل (١١-٦) فإذا كان لميل منحنى الطلب قيمه مطلقه أكبر من القيمة المطلقة لميل منحنى العرض ، $|1/a| > |1/A|$ فإن الذبذبات سوف تزداد سعتها وسوف يكون السوق غير مستقرا كما هو واضح من الشكل (١١-٦ ب) .

وأخيرا إذا كان ميل منحنى الطلب والعرض متساويان بالنسبه للقيمة المطلقة $|1/a| = |1/A|$ فإن الذبذبات سوف تتساوى سعتها وتكون ثابتة ، ويكون السوق غير مستقرا حركيا

فإذا كان منحنى الطلب والعرض يعلمان في نفس الاتجاه A/a يكون موجبا يكون مستوى السعر لا يتذبذب ، ولكن إما أن يزداد أو يتناقص باستمرار^(١) ويتحقق نفس الشروط كما سبق : السعر سوف يقترب من قيمه التوازنه إذا كان لميل منحنى الطلب قيمه مطلقه أقل من القيمة المطلقة لميل منحنى العرض (الشكل ٢١-٦) وسوف يبتعد إما في اتجاه تصاعدي أو في اتجاه تنازلي إذا كان لمنحنى الطلب ميلا أكبر من ميل منحنى العرض .



شكل (١١-٦)

(١) وقد يبتنى السعر ثابتا إذا انطبق منحنى الطلب على منحنى العرض . وسوف لا يكون هناك توازن فريد في مثل هذه الحالة . انظر الجزء ٧-٦ .

ان شروط الاستقرار الحركي ليست هي نفسها في حالة الحركه البسيطه لان البائعين والمشتريين سوف يكون لهم رد فعل في حالة الحركه البسيطه ويكون فائض الطلب مساويا لصفر في حالات اشكال بيوت المنكيوت . فالمشتريين سوف يكون لهم رد ود فعل للعروض المعطاءه بالنسبه للاسعار القدهه لهم . اما البائعون فان رد ود فعلهم للعروض المعطاءه بالنسبه للاسعار القدهه بالكميات التي سوف يعرضونها في الفتره القادمه .

٦ - ١٠ سوق المستقبل : A FUTURES MARKET

لقد اقيمت اسواق المستقبل لبعض السلع التي يكون لها اسعار مستقبل غير مؤكده $uncertain future prices$ لان البائعين والمشتريين قد اغفوا على القيام بالاعمال التجاريه باسعار محدده في وقت ما في المستقبل . وعلى هذا فان سعر المستقبل لمثل هذه الصفقات التجاريه سوف يكون معروفا بالتاكيد .

ان اسواق المستقبل تكون شائعه ومعروفه للسلع الزراعيه . فالفلاح المتغاضى للخطر والذي يبيع للتسليم المستقبلي يستطيع تغاضى عدم تأكد السعر فالشخص الذي يشتري منتجات زراعيه بالتسليم في المستقبل يستطيع التعاقد لبيع هذا المنتج ، اذا اعطى تكلفه ثابتة للموارد الاولى . فالاشخاص الذين يشترون ويبيعون لهذه الاسباب يقال عنهم انهم راهنوا ضد عدم تأكد السعر اما الاخرين الذين ليس لديهم رغبه مباشره في مثل هذه السلع قد يقومون بالبيع والشرا في سوق المستقبل . فالمشتري (او البائع) قد يستطيع البيع (او الشرا) بسعر السوق الفعلي في المستقبل من اجل تغطيه قدهه . فمثل هذا الشخص سوف يشترك في سوق المستقبل اذا استطاع زياده منفعة المتوقعه ببيع او شرا تذكره اليانصيب القدهه في السوق .

فالتوقعات المختلفه بالنسبه لسعر المستقبل قد تؤدي الى صفقات في سوق المستقبل ونفترض هنا ان التوقعات تكون متساويه بمعنى ان كل شخص يتوقع ان يكون سعر المستقبل احد القيم الـ n التاليه (p_1, \dots, p_n) بالاحتمالات التاليه (v_1, \dots, v_n) فمن اجل تأكيد اهميه ان سوق المستقبل لا يتطلب اولئك المشتركون الذين يغفلون المخاطره ، لذلك نمطى مثالا بحيث ان جميع المشتركيين من البائعين ومشتريين يكونوا من النوع المتغاضى للخطر ، ولكن ليس بنفس النسبه ، وجميعهم يتقيدون بديهييات فون نيومان ومورستستين (انظر الجزء ٣-٨) .

Hedging

المراهن على جانبي الرهان لتفادي الخسارة

اعتبر ان الذي يقوم بانتاج السلعة المطلوبة في هذه الحالة هو الفلاح واعتبر ان دالة التكلفة الخاصة به تكون $C(q)$ بحيث انها تكون محدبة بانضباطاً. وان دالة المنفعة له هي $U(\pi)$ بحيث انها تكون مقعرة بانضباطاً. فان هذا الفلاح يبيع في سوق المستقبل بالسعر الجارى p^* فانه سوف يحصل على الحد الاعلى من المنفعة بمساواة هذا السعر p^* بتكلفته الحدية MC فان لم يبيع في سوق المستقبل ، فان شرط الدرجة الاولى للحصول على الحد الاعلى من المنفعة المتوقعة يكون (راجع المعادلة ٢١-٥)

$$(28-6) \quad \frac{dE[U(\pi)]}{dq} = \sum_{i=1}^I v_i U'(\pi_i) [p_i - C'(q)] = 0$$

افترض ان U_0 تكون قيمة المنفعة المثلى والمقرره بالمعادله (٢٨-٦) ، فيكون مستوى المنفعة للمشتريين في سوق المستقبل هي :

$$U^* = U[p^*q^* - C(q^*)] = V(p^*)$$

حيث ان q^* تكون حل المعادله $p^* = C'(q^*)$ ومن الواضح ان $dU^*/dp^* > 0$ افترض ان $p^* < p_0$ تكون حلاً للمعادله $U_0 = V(p^*)$ فان $p^* < p_0$ فان الفلاح سوف لا يبيع في سوق المستقبل اى انه يفضل السعر الغير مؤكد على السعر المؤكد المعطى له في سوق المستقبل اما اذا كان $p^* > p_0$ فانه سوف يبيع جميع انتاجه كما تقرر بدالة MC الخاصه به وهو اذاً يفضل السعر المؤكد المقدم له في سوق المستقبل .

مثال : د ع : $U = \ln(\pi + 10)$ ود ع $C = 0.5q^2$ حيث ان : $p_1 = 4, p_2 = 8$

وان $v_1 = v_2 = 0.5$ فيكون الحل التقريبي للمعادله (٢٨-٦) هو $q_0 = 5.246$

وان $U^0 \approx 3.245$ وانه كذلك : $V(p_0) = \ln(0.5p_0^2 + 10) = 3.245$

فهذه المعادله يكون لها الحل الاى $p_0 \approx 5.598$ وتكون دالة العرض لسوق المستقبل بالنسبه للفلاح ^(١) هي :

$$S = 0 \quad \text{اذا كانت} \quad p^* < 5.598$$

$$S = p^* \quad \text{اذا كانت} \quad p^* > 5.598$$

وسوف نترك تركيب دالة الطلب لسوق المستقبل بالنسبه لمن يقدمون العمليات توزيع المنتجات الزراعيه للتجار^٢ (انظر تمرين ١٣-٦)

(١) سوف يكون لكل دالة دالة عرض اجله لكل فلاح عدم اتصال حيث ان الناتج يتقزم من 5.246 الى 5.598 عند السعر p_0

الفراضى المخاطرة :

Risk Assumption

ان الشخص الذى لا يتكون لديه الرغبة فى سلعة ما قد يشتري ويبيع فى سوق المستقبل لهذه السلعة اذا استطاع زياده منفعة • وسوف يتجنب تسلّم او تسليم السلعة من خلال صفقات تعويضه تكون عند وقت معين فى المستقبل فاذا افترضنا ان منفعته تكون بدلالة مكانة ممتلكاته ، $U = U(A)$ بحيث ان مكانة ممتلكاته البدائيه هي $U_0 = U(A_0)$ وافترض ان D تمثل فائض طلبه فى سوق المستقبل بحيث ان $D > 0$ تعنى انه سوف يشتري للتسليم فى المستقبل بسعر p^* وان $D < 0$ تعنى انه بائع ، وتكون منفعته المتوقعة هي :

$$(٢٩-٦) \quad E[U(A)] = \sum_{i=1}^n v_i U[A_i + (p_i - p^*)D]$$

ويكون شرط الدرجة الاولى للحصول على الحد الاعلى للمنفعة المتوقعة هو :

$$(٣٠-٦) \quad \frac{dE[U(A)]}{dD} = \sum_{i=1}^n v_i U'(A_i)(p_i - p^*) = 0$$

ويمكن الحصول على دالة فائض الطلب للمشاركين فى السوق بحل المعادله (٣٠-٦) لقيم $D = D(p^*)$ ضع p^* لتكون حلا للمعادله $D(p^*) = 0$ فاذا كانت $p^* > p^*$ فـ ان المشارك سوف يبيع فى سوق المستقبل ، واذا كانت $p^* < p^*$ فانه سوف يشتري .

فعلى سبيل المثال ، اذا وضعنا $U(A) = \ln(A)$ فانه بالتعويض فى المعادله (٣٠-٦) نحصل على :

$$D = \frac{6 - p^*}{(8 - p^*)(p^* - 4)} A_0$$

ومن اجل القيم المعطاه $8 < p^* < 4$ فان المشتريات فى سوق المستقبل سوف تساوى نسبه معينه ثابتة من قيمة ممتلكات المشارك فى السوق • افترض ان هذه النسبه لا يمكن ان تزيد عن واحد ، والتي تحدث عند $p = 4.44$ افترض ، ايضا انه يوجد 10,000 مشترك مع كل واحد منهم $A_0 = 9056.25$ ويمطون المشترون فى سوق المستقبل ، وانه يوجد ، ايضا 1000 فلاح ويمطون البائعون وبساواة الطلب الاجالى بالعرض الاجالى :

$$\frac{(6 - p^*)}{(8 - p^*)(p^* - 4)} 90,562.5 = 1000 p^*$$

والتي يكون حلها هو :

$$q = 5750 \quad , \quad p^* = 5.75$$

SUMMARY

٦ - ١١ ملخص ما سبق :

- تحليل نظرية المنافسة الكاملة العوامل التي تقرر السعر والكمية في الأسواق التي يكون فيها :
- (١) الناتج متجانسا والمشترون متعددون .
 - (٢) البائعون والمشترون متعددون .
 - (٣) البائعون والمشترون يمتلكون معلومات كاملة .
 - (٤) حرية الدخول والخروج للبائع والمشتري على المدى الطويل . ويتصرف المشترون في السوق كما لو لم يكن لهم أي تأثير على السعر ويعتبر كل مشترك أن السعر متغيرا بقليلة ثابتة بالنسبة له .

إن السعر والكمية المتبادلة والمشتراة تتقرر بالعرض والطلب . ونحصل على دالة الطلب الاجمالي من دوال الطلب الفردي والتي بدورها يمكن الحصول عليها من شروط الدرجة الاولى للفرد للحصول على الحد الاعلى من المنفعة . ونحصل على دالة العرض الاجمالي من دوال العرض الفردي والتي استنتجت على شروط الدرجة الاولى للوحدات الانتاجية الفردي للحصول على الحد الاعلى من الربح . ونحصل على التوازن عندما الطلب يساوي العرض . ويضمن مساواة الطلب والعرض ان رغبات البائعين والمشتريين تكون موحدة وعلى نعط واحد . ولقد وسعنا تحليل السوق التنافسية الكاملة لتشمل فئات البيع .

وتشبه تحليل اسواق العناصر التنافسية الكاملة لتحليل اسواق السلع وقسرها الطلب والعرض خليط السعر والكمية في حالة التوازن وتضمن مساواة العرض والطلب عدم تعارض رغبات البائع والمشتري . ونحصل على دالة الطلب لعنصر ما من شروط الدرجة الاولى للوحدات الانتاجية الفردي للحصول على الحد الاعلى من الربح . ونحصل على دالة العرض للعنصر الاوليه مثل العمل من شروط الدرجة الاولى لكل عامل بفرد للحصول على الحد الاعلى من المنفعة . ويضمن التوازن في سوق العناصر ان سعر هذه العناصر يساوي قيمه انتاجه الحدي MR .

انه ليس من الضروري ان وجود دالتى العرض والطلب تتطلب تساويهما عند خليط او اكثر من السعر والكمية الغير سالبين . ولقد وسعنا مفهوم توازن السوق ليغطي حالتين بحيث ان العرض والطلب لا يتساويان . ولقد تميز توازن السلع المجانية بقاء المشتري على الطلب عند سعر يساوى صفر . وتتميز توازن انتاج لاشئ بزيادة سعر العرض على سعر الطلب لجميع المنتجات الغير سالبه . وانه من المحتمل وجود اكثر من خليط سعر وكمية في حالة التوازن في سوق ما . ولا يمكن وجود نقاط توازن عديده اذا كان الفرق بين ميلى

منحنى الطلب والعرض سالبه عند جميع الاسعار ، او اذا كان الفرق موجبا عند جميع الاسعار .

لا يضمن وجود نقطة التوازن الحصول عليها ويقاؤها . وتهتم تحاليل استقرار التوازن بنتائج الاضطرابات ويكون التوازن مستقرا اذا اتبع الاضطراب عودة الى نقطة التوازن ويكون التوازن غير مستقرا اذا لم يتبع الاضطراب عودة الى التوازن وتعتبر التحاليل الساكنة (الغير حركية) للتوازن فقط ، اتجاه عليه التعديل التي تتبع الاضطرابات بينما تعتبر التحاليل الحركية للتوازن التوالى الزمنى لعملية التعديل بالاضافة الى اتجاهها . ويعرض الموديل الحركي الخاص بعملية التعديل المختطف سوقا مستقرا حسب التحاليل الساكنة ولكن قد يكون غير مستقرا حركيا . ويشذى الموديل الحركي والتميز بعملية تعديل متواصله الموديل الساكن بوصف مجرى السعر خلال الفتره الزمنية التي تتبع الاضطرابات . وتحتوى التحاليل الساكنة والحركية على افتراضات بشأن سلوك المشترين والبائعين - وحسب افتراض شرط فالراس للاستقرار ، فان البائعين والمشتريين سوف يكون لهم ردود فعل لفائض الطلب .

وتظهر بعض المسائل الحركية الخاصة في اسواق يكون فيها رد فعل العرض متأخرا . وفي اسواق مثل هذه ، يفترض ان البائع والمشتري سوف يكون لهما رد فعل بالنسبة للسعر . وسوف يتذبذب مجرى الزمن للسوق وينتج عنه ما يشبه بيت المنكبوت اذا كان لميل منحنى العرض والطلب اشارتان مختلفتان ، ويكون التوازن مستقرا اذا كانت القيمة المطلقة لميل منحنى الطلب اقل من القيمة المطلقة لميل منحنى العرض .

ولقد وسعت تحاليل السوق التنافسية لتغطى عقود مشتريات المستقبل وبيع السلع باسعار ثابتة قد تختلف من سعر السوق عند ذلك الوقت . وسوف يقوم كل مشترك ببيع او شراء كمية تساعد على الحصول على الحد الاعلى من المنفعة المتوقعة . فالاشخاص الذين يراهنون على جانبى الرهان لتفادى الخساره سوف يستخدمون سوق المستقبل لتحويل سعر غير مؤكد مستقبلا الى سعر مؤكد . وآخرون يستخدمون سوق المستقبل لشراء تذكار يانصيب التي تزيد من منفعتهم المتوقعة .

EXERCISES

6-1 Two hundred consumers derive utility from the consumption of two goods. Each has the utility function $U = 10q_1 + 5q_2 + q_1q_2$. Each has a fixed income of 100 dollars. Assume that the price of Q_2 is 4 dollars per unit. Express the aggregate demand for Q_1 as a function of p_1 . Is the aggregate demand curve downward sloping?

6-2 Construct a short-run supply function for an entrepreneur whose short-run cost function is $C = 0.04q^3 - 0.8q^2 + 10q + 5$.

6-3 A good Q is produced using only one input X . The market for Q is supplied by 100 identical competitive firms each of which has the production function $q = x^\beta$ where $0 < \beta < 1$. Each firm behaves as if the price of X were constant. However, the industry as a whole faces an upward sloping supply curve for X : $r = b(100x)$ where $b > 0$. Derive the industry's long-run supply curve.

6-4 The long-run cost function for each firm that supplies Q is $C = q^3 - 4q^2 + 8q$. Firms will enter the industry if profits are positive and leave the industry if profits are negative. Describe the industry's long-run supply function. Assume that the corresponding demand function is $D = 2000 - 100p$. Determine equilibrium price, aggregate quantity, and number of firms.

6-5 Consider an industry with n identical firms in which the i th firm's total cost function is $C_i = aq_i^2 + bq_iq$ ($i = 1, \dots, n$), where $q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$. Derive the industry's supply function.

6-6 Construct an effective supply curve for an industry which has two sources of supply: domestic production with the supply curve $S = 20 + 8p$, and (2) an unlimited supply of imports at a fixed price of 20.

6-7 Determine equilibrium price and quantity for a market with the following demand and supply functions: $D = 20 - 2p$ and $S = 40 - 6p$. Assume that a specific tax of 1 dollar per unit is imposed. Compute the changes in equilibrium price and quantity.

6-8 Assume fifty firms supply commodity Q at location I and fifty at location II. The cost of producing output q_i for the i th firm (in either location) is $0.5q_i$. The cost of transporting the commodity to the market from location I is 6 dollars per unit and from location II, 10 dollars per unit. Determine the aggregate supply function.

6-9 A consumer allocates a fixed amount of time to labor and leisure. He derives satisfaction from the time he retains as leisure, L , and the income, y , that he secures by selling his labor at a fixed wage rate. His utility function is $U = L \cdot y + aL$ where a is a positive parameter. Derive the consumer's supply function for labor. Is his labor supply curve upward sloping?

6-10 Assume that aggregate demand and supply functions are given by $D = 25/p$ and $S = \sqrt{5p}$. Is the dynamic process defined by (6-21) locally stable?

6-11 Determine whether equilibrium solutions exist for markets with the following demand and supply functions:

(a) $D = 12 - 3p$; $S = -10 + 2p$.

(b) $D = 16 - 2p$; $S = 20 - 2p$.

(c) $D = 50 - 4p$; $S = 10 + 10p - p^2$.

(d) $D = 50 - 4p$; $S = 2 + 10p - p^2$.

6-12 Consider the following markets which are characterized by lagged supply response:

(a) $D_t = 40 - 10p_t$; $S_t = 2 + 9p_{t-1}$.

(b) $D_t = 30 - 5p_t$; $S_t = 20 - p_{t-1}$.

Determine equilibrium price and quantity for each market. Assume an initial price 20 percent below the equilibrium price for each market, and determine the number of periods necessary for each price to adjust to within 1 percent of equilibrium.

6-13 A sugar refiner has a strictly concave production function for which labor and raw sugar cane are the only inputs. His production of refined sugar and purchase of inputs will take place next spring, but he must determine his future production level today. The future prices of refined sugar and labor are known with certainty, but the price of raw sugar will assume one of the values (r_1, \dots, r_n) with the respective probabilities (p_1, \dots, p_n) . Show how you would determine his futures-market raw sugar demand.

SELECTED REFERENCES

- Baumol, W. J.: *Economic Dynamics* (2d ed., New York: Macmillan, 1959). Chap. 7 contains a nonmathematical discussion of comparative statics, dynamics, and the cobweb theorem.
- Boulding, K. W.: *Economic Analysis: Microeconomics* (4th ed., New York: Harper & Row, 1966), vol. I. The model of a perfectly competitive economy is developed in nonmathematical terms in pt. I.
- Buchanan, N. S.: "A Reconsideration of the Cobweb Theorem," *Journal of Political Economy*, vol. 47 (February, 1939), pp. 67-81. An extension of the cobweb theorem with the use of geometry.
- Ellis, H. S., and William Fellner: "External Economies and Diseconomies," *American Economic Review*, vol. 33 (September, 1943), pp. 493-511. Also reprinted in American Economic Association, *Readings in Price Theory* (Chicago: Irwin, 1952), pp. 242-263. A geometric elucidation of these concepts.
- Knight, F. H.: *Risk, Uncertainty and Profit* (Boston: Houghton Mifflin, 1921). Also reprinted by the London School of Economics in 1937. A nonmathematical analysis of a perfectly competitive economy with emphasis on the effect of uncertainty on profits.
- Marshall, Alfred: *Principles of Economics* (8th ed., London: Macmillan, 1920). Book V contains a nonmathematical analysis of supply and demand and the determination of market equilibrium.
- Samuelson, Paul A.: *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). Chap. IX contains a discussion of market stability. A knowledge of advanced calculus is necessary.
- Schneider, Erich: *Pricing and Equilibrium* (London: William Hodge, 1952). Chap. 4 contains a discussion of equilibrium in a single perfectly competitive market in geometric terms.
- Stigler, George J.: *The Theory of Price* (3d ed., New York: Macmillan, 1966). Theories of perfect competition are developed in chap. 10 without the use of mathematics.

الفصل السابع

الاحتكار واحتكار الشراء والتنافس الاحتكاري MONOPOLY, MONOPSONY, AND MONOPOLISTIC COMPETITION

وحتى هذه النقطة من الكتاب ، كان الافتراض ان شروط المنافسة الكاملة تسود جميع الاسواق . فكانت الوحدة الانتاجية الصناعية التنافسية الكاملة تحتوى على عدد كبير من الوحدات الانتاجية والتي تباع انتاجا متجانسا . فكل انتاجية تواجه منحني طلب افقى وتقوم بعملية الحصول على الحد الاعلى من الربح باختبار مستوى انتاجى بعينه ان التكلفة الحدية MC تساوى سعر السوق .

والان ، نوجه الاهتمام الى اسواق يكون للوحدات الانتاجية تاثير ملموس على السعر فالاحتكار هو عبارة عن حالة يحتوى فيها السوق على بائع واحد فقط ويكون منحني طلب الاحتكارى هو نفس منحني طلب السوق المقابل ، ولا يستطيع المحتكر ان يفترض ان السعر غير متأثر باعماله وتصرفاته ، كما يجب ان يعرف (ماعدا فى الحالة النادرة وهى حاله سلعة جيفون Giffen good ان السعر الذى يستلمه سوف يتحقق كلما اتسع انتاجه ، وبهذا يكون المحتكر واضعا للسعر بدلا من اخذ بالسعر .

وقد يكون للبائع والمشتري تاثير على السعر . ويصف احتكار الشراء السوق التى يكون فيها مشتري واحد فقط . ولا يكون المحتكر المشتري monopsonist اخذا بالسعر ، ولكنه يعرف ان السعر الذى يدفعه ، ما هو سوف يزداد كلما زاد من شترياته .

ان نظرية المنافسة الاحتكارية تخلق عناصر من كلا من الاحتكار والمنافسة الكاملة وتغطى وحدة انتاجية صناعية محتوية على عدد كبير من الوحدات التى تباع منتجات متقاربة ولكنها متفاضلة ، ويكون لكل وحدة ، بالرغم من انها تكون صغيرة بالنسبة للسوق كوحدة متكاملة ، بعض التحكم فى السعر الذى تباع به .

ولقد طورت نظريه الاحتكار التقليديه فى الجزء ١-٧ ثم وسعت لغطى تمييز السعر

price discrimination في الجز' ٢-٧ ثم طبقت على حالات خاصه في الجز' ٣-٧ ، ويكون موضوع الجز' ٤-٧ هو احتكار الشراء اما الجز' ٥-٧ فيصف المنافسه الاحتكاريه .

٧ - ١ الاحكار : نظريات أساسية : MONOPOLY: BASIC THEORY

لا يوجد تمييز بين الوحده الصناعيه والوحده الانتاجيه المفرده في السوق الاحتكاريه ، فتكون الوحده الانتاجيه الاحتكاريه هي الوحده الصناعيه لانه ليس لها منافس^(١) يمتلك منحني الطلب المفردى للمحتكر نفس المميزات العامه لمنحني طلب الوحده الصناعيهـ للسوق التنافسيه الكامله . ويكون هو اجمالي منحنيات الطلب للمستهلك كمرء ويفترض ان يكون بعميل سالب وتكون كمية مبيعات المحتكر دالة ذات قيمة منفرده بالنسبه للسعر الذي يتقاضاه من المستهلك :

$$q = f(p) \quad (١-٧)$$

حيث ان $dp/dq < 0$ ويفترض ان يكون لمنحني الطلب معكوسا فريدا ومن الممكن وضع السعر كدالة ذات قيمة منفرده بالنسبه للكميه :

$$p = F(q) \quad (٢-٧)$$

حيث ان $dq/dp < 0$ فاحد الفروق الرئيسيه بين المحتكر والمنافس الكامل يكون في ان سعر المحتكر يتناقص كلما زادت مبيعاته ، بينما يتقبل المنافس الكامل السعر كانه متغير بمقدار ثابت ويعمل على الحصول على الحد الاعلى من الربح بالنسبه للتغيرات في مستوى الانتاج ، وقد يعمل المحتكر على الحصول على الحد الاعلى من الربح بالنسبهـ للتغيرات في مستوى انتاجه او بالنسبه لمستوى سعره ، ولكنه لا يستطيع ان يضع كلامستقلا على حدة لان سعره (او مستوى انتاجه) يتقرر بطريقة وحيداه عن طريق منحني طلبه متى ماتم اختيار مستوى الانتاج (او السعر) وسوف يكون خليط السعر والكميه الذي يمكنه من الحصول على الحد الاعلى من الربح غير قابلا للتغيير بالنسبه لاختياره للمتغير المستقل independent variable .

معدل الإيرادات والإيرادات الحدية : Average and Marginal Revenue

ان اجمالي إيرادات المحتكر يكون السعر مضروبا في الكمية المباهه :

$$R = pq \quad (٣-٧)$$

(١) وبمعنى اعم فان جميع المنتجات تتنافس على دخول المستهلك المحدود ويعرف التعبير احتكار الحاله التي يكون فيها وحده انتاجيه واحده فقط تنتج سلعه لا يكون لها بديل قريب وتكون اسعار السلع الاخرى كلها ثابتة، كما هو دائما الحال في تحاليل السوق الواحدة وينعكس تنافس السلع الاخرى على الدخل المحدود للمستهلك في موقع وشكل منحني الطلب الاحتكاري .

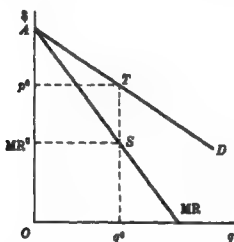
ويكون إيراده الحدى (MR) هو الاشتقاق للإيرادات الاجمالية بالنسبة لمستوى الانتاج . فيتفاضل (٣-٧) بالنسبة للعقدار q نحصل على :

$$MR = \frac{dR}{dq} = p + q \frac{dp}{dq} \quad (٤-٧)$$

وبما ان $dp/dq < 0$ فان MR يكون اقل من السعر ، وتعرف (٤-٧) ايضا MR للمتناقص الكامل حيث ان MR يساوى السعر حيث ان $dp/dq = 0$ اما MR للمحتكر فانه يساوى السعر ناقصا معدل تغير السعر بالنسبة للكمية مضروباً فى الكمية . فاذا زاد المتنافس الكامل مبيعات بوحده واحده ، فان دخله سوف يزداد بقيمة السوق لهذه الوحدة الاضافيه . اما المحتكر فانه لا بد وان يخفض من سعره الذى يتقاضاه من المستهلك لكل وحدة من اجل ان يبيع وحدة اضافيه .

ان الشكل (١-٧) يبين منحنيات MR ومنحنيات الطلب الخطى . فالطلب يكون متناقصا باضطراب ويكون MR اقل من السعر لكل انتاج اكبر من الصفر ويكون معدل التناقص فى MR ضعف معدل تناقص السعر :

$$p = a - bq \quad R = aq - bq^2 \quad MR = \frac{dR}{dq} = a - 2bq$$



شكل (١-٧)

وبما ان $dp/dq = -b$ يكون ثابتا ، فان المسافة بين المنحنيين $[q(dp/dq) = -bq]$ تكون دالة خطية بالنسبة للنتاج ويساوى اجمالى الإيرادات لخليط السعر والكمية (p^0, q^0) لمساحة المستطيل Op^0Tq^0 . وتساوى المساحة $OASq^0$ التى تقع اسفل منحنى MR اجمالى الإيرادات :

$$\int_0^{q^0} (a - 2bq) dq = aq - bq^2 = R$$

ويمكن تطبيق هذه النتيجة على منحنيات الطلب الغير خطية . وعلى وجه العموم تكون :

$$\int_0^q \left(p + q \frac{dp}{dq} \right) dq = pq = R$$

حيث ان ثابت التكامل يساوى صفر . ويكون اجمالي الايرادات معطى بالمساحة التي تقع اسفل المنحنى MR .

وتعرف مرونة الطلب (e) عند نقطة ما على منحنى الطلب بانها القيمة المطلقة لمعدل التغير النسبي للناتج مقسوما على معدل التغير النسبي للسعر (١) :

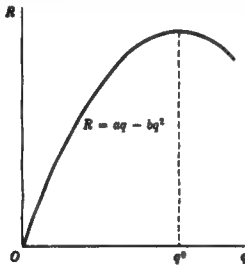
$$e = - \frac{d(\ln q)}{d(\ln p)} = - \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} \quad (٥-٧)$$

ويمكن التعبير عن MR كما اعلى بالمعادلة (٦-٧) بالنسبة للسعر ومرونة الطلب على النحو التالي :

$$MR = p \left(1 + \frac{q}{p} \frac{dp}{dq} \right) = p \left(1 - \frac{1}{e} \right) \quad (٦-٧)$$

ويكون MR موجبا اذا كان $e > 1$ ويكون صفرا اذا كان $e = 1$ ويكون سالبا اذا كان $e < 1$ ويتناقص الفرق بين MR والسعر كلما ازدادت مرونة الطلب ، ويتقرب MR من السعر كلما اقتربت مرونة الطلب من لانهايه .

ان الشكل (٢-٧) يوضح منحنى اجمالي الايرادات الكافي* والقابل لمنحنى الطلب الخطي في الشكل (١-٧) ان الاشتقاق الاول لاجمالي الايرادات (وهو يساوى (MR) يكون متناقصا باضطراب ويتقرب من صفر عند مستوى الانتاج q^0 ويكون اجمالي الايرادات متزايدا وتكون $e > 1$ اذا كانت $q < q^0$ ويكون عند قيمة العلى وتكون $e = 1$ اذا كانت $q = q^0$ ويكون منخفضا وتكون $e < 1$ اذا كانت $q > q^0$.



شكل (٢-٧)

(١) وبما ان الانتباه قد ركز على منحنيات الطلب ذات الميل السالب ، فانه من السهل تعريف مرونة الطلب كمعدل موجب وهذا يمكن ما جاء في الجزء (٣-٢) حيث ان مرونة الطلب تأخذ اشارة ميل منحنيات الطلب التابعة لها .

الحمد الأعلى من الربح : دالة التكلفة Profit Maximization: Cost Function

يمكن التعبير من اجمالي إيرادات المحتكر وكذلك من اجمالي التكلفة بدلالة الانتاج على النحو التالى :

$$R = R(q) \quad C = C(q)$$

فيكون الربح مساويا للفرق بين اجمالي الإيرادات واجمالي التكلفة :

$$\pi = R(q) - C(q) \quad (٧-٧)$$

وللحصول على الربح الاعلى نضع اشتقاق (٧-٧) بالنسبة للمتغير q مساويا لصفر :

$$\frac{d\pi}{dq} = R'(q) - C'(q) = 0 \quad \text{او ان :}$$

$$R'(q) = C'(q) \quad (٨-٧)$$

وتوضح هذه المعادلة ان MR يجب ان يساوى MC للحصول على الربح الاعلى ويستطيع المحتكر زيادة ربحه بالتوسع (او الانكماش) فى انتاجه ، مادام الاضافة الى إيراداته (وهى MR) تفوق (او اقل من) الاضافة الى تكلفته (وهى MC) وبما ان (MR) يكون موجبا للنتاج الذى يعطى الربح الاعلى ، فانه يتبع من (٧-٨) ان المحتكر سوف يختار دائما نقطة مرته على منحني طلبه ، بمعنى انه سوف يختار نقطة يكون منه $\epsilon > 1$ ولا يوجد خطر مثل هذا على تقيده التوازن لـ ϵ بالنسبة للسوق التنافسية .

يتطلب شرط الدرجة الثانية للربح الاعلى ان :

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = R''(q) - C''(q) < 0$$

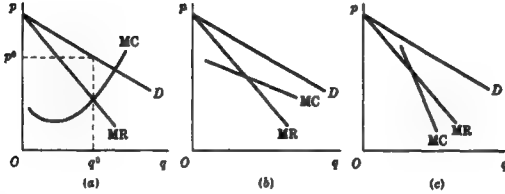
او انه :

$$R''(q) < C''(q) \quad (٩-٧)$$

وهذا يعنى ان معدل الزيادة فى MR يجب ان تكون اقل من معدل الزيادة فى MC ويكون شرط الدرجة الثانية محققا مسبقا اذا كان MR فى حالة تناقص وكان MC فى حالة تزايد ، كما هو مفترض عامة . فاذا كان MC فى حالة تناقص فان (٩-٧) تتطلب ان يكون MR متناقصا بمعدل اكثر . فاذا تحقق شرطى الربح الاعلى لاكثر من مستوى انتاج واحد ، فان المستوى الذى يعطى اكبر ربح يكون المستوى الذى يمكن اختياره بطريقة الفحص .

ويمكن تحقيق شرط الدرجة الاولى فى كل حالة من الحالات الثلاثة الموضحة

بالشكل (٧-٣) فساواة MR مع MC فى الحالة (١) يقرر الكمية q^0 والسعر p^0 فالمحتكر يستطيع ان يضع السعر p^0 ويسمح للمستهلك ان يشتري q^0 او ان يبيع q^0 للمستهلك ان يقرر السعر p^0 ويتطلب شرط الدرجة



شكل (٧ - ٣)

الثانيه ان القيمة الجبريه لميل منحنى MC يفوق ميل منحنى MR اى ان منحنى MC يجب ان يقطع منحنى MR من الاسفل ويكون هذا الشرط محققا عند نقطتي التقاطع في الحاله (ا) والحاله (ب) ولا يعطى $MR = MC$ نقطه مثلى للربح في الحاله (د) لان منحنى MC يقطع منحنى MR من الاعلى عند نقطه تقاطعها الوحيده . ويمكن تحقيق شرط الدرجه الاولى ولكن لا يمكن تحقيق شرط الدرجه الثانيه .

اذا اتبع المبتكر قاعده التنافس الكامل وساوى بين MC والسعر ، فانه سوف ينتج اكثر ويطلب سعرا اقل وهذا يديهي من الشكل (٧ - ١٣) فاحداثيات نقطه تقاطع منحنى MC ومنحنى الطلب تعطى سعرا اقل من p^0 وكمية اكبر من q^0 .

مثال : اعتبر محتكرا ما يواجه منحنى طلب خطى :

$$(٧ - ١٠) \quad p = 100 - 4q \quad R = pq = 100q - 4q^2$$

وينتج بتكلفه حديه ثابته مقدارها عشرون ريالا ، ويكون اجمالى تكلفته دالة خطيه بالنسبه لمستوى الانتاج :

$$(٧ - ١١) \quad C = 50 + 20q$$

ويكون ربحه

$$\pi = (100q - 4q^2) - (50 + 20q)$$

وبوضع MR يساوى MC :

$$100 - 8q = 20$$

$$q = 10 \quad p = 60 \quad \pi = 350$$

وبهذا يكون قد تحقق شرط الدرجه الثانيه : ان معدل تغير MC ، (مفر) يفوق معدل تغير MR ، (-8) فلوان المبتكر قرر ان يتبع قاعده التنافس الكامل وضع السعر مساويا ل MC :

$$100 - 4q = 20$$

$$q = 20 \quad p = 20 \quad \pi = -50$$

سوف يبيع كمية أكبر بسعر أقل ويكسب ربحاً أقل ، ففي هذا المثال ، يكون ربح المحتكر (وهو 350 ريال) قد انخفض إلى 50 ريال .

الحد الأعلى من الربح : دالة الإنتاج :

Profit Maximization: Production Function

ان تحاليل الاحتكار تكون عادة بدلالة دوال التكلفة ، ولكنه يوجد بعض حالات يكون مرغوباً فيها اعتبار دالة انتاج المحتكر وشعروات المواد الأولية بصورة واضحة . افترض ان محتكراً يستخدم داخليين input (ونسميها هنا المواد الاولى) مشتريين مسبقاً اسواق تنافسية لانتاج ما يريد المحتكر انتاجه . فيكون ربحه :

$$\pi = R(q) - r_1 x_1 - r_2 x_2$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئية للربح بالنسبة للداخليين (المواد الاولى) مساوية لصفر :

$$(12-7) \quad \frac{\partial \pi}{\partial x_i} = R'(q)h_i - r_i = 0 \quad i = 1, 2$$

حيث ان $q = h(x_1, x_2)$ وان $h_i = \partial q / \partial x_i$ وباعادة ترتيب الحدود :

$$R'(q)h_i = r_i \quad i = 1, 2$$

ويتطلب الربح الأعلى ان المحتكر يضع قيمة الأيراد الحدى للنتاج :

marginal-revenue product لكل داخل مساوياً لسعره . ففي حالة الاحتكار يكون الايراد الحدى *marginal product* مضروباً في الانتاج الحدى *marginal product* مساوياً لسعر الداخل ، بينما في التناقص الكامل يكون سعر الناتج في الانتاج الحدى مساوياً لسعر الداخل .

وتتطلب شروط الدرجة الثانية للربح الأعلى ان :

$$(13-7) \quad \pi_{11} < 0 \quad \pi_{22} < 0 \quad \pi_{11}\pi_{22} - \pi_{12}^2 > 0$$

حيث ان $\pi_{ii} = \partial^2 \pi / \partial x_i \partial x_i$ ويتغاضل (12-7) لمرات أخرى :

$$\pi_{ii} = R'(q)h_{ii} + R''(q)h_i^2 < 0 \quad i = 1, 2$$

او باعادة ترتيب الحدود والتمويض من (12-7) (1) :

$$(14-7) \quad R''(q) < -\frac{R'(q)h_{ii}}{h_i^2} = -\frac{r_i h_{ii}}{h_i^2} = C''(q) \quad i = 1, 2$$

(1) ضع $F(q, x_1, x_2) = q - h(x_1, x_2)$ وكذلك ضع $\frac{\partial x_i}{\partial q} = -\frac{F_{q_i}}{F_{q_i}} = -\frac{1}{h_i}$

وبتفاضل السابق مرة أخرى نحصل على : $\frac{\partial^2 x_i}{\partial q^2} = \frac{h_{ii}(\partial x_i / \partial q)}{h_i^2} = -\frac{h_{ii}}{h_i^3}$

ولقد اشتقت اللامتناهية الأخيرة في (14-7) باستخدام قاعدة الدالة المركبة

$$C''(q) = \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q} \right)^2 + \frac{\partial C}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q^2} = -\frac{r_i h_{ii}}{h_i^3}$$

ان معدل الزيادة في MC والمائد لتفسير احد الداخلين يجب ان يفوق معدل الزيادة في MR وتتطلب اللامتساوية الثالثة في (١٣-٧) ان معدل الزيادة في MC نتيجة لتفسير الداخلين معا يجب ان يفوق معدل الزيادة في MR .

وبما ان $R''(q) = 0$ للمتناقص الكامل ، فان $C''(q)$ يجب ان يكون موجبا او بمعنى مكانا ان دالة الانتاج يجب ان تكون مقعرة بانضباط في جوار نقطة التوازن . وبما ان $R''(q)$ يكون سالبا للمحتكر ، فان $C''(q)$ قد يكون سالبا ، ايضا ولا يزال يحقق (١٤-٧) وهكذا يكون محتملا الحصول على توازن احتكاري عند نقطة ما بحيث تكون عندها دالة الانتاج غير محدبة بانضباط ، اى انه عند نقطه يكون عندها $R_H > 0$ وان شرط التحدب المنضبط لدالة الانتاج عند نقطة تتحقق عندها (١٢-٧) يكون شرط كفاية لتوازن احتكاري وليس شرطا ضروريا .

٧ - ٢ الاحتكار : سعر تمييزي :

MONOPOLY: PRICE DISCRIMINATION

قد لا يحتاج المحتكر دائما بيع جميع منتجاته في سوق واحد بسعر موحد . ففي بعض الحالات يستطيع المحتكر زيادة ربحه بالبيع باكثر من سعر واحد . ونقدم هنا حالتين تمثل ما قلناه . ففي الحالة الاولى يكون المحتكر قادرا على ان يضع سعرا مختلفا في كل واحد من السوقين المحددين . اما في الحالة الثانية فانه قادر على ان يصنع سلسلة متواصلة من الاسعار continuum of prices .

Market Discrimination

التمييز في الأسواق :

اعتبر الحالة التي يبيع فيها المحتكر في سوقين ويكون التساؤل عما اذا كان المحتكر قادرا على طلب نفس السعر في كلا السوقين ؟ ويمكن تحقيق التمييز في الاسعار اذا كان البائع غير قادر على شراء ما يرغب شراؤه في سوق واحد ثم يبيعه في سوق اخر والا فان الوسيط سوف يشتري في سوق يكون فيها سعر اوطيا ثم يبيع في سوق يكون فيها السعر حاليا بربح ، وعلى هذا فانه سوف يساوي بين الاسعار في كل الاسواق .

ان الخدمات الشخصية تكون نادرا قابلة للتنقل ، وان بيعها يعرضها عادة لتمييز الاسعار . وان اعادة البيع لسلع مثل الكهرباء ، والغاز ، والماء ، والتي تتطلب توصيلات فعلية بين منشآت المنتج والمستهلك ، تكون صعبة جدا ويكون تمييز الاسعار متبعيا بصورة شائعة في وضع معدلات المنافع العامة . ويكون تمييز الاسعار ممكنا عادة في حدود اسواق منفصلة مثل الاسواق المحلية والاجنبية بالنسبة للمحتكر الذي يبيع خارج

بلاده .

ويمكن القضا على اعادة البيع بوضع تعريفه عاليه جدا . اذا ماري المحتكر تميز
الاسعار في سوقين معددين ، فان ربحه سوف يكون الفرق بين اجمالي ايراداته من كلا
السوقيه واجمالي تكلفه الانتاج :

$$(١٥-٧) \quad \pi = R_1(q_1) + R_2(q_2) - C(q_1 + q_2)$$

حيث ان q_1 و q_2 يكونا الكميتين اللتين يبيعهما في السوق ، وان $R_1(q_1)$ و $R_2(q_2)$
يكونا دالتي الايرادات ، وان $C(q_1 + q_2)$ تكون دالة تكلفته ووضع الاشتقاقات الجزئيه

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = R'_1(q_1) - C'(q_1 + q_2) = 0 \quad \text{مساويه لصفر :}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = R'_2(q_2) - C'(q_1 + q_2) = 0 \quad \text{او ان :}$$

$$R'_1(q_1) = R'_2(q_2) = C'(q_1 + q_2)$$

فيكون الانتاج الحدي MR في كل سوق مساويا للتكلفه الحديه MC لكل ناتج ككل .
فلو ان الانتاجات الحديه MR غير متساويه ، فان المحتكر يستطيع زياده ايراداته الاجماليه
بدون التأثير على اجماليه التكلفه عن طريق تصريف البيع من السوق الذي يكون فيه MR
واطلا الى السوق الذي يكون فيه MR عاليه . ولا يدل بالضرورة تساوي MR مساواة الاسعار
في السوقين . فاذا رمزنا للسعرين ومرونتي الطلب في السوقين بالرموز p_1, p_2, e_1, e_2

وبالاستفاده من (٦-٧) فان مساواة MR تتطلب :

$$p_1 \left(1 - \frac{1}{e_1}\right) = p_2 \left(1 - \frac{1}{e_2}\right)$$

وتتطلب كذلك :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 - 1/e_2}{1 - 1/e_1}$$

ف نجد ان السعر سوف يكون اوطى في السوق ذي مرونة الطلب الاكبر ويكون السعرين
متساويين فقط اذا كانت if and only if مرونتي الطلب متساويتين .

وتتطلب شروط الدرجة الثانيه ان تكون المحددات الاصغر في المرتبه الرئيسيـه

principal minors, المحددة هيسيان :

$$\begin{vmatrix} R'_1 - C'' & -C'' \\ -C'' & R'_2 - C'' \end{vmatrix}$$

متعاقبه في الاشارة بحيث انها تبدأ باشارة سالبه . وبذلك المحدده الى محددات اصغر
في المرتبه الرئيسيـه :

$$R'_1 - C'' < 0 \quad (R'_1 - C'')(R'_2 - C'') - (C'')^2 > 0 \quad ,$$

ويتطلب هو "لا" ان $R'_2 - C'' < 0$ ويكون MR في كل سوق متزايدا بسرعة اقل من MC للناتج
ككل .

مثال : افترض ان المحتكر الذي له دالة طلب ودالة تكلفه معطاه بالمعادله (١٥-٧)

والمعادله (١١-٧) يكون قادرا على تمييز (فصل) المستهلكين لمنتجاته في سوقين محددين : (١)

$$\begin{aligned} p_1 &= 80 - 5q_1 & R_1 &= 80q_1 - 5q_1^2 \\ p_2 &= 180 - 20q_2 & R_2 &= 180q_2 - 20q_2^2 \\ C &= 50 + 20(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

وبوضع MR في كل سوق يساوى MC للنتاج ككل :

$$80 - 10q_1 = 20 \quad 180 - 40q_2 = 20$$

وبالحل لقيمتي q_1 و q_2 وبالتعويض في معادلات الطلب ، والربح والعرونة :

$$\begin{aligned} q_1 &= 6 & p_1 &= 50 & e_1 &= 1.67 \\ q_2 &= 4 & p_2 &= 100 & e_2 &= 1.25 \\ \pi &= 450 \end{aligned}$$

وتكون شروط الدرجة الثانيه محققه :

$$-10 < 0 \quad \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -40 \end{vmatrix} = 400 > 0$$

فهذا يكون المحسنة قد استطاع زيادة ربحه من 350 الى 450 ريالاً من خلال عطية التمييز ، فيكون السعر منخفضاً في السوق ذات مرونة الطلب العاليه وزيادة عطية التمييز يزداد ربح المحسنة اذا كان في مقدوره تقسيم المستهلكين لعدد كبير من المجموعات بمرونة طلب مختلفه .

Perfect Discrimination

التمييز الكامل :

أن كل نقطة على منحني الطلب تعطى أعلى سعر منفرد يدفعه المستهلك ، ومن طوع ورفعه ، للحصول على كمية السلع المتقابلة . وهناك بعض المستهلكين الراغبين في دفع سعر أعلى للحصول على هذه الكمية من السلع بدل التنازل عن استهلاكها . وبهذا فانهم يكسبون فائضاً يسمى فائض المستهلك consumers' surplus (راجع الجزء ٣-٧) من نظام السعر الواحد للتسهيل افترض ان نتائج الدخل income effects تكون صفراً بحيث ان منحنيات الطلب المادية والتعويضيه تنطبق على بعضها (راجع الجزء ٢-٥) وعند هذا

(١) ان منحني الطلب الاجمالي للمحسنة سوف يبقى بدون تغيير . وبحل معادلتى

$$q_1 = 16 - 0.2p_1 \quad q_2 = 9 - 0.05p_2 \quad : q_1 \text{ و } q_2$$

ويكون اجمالي الطلب عند أى سعر (p) هو مجموع الطلبات في السوقين :

$$q = q_1 + q_2 = 16 - 0.2p + 9 - 0.05p = 25 - 0.25p$$

وبحل المسألة لقيمة p : $p = 100 - 4q$ وهى نفسها دالة الطلب المعطاه في المعادله (١٠-٧) .

يتساوى فائض المستهلك المساحة تحت الطلب ناقصا المقدار الذى دفعه المستهلك للسلعة .

ويستطيع المحتكر الذى يستخدم التمييز الكامل ان يقسم السوق لدرجة انه قادر على ان يبيع كل وحدة لاحقه من السلع التى ينتجها بالمقدار الاعلى الذى يدفعه المستهلك عن رغبة للحصول على هذه الوحدة اللاحقه من السلع . وبهذا يستخلص المحتكر جميع فائض المستهلك ويكون اجمالى ايراداته مساويا للمساحة تحت منحنى الطلب ويكون ربحه كالتالى :

$$\pi = \int_0^q F(q) dq - C(q)$$

ويوضع اشتقاق الربح بالنسبة للناتج مساويا لصفر :

$$\frac{d\pi}{dq} = F(q) - C'(q) = 0$$

ومن هذه المعادله نحصل على $F(q) = C'(q)$ وهذا يعنى ان المحتكر يتحصل على الربح الاعلى بمساواة السعر الحدى *marginal price* بالتكلفة الحديه ويشكل هندسى فان المحتكر الذى يقوم بالتمييز الكامل يعمل عند النقطه التى يتقاطع عندها منحنى MC مع منحنى الطلب ويكون شرط الدرجة الثانيه للربح الاعلى :

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = F'(q) - C''(q) < 0$$

والذى يتطلب بان يكون ميل منحنى MC اكبر من ميل منحنى الطلب .
مثال : افترض وجود تمييزا كاملا للمثال المعطى بالمعادله (١٠-٧) والمعادله (١١-٧) ، فيكون الربح :

$$\pi = \int_0^q (100 - 4q) dq - (50 + 20q)$$

ويوضع السعر الحدى مساويا لـ MC :

$$100 - 4q = 20 \quad q = 20 \quad \pi = 750$$

ومن هنا نجد ان المحتكر الذى يستخدم التمييز الكامل ينتج اكثر من العشر وحدات التى ينتجها المحتكر البسيط وأنه كذلك يحصل على ربح أعلى مما يحصل عليه المحتكر البسيط . ونجد ايضا ان سعره الحدى يساوى 20 ، وأن معدل دخله لكل وحدة مباعه يساوى 60 مقارنة بالسعر الموحد وبقداره 60 ريالاً للمحتكر البسيط .

٧ - ٣ الاحكام : تطبيقات : MONOPOLY: APPLICATIONS

انه من الممكن تكييف نظرية الاحتكار الاساسيه لتتطلى حالات مختلفه . ونعتبر هنا أربعة تطبيقات :

المحتكر صاحب المصانع المتعددة : The Multiple-Plant Monopolist

اعتبر المحتكر الذي يبيع في سوق واحدة ولكنه يستطيع انتاج سلعه في مصنعين منفصلين فيكون ربحه جاره من الفرق بين مجمل ايراداته وبين تكاليف الانتاج الاجماليه لكلا الصنعتين :

$$\pi = R(q_1 + q_2) - C_1(q_1) - C_2(q_2) \quad (١٦-٧)$$

حيث أن q_1 و q_2 هما الكميّتان التي يقوم المحتكر بأننتاجهما في مصنعه وان $R(q_1 + q_2)$ هي دالة ايراداته وان $C_1(q_1)$ و $C_2(q_2)$ هما دالتى تكلفته . وبوضع الاشتقاقات الجزئية للمعادلة (١٦-٧) مساويه لصفر :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = R'(q_1 + q_2) - C_1'(q_1) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = R'(q_1 + q_2) - C_2'(q_2) = 0$$

$$R'(q_1 + q_2) = C_1'(q_1) = C_2'(q_2) \quad \text{او ان :}$$

وبهذا يكون MC في كل مصنع مساويا لـ MR للناتج ككل وتتطلب شروط الدرجة الثانية أن تكون المعدادات الأصغر في الرتبة الرئيسيه لمعددة هيسيان :

$$(١٧-٧) \quad \begin{vmatrix} R'' - C_1' & R'' \\ R'' & R'' - C_2' \end{vmatrix}$$

متعاقبه في الاشارات بحيث انها تبدأ بالاشارة السالبة ويمكن للقارىء التحقق من أن (١٧-٧) تتطلب بأن يكون MC في كل مصنع متزايد بمعدل اسرع من MR للناتج ككل .

المحتكر صاحب المنتجات المتعددة : The Multiple-Product Monopolist

اعتبر ان احد منتجى السلع يصرف كالمحتكر الذي ينتج سلعتين متميزتين ولكنهما متقاربتين بحيث أن دالتى الطلب هما :

$$q_1 = f_1(p_1, p_2) \quad q_2 = f_2(p_1, p_2)$$

فاذا كانت الاشتقاقات المقاطعه $\partial q_i / \partial p_j$ ($i \neq j$) موجبة فإن المنتجات تكون تبادلـه بالـجمله gross substitutes. اما اذا كانت سالبة فان المنتجات تكون تكـمـيلـه بالـجمله gross complements افترض وجود معكوس بقيمة منفردة لدالتى الطلب على النحو التالى :

$$p_1 = F_1(q_1, q_2) \quad p_2 = F_2(q_1, q_2)$$

أن اشتقاقات المحسك المقاطعه الموجهه تمثل المنتجات المتكامله ولاشتقاقات المقاطعه السالبه تمثل المنتجات المتبادلله وهذا يتبع من الافتراض بان : $\partial q/\partial p_i < 0$ وأخيرا تعرف دالى الايرادات :

$$R_1 = p_1 q_1 = R_1(q_1, q_2) \quad R_2 = p_2 q_2 = R_2(q_1, q_2)$$

حيث أن $\partial R_i/\partial q_j$ ($i \neq j$) تكون هنا موجهه للمنتجات المتكامله وسالبه للمنتجات المتبادلله .

أن ربح المحسك يكون :

$$\pi = R_1(q_1, q_2) + R_2(q_1, q_2) - C_1(q_1) - C_2(q_2)$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئيه مساويه لصفر :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = \frac{\partial R_1}{\partial q_1} + \frac{\partial R_2}{\partial q_1} - C'_1(q_1) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = \frac{\partial R_1}{\partial q_2} + \frac{\partial R_2}{\partial q_2} - C'_2(q_2) = 0$$

ومن هذه المعادله نحصل على :

$$(18-7) \quad \frac{\partial R_1}{\partial q_1} + \frac{\partial R_2}{\partial q_1} = C'_1(q_1) \quad \frac{\partial R_1}{\partial q_2} + \frac{\partial R_2}{\partial q_2} = C'_2(q_2)$$

وللمره الثانيه نجد أن المحسك يساوى بين MR و MC ففى (18-7) نجد ان MR يأخذ فى الاعتبار ، بوضوح ، تقارب الطلب (١) .

اعتبر الحاله التى تكون فيها المنتجات تبادلله حيث ان $\partial R_i/\partial q_j < 0$ وان ($i \neq j$) وكشلا لهذا اعتبر وضع مصنع العصير الذى ينتج عصيرا من الدرجه الاولى وعصيرا عاديا فالتكلفه الحديه MC للعصير سوف تكون اقل من الانتاج الحدى MR لذلك العصير الذى تميز عن العصير الاخر . فزياده انتاج عصير الدرجه الاولى يتم اذا خفض المحسك من سعره وهذا بدوره ، سوف يسبب انخفاض فى مبيعات العصير المادى . وتطلى علينا شروط الدرجه الاولى (والمعطاه بالمعادله (18-7)) سعرا غاضليا امثلا للعصيرين .

اما اذا كانت المنتجات تكامله حيث ان $\partial R_i/\partial q_j > 0$ وان ($i \neq j$) فان MC لكل منتج سوف يكون اعلى من MR لذلك المنتج الوحيد ، وكشلا لهذا اعتبر ان احدى المنتجات هى شفر (امواس) الحلاقه وان المنتج الاخر هو ماكينه الحلاقه بفردىها بدون الامواس فإى توسع فى انتاج ماكينه الحلاقه من خلال تخفيض سعرها سوف يسبب توسعا نفسى

(١) وبهذا نفترض ان شروط الدرجه الثانيه قد تحققت الا اذا نص على غير ذلك .

الإيرادات من الامواس بالسعر المعطى ، فقد يتطلب الحل الامثل بيع ماكينته الحلاقه بخماره بسبب تأثيرها العرضى على مبيعات الامواس الدارة للريح .

فرضى الضرائب والإنتاج الاحكارى : Taxation and Monopoly Output

ان ضريبة الجمله اوضريبة الريح (بمعدل حدى اقل من مائه فى المائه) سوف يخفض من الريح ، بعد الضريبة ، للمحتكر الذى يحصل على الريح الاعلى ، ولكن الضريبة سوف لا تؤثر على خليط السعر والكمية الامثل للمحتكر . فرضية البيع سواً فرضت على اساس الكمية المباعة او قيمة المبيعات ، سوف تخفض من ربح المحتكر ومن مستوى انتاجه وانها سوف تسبب رفع سعره .

لا يستطيع المحتكر غداى ضريبة الجمله فعليه دفعها بغض النظر من الكمية المباعة او قيمة مبيعاته او مقدار ربحه وبهذا يصبح ربحه :

$$\pi = R(q) - C(q) - T \quad (١٩-٢)$$

حيث ان T تكون مقدار ضريبة الجمله وتكون π ربحه بعد دفع الضريبة وبوضع اشتقاق (١٩-٢) مساوياً لصفر :

$$\frac{d\pi}{dq} = R'(q) - C'(q) = 0 \quad \text{يتطلب} \quad R'(q) = C'(q)$$

وبما ان T ثابت ، فانها تخفى بعد القيام بعملية التفاضل ، وان مستوى الانتاج للمحتكر وسعره يقران بمساواة MR مع MC كما لو كان الحال بدون ضريبة + وتتطلب ضريبة الريح بان يدفع المحتكر للحكومة نسبة معينه من الفرق بين اجمالى ايراداته واجمالى تكلفته . فاذا كانت الضريبة بمعدل ثابت (نسبة ثابتة) فان ربحه بعد دفع الضريبة يكون :

$$\pi = R(q) - C(q) - t[R(q) - C(q)] = (1-t)[R(q) - C(q)] \quad (٢٠-٢)$$

حيث ان $0 < t < 1$ وبوضع اشتقاق (٢٠-٢) مساوياً لصفر :

$$\frac{d\pi}{dq} = (1-t)[R'(q) - C'(q)] = 0$$

وبما ان $1-t \neq 0$ فان :

$$R'(q) - C'(q) = 0 \quad R'(q) = C'(q)$$

وبما ان شرط الدرجة الاولى يكون كما فى (٨-٢) فان مستوى الانتاج والسعر لا يتاثران. فالطريقه الوحيد التى يتغادى بها المحتكر دفع ضريبة الريح تكون بتخفيض ربحه قبل الضريبة . فاذا استلغ المحتكر الحفاظ على جزء من الزيادة فى ربحه قبل الضريبة، فانه سوف يحصل على ربح اعلى بعد الضريبة بمساواة MR مع MC

مثال : اذا افترضنا ان ضريبة بيع محددة بمقدار α من الربحيات لكل واحد من

وحدات الانتاج قد فرضتها الحكومة ، فان الربح يكون :

$$\pi = R(q) - C(q) - \alpha q$$

وبتفاضل الربح نحصل على :

$$(٢١-٧) \quad \frac{d\pi}{dq} = R'(q) - C'(q) - \alpha = 0 \quad R'(q) = C'(q) + \alpha$$

نمكن للمحتكر ان يحصل على ربحه الاعلى بعد الضريبة بمساواة MR مع MC زائد اوحده

الضريبة . وباخذ التفاضل الاجمالى للمعادله (٢١-٧) :

$$R''(q) dq = C''(q) dq + d\alpha$$

ومن هذه المعادله نحصل على :

$$\frac{dq}{d\alpha} = \frac{1}{R''(q) - C''(q)}$$

وبما ان

$$R''(q) - C''(q) < 0$$

فان $dq/d\alpha < 0$ وان مستوى الانتاج الامثل سوف ينخفض كلما ازداد معدل الضريبة. وينتج

عن فرض ضريبة بيع محدده بيع كميته صغيره من الانتاج بسعر عالى .

وبالعودة الى المثال المعطى بالمعادلتين (١٠-٧) و (١١-٧) وبافتراض ان

الحكومة فرضت ضريبه بمقدار ٨ ريال لكل وحده من انتاج المحتكر :

$$\pi = (100q - 4q^2) - (50 + 20q) - 8q$$

$$\frac{d\pi}{dq} = 72 - 8q = 0 \quad q = 9 \quad p = 64 \quad \pi = 274$$

ف نجد ان البيع انخفض بمعدل وحدة واحدة ، وان السمر ارتفع بمقدار اربعة ريال

وان ربح المحتكر انخفض بمقدار ٧٦ ريالا نتيجة لفرض الضريبة . وان زيادة السمر كانت

باقل زياده من ضريبه الواحد ، ولكن ربح المحتكر انخفض باكثر من ال ٧٢ ريالا ليرادات

الضريبة . فلوان الحكومة فرضت على المحتكر مبلغا اجماليا وقدره ٧٢ ريالا اقل مما سبق،

وان المستهلك لا يحتاج لدفع سمر اعلى للمسلع . وكنتيجة لهذا فان البعض يحتج ويناقش

بان فرق ضريبة الجملة يكون مفضلا على ضريبة البيع .

ان النتائج سوف تكون مشابهة لما سبق اذا كانت مقدار ضريبة البيع عبارة عن نسبة من

قيمة المبيعات (وهى الايرادات الاجمالية) :

$$\pi = R(q) - C(q) - sR(q) = (1-s)R(q) - C(q)$$

$$(٢٢-٧) \quad \frac{d\pi}{dq} = (1-s)R'(q) - C'(q) = 0 \quad (1-s)R'(q) = C'(q)$$

حيث ان $0 < s < 1$ ويمكن الحصول على الربح الاعلى بمساواة MC بذلك الجزء مسن

MR الذي سمح للمحتكر بقاؤه باخذ الاشتقاق الاجمالي للمعادله (٢٢-٧) :

$$(1-s)R''(q) dq - R'(q) ds = C''(q) dq$$

$$(٢٣-٧) \quad \frac{dq}{ds} = \frac{R'(q)}{(1-s)R''(q) - C''(q)}$$

وبما ان شرط الدرجة الاولى يتطلب بان يكون MR موجبا وان شرط الدرجة الثانية يتطلب بان يكون مقام (٢٣-٧) سالبا ، فان $dq/ds < 0$.
ان فرض ضريبة قيمة على المبيعات ينتج عنها ، ايضا انخفاض في مستوى الانتاج مع زيادة في السعر .

المحتكر الذي يحصل على إيرادات عليا : The Revenue-Maximizing Monopolist

لقد اقترح البعض ان كثيرا من الوحدات الانتاجيه الكبير لا تعمل على الحصول على الربح الاعلى ، انما تعمل على الحصول على ايرادات البيع العليا تحت الشرط الذي ينص على ان الربح يساوى او يفوق مستوى ادنى مقبولا . فالمحتكر يرغب في الحصول على الحد الاعلى من $R(q)$ تحت شرط :

$$(٢٤-٧) \quad \pi = R(q) - C(q) \geq \pi^0$$

حيث ان π^0 تكون الربح الادنى القبول^(١) ان دالة الايرادات تكون مقعره فاذا كانت دالة التكلفة محدبه ، فان دالة الربح سوف تكون مقعرة ، وتكون تعاليل كون - تكرر مطبقه هنا على مسالة حصول المحتكر على الحد الاعلى ، وتكون دالة لاقرانج المناسبه هي :

$$L = R(q) + \lambda [R(q) - C(q) - \pi^0]$$

وتكون شروط كون - تكرر كالتالى :

$$\frac{\partial L}{\partial q} = R'(q) + \lambda [R'(q) - C'(q)] \leq 0 \quad q \geq 0 \quad q \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

(٢٥-٧)

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R(q) - C(q) - \pi^0 \geq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

افتراضه يوجد ربح اعلى وحيدا وغير مقيدا π^* عند النتائج q^* ، $R'(q^*) > 0$ وان $C''(q) > 0$ للقيم $q \geq q^*$ وان $R''(q) < 0$ للقيم $q > 0$ فاذا كانت $\pi^0 > \pi^*$ فان دالة المعادله (٢٤-٧) لا يمكن ان تتحقق وان مسالة الحصول على الحد الاعلى من الايرادات لا يكون لها حل . وسوف يوجد لها حل اذا كانت $\pi^0 \leq \pi^*$ فاذا كانت $\pi^0 = \pi^*$

(١) راجع كتاب William J. Baumol، تحت عنوان Business Behavior, Value and Growth في الباب السادس.

فان q^* تكون الحد الاعلى للإيرادات وبذلك تكون هي الحل حيث انها الناتج الوحيد الذي يحقق المعادلة (٢٤-٧) اما اذا كانت $\pi^0 < \pi^*$ فان الإيرادات سوف تزداد وان الربح سوف ينخفض كلما ازدادت q عن q^* وبهذا فان المحتكر سوف يواصل زيادة q حتى انه اما :

(١) يصل الى الحد الاعلى الغير مقيد للإيرادات $R(q)$ او انه
(٢) المعادلة (٢٤-٧) قد تحققت كمتساوية ، حسبما يكون ايها احدث عند
الانتاج الاقل فاذا تحقق (١) فان المعادلة (٢٥-٧) تنص على ان $R'(q) = 0$ وان $\lambda = 0$
اما اذا حدث وان كانت (٢) اقل من الناتج (١) فان $R'(q) > C'(q)$ وان $\lambda > 0$
وتعطينا: λ (وهي مضروب لاقترانج) المعدل الذي يمكن عند التوسع في الإيرادات لكل
ريال ضحي به من الربح .

مثال : اعتبر ، ثانيا المثال المعطى بالمعادلتين (١٠-٧) و (١١-٧) .
افترض ان $\pi^0 = 350 < \pi^* = 334$ فيكون الحد الاعلى الغير مقيد لـ $R(q)$ هو 625 والذي يتم
عندما تكون $q = 12.5$ بربح $\pi = 325$ وهذا الاختبار يمكن ابعاده لانه يعطى ربحا منخفضا
جدا . فمساواة (٢٤-٧) يكون :

$$(100q - 4q^2) - (50 + 20q) = 334$$

والذي يمكن كتابته على النحو التالي:

$$q^2 - 20q + 96 = 0$$

وهذه المعادلة التربيعية يكون لها الجذرين (٨) و (١٢) باجمالى الإيرادين التاليين
(٥٤٤) و (٦٢٤) بالترتيب وعلى هذا فان المحتكر الذى يعمل على الحصول على الحد
الاعلى من إيراداته سوف ينتج (١٢) وحده وسوف يبيعها بسعر ٥٢ ريالاً ليحصل على
إيرادات اجمالية قدرها (٦٢٤) ريالاً وربحاً قدره (٣٣٤) وبالمقارنة فان المحتكر
البسيط سوف ينتج (١٠) وحدات وسوف يبيعها بسعر (٦٠) ريالاً ليحصل على
إيرادات اجمالية قدرها (٦٠٠) ريالاً وربحاً قدره (٣٥٠) ريالاً ومن (٢٥-٧) نجد
ان $\lambda = 0.25$ وعلى هذا فان صاحب الوحدة الانتاجية يضحى بمعدل حدى مقدار (٤)
ريالات من الربح لكل ريال من الإيرادات .

وقد يغير المحتكر الذى يعمل على الحصول على الحد الاعلى من إيراداته ، بعكس
المحتكر البسيط من انتاجه اذا فرضت الحكومة الضرائب فاذا اعتبرنا الحالة التى يتقرر
فيها انتاجه بمساواة المعادلة (٢٤-٧) قبل وبعد فرض الضريبة وافترضنا ان الضريبة
 $0 < t < 1$ تكون جزءاً ثابتاً من الربح ، فان مساواة (٢٤-٧) تصبح :

$$(1-t)[R(q) - C(q)] = \pi^0 \quad (٢٦-٧)$$

وباخذ التفاضل الاجمالى للمعادلة (٢٦-٧) :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{R(q) - C(q)}{(1-t)[R'(q) - C'(q)]}$$

وبما ان قيمة q التي تحقق (٢٦-٧) تكون اكبر من q^* فان $R'(q) - C'(q)$ وبما ان $R(q) - C(q)$ وان $1-t$ يكونا موجبين فان $dq/dt < 0$ بمعنى ان اى زيادة فى معدل ضريبة الربح سوف تخفف الناتج الذى يؤدى الى تحقيق الحد الاعلى من الايرادات . فاذا تحقق ناتج الايرادات العليا الغير مقيد به ربحا على الاقل بكمبر المستوى الادنى المقبول قبل وبعد فرض الضريبة معا ، فان المحتكر سوف لا يغير هذا الانتاج .

٧ - ٤ احتكار المشتري : MONOPSONY

ان احتكار المشتري يشبه الاحتكار الى حد كبير معه هذه اوجه . فالسوق الاحتكارية يكون فيها بائع واحد فقط وهديد من المشتريين المتنافسين بينما يكون فى السوق الاحتكارية من جانب المشتري monopsonistic market مشتري واحد فقط وهديد من البائعين المتنافسين .

ان المحتكر المشتري monopsonist لا يستطيع شراء كميات غير محدوده من المواد الاولييه بسعر موحد ، فالسعر الذى يدفعه لكل كميته يشتريها تكون معطاه من منحى العرض لسوق المواد الاولييه . وبما ان منحنيات العرض لمعظم المواد الاولييه يكون ميلها موجبا فيكون السعر الذى يدفعه المحتكر المشتري بدلالة تزايديه بالنسبه للكمية التى يشتريها . فاذا اعتبرنا ، اولا الحاله التى يستخدم فيها المحتكر المشتري داخلا واحدا فقط والذى سوف نسميه العمل لانتاج السلعه التى سوف يبيعها فى سوق تنافسيه كامله فاكثالا لهذا نعتبر حالة المنتج الذى يكون المشتري الوحيد فى سوق العمل المحلي ثم يبيع انتاجه فى سوق تنافسيه على الصعيد العالمى او على الصعيد القومى فتكون دالة انتاجه بدلالة الكمية العمل (x) الموظفه :

$$q = h(x) \quad (٢٧-٢)$$

وتكون دالة الايرادات ودالة التكلفة كما كانت من قبل :

$$R = pq \quad C = rx$$

حيث ان r تكون اجرة العمل price of labor ولكن اجرة العمل الان تكون بدلالة تزايديه بالنسبه للكمية الموظفه :

$$r = g(x) \quad (٢٨-٢)$$

بحيث ان $dr/dx > 0$ ان التكلفة الحديه للعمل 'marginal cost of labor تعرف بانها معدل

تغير تكلفة العمل بالنسبة للكمية الموظفة (١) :

$$(٢٩-٧) \quad \frac{dC}{dx} = r + xg'(x)$$

وبما أن $g'(x) > 0$ فإن التكلفة الحدية للعمل غرق سعر للقيم $x > 0$ ويمكن التعبير عن ربح المحتكر المشتري بدلالة كمية العمل التي يقوم بتوظيفها :

$$(٣٠-٧) \quad \pi = R - C = ph(x) - rx$$

وبوضع اشتقاق (٣٠-٧) بالنسبة لـ x مساويا لصفر :

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{dx} &= ph'(x) - r - xg'(x) = 0 \\ (٣١-٧) \quad ph'(x) &= r + xg'(x) \end{aligned}$$

فنجد أن شرط الدرجة الأولى للربح الأعظم يتطلب أن يوظف جزءا من العمل حتى الوصول إلى نقطة يتساوى عندها قيمة انتاجه الحدى مع قيمة تكلفته الحدية . أما شرط الدرجة الثانية فإنه يتطلب أن يكون معدل التغير لقيمة الانتاج الحدى للعمل أقل من معدل التغير لتكلفته الحدية :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\pi}{dx^2} &= ph''(x) - 2g'(x) - xg''(x) < 0 \\ (٣٢-٧) \quad ph''(x) &< 2g'(x) + xg''(x) \end{aligned}$$

فنجد أن الناتج الأمثل لمحتكر الشراء وكذلك اجرة العمل يتضران بحل المعادلتين (٣١-٧) لقيم x ثم بالتعويض بالقيمة التي يتحقق عندها شرط الدرجة الثانية في المعادلتين (٢٧-٧) و (٢٨-٧) .

أن محتكر الشراء الذي يعمل على الحصول على الحد الأعلى من الربح (راجع الشكل ٤-٧) سوف يوظف x^0 وحدة عمل بمعدل اجر يساوى r^0 من المزايا .
أن المساواة بين اجرة العمل بقيمة انتاجها الحدى ، وهى نقطة التوازن لمصاحب الوحدة الانتاجية الذي يشتري العمل الذي يحتاج من سوق تنافسيه كامله ، سوف ينتج عنه توظيف x^1 وحدة عمل بمعدل اجر يساوى r^1 فيكون محتكر الشراء في وضع يجعله يوظف كمية أقل من العمال بمعدل اجر أقل .

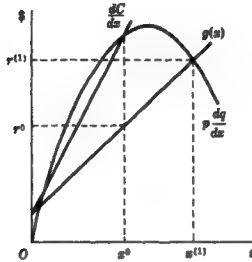
مثال : إذا كانت التكاليف والعمل والانتاج لمحتكر شراء كالتالى :

$$q = 15x^2 - 0.2x^3 \quad r = 144 + 23.4x$$

(١) يجب على القارئ ملاحظة أن التكلفة الحدية تكون معرفة هنا بالنسبة لكمية العمل الموظفة بدلا من كمية السلع المنتجة . فالشكل المختصر (MC) يكون معكوسا هنا بالنسبة للتكلفة الحدية بالنسبة لمستوى الناتج .

وكان المحتكر يبيع انتاجه في سوق تنافسيه كامله بسعر ثلاثة ريالات . فان دالة اليرادات الاجماليه ومعادله التكلفة :

$$R = 45x^2 - 0.6x^3 \quad C = 144x + 23.4x^2$$



شكل (٧ - ٤)

وبوضع قيمة الانتاج الحدى للعمل مساويا لتكلفته الحديه :

$$90x - 1.8x^2 = 144 + 46.8x$$

ومن هنا نحصل على المعادله التربيعيه التاليه :

$$1.8x^2 - 43.2x + 144 = 0$$

وجزئها هما $x = 4$ و $x = 20$ ويكون شرط الدرجة الثانيه :

$$90 - 3.6x < 46.8$$

قد تحقق لقيمة $x = 20$ ويكون الحل $x = 4$ هو وضع الحد الادنى للربح ويتميز

في $x = 20$ في الدالات المناسبه نحصل على :

$$q = 4400 \quad r = 612 \quad \pi = 960$$

فلو كان محتكر الشرا' ايضا محتكرا في السوق التي يبيع فيها انتاجه ، فان السعر الذي

سوف يحصل عليه يكون بدالة الكمية التي يبيعها :

$$p = F(q)$$

وربحه قد يعبر عنه بدلالة كمية العمل التي يوظفها :

$$\pi = pq - rx = F[h(x)]h(x) - rx$$

او بعد التبسيط :

$$\pi = R(x) - C(x) \quad (٣٣-٧)$$

حيث ان الايرادات الاجماليه والتكلفه الاجماليه قد وضعتا بدلالة كمية العمل الموظفه . وبوضع اشتقاق (٣٣-٧) يساوى لصفر ، نحصل على شرط الدرجة الاولى والذي يتطلب بان يكون معدل زياده الايرادات الاجماليه من توظيف وحدة اخرى من العمل (وهذه هى الايرادات الحديه لانتاج العمل) مساويا لتكلفتها الحديه اما شرط الدرجة الثانية فانه يتطلب بان تزداد الايرادات الحديه لانتاج العمل بسرعة اكبر من تكلفتها الحديه .

٧ - ٥ التنافس الاحتكاري : MONOPOLISTIC COMPETITION

ان مفهوم فكرة التنافس الاحتكاري يحتوى على عناصر من كل من الاحتكار والمنافسة الكامله ^(١) فتكون الفكرة قريبه من التنافس الكامل من حيث عدد البائعين لانه يوجد عدد كبير من البائعين لدرجة ان ما يقوم به البعض سوف لا يكون له اى اثر ملحوظ على منافسيه . وتكون الفكرة قريبه من الاحتكار لان كل بائع يمتلك منحى طلب يعيل سالب للنتائج المعيز الذى ينتجه .

فإذا افترضنا وجود منحنيات طلب خطيه ، فان سعر الذى يقبله كل بائع يكون بدلالة الكميات المباعه من كل من ال n وحدة انتاجيه داخل الوحدة الصناعيه بحيث ان :

$$p_k = A_k - a_k q_k - \sum_{i=1}^n b_{ki} q_i \quad k = 1, \dots, n \quad (٣٤-٧)$$

حيث ان $dp/dq_k = -b_{kk}$ يكون سالبا ولكنه يكون صغيرا عدديا ولتسهيل على فهم الفاهيم ، افترض ان جميع الوحدات الانتاجيه تمتلك دوال تكلفه وطلب متطابقه ، اى ان $b_{kk} = b$ لجميع قيم k وجميع قيم i ما عدا $k=i$ وان $A_k = A$ ، $a_k = a$. وانه كذلك $C_k(q_k) = C(q_k)$ لجميع k افترض ايضا ان الكميات المبدييه من خليط السعر والكميه متساويا لجميع الوحدات ، فانه تبعا لذلك يمكن ان نتكلم عن مثل لجميع الوحدات . وكذلك تساوى جميع الوحدات فى دوال التكلفه والايرادات وكذلك نفسى سلوكهم للحصول على الحدود العليا سواء من الربح او الايرادات ، بالرغم من منتجاتهم تكون لها تفاضل بين المستهلكين ، وبهذا يكون منحنى الطلب الذى يواجهه ممثل الوحدات :

$$p_k = A - a q_k - b \sum_{i=1}^n q_i \quad (٣٥-٧)$$

ويكون ربح ممثل الوحدات :

(١) راجع كتاب Edward H. Chamberlin تحت عنوان *The Theory of Monopolistic Competition*

$$(٣٦-٧) \quad \pi_k = q_k \left(A - a q_k - b \sum_{i=1}^n q_i \right) - C(q_k)$$

وبما ان b تكون صغيرة عدد يا ، وان تغير الكمية من جانب ممثل الوحدات سوف يؤثر على كل واحد من منافسيه الـ $(n-1)$ بنفس الدرجة ، فان تأثير ممثل الوحدات على سعر اى من منافسيه سوف يكون عديم الاهمية . وعلى هذا فان صاحب ممثل الوحدات يتصرف كما لو ان تصرفاته ليس لها اى تأثير على منافسيه وبساواة MR مع MC التابع له على الافتراض القائل بان مستويات الانتاج لعناصريه ستظل ثابتة وغير متغيرة .

$$(٣٧-٧) \quad A - 2a q_k - b \sum_{i=1}^n q_i = C'(q_k)$$

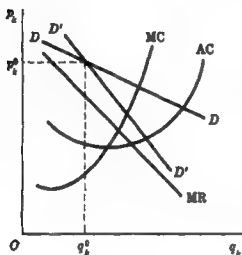
ويطلب شرط الدرجة الثانية بان يكون MC متزايدا بمرره اكبر من MR ويعتمد مستوى الانتاج الامثل للوحدة k . على مستوى الانتاج الاجمالى للمنافسين ويضمن افتراض التنازل انه اذا كان مربحا لممثل الوحدات ان يقوم بحركه معينه فانه يكون ايضا من المربح لبقية الوحدات ان تتبع بنفس الحركه .

وسوف تحاول جميع الوحدات بالحصول على الحد الاعلى من الربح فى نفس الوقت وسوف تكون التغيرات التى تطرأ على الكمية التى تنتجها الوحدة k مصحوبه بتغيرات مماثله لها من جميع الوحدات الموجوده فى الوحدة الصناعيه . وسوف لا يتحرك ممثل الوحدات على منحنى الطلب (٣٥-٧) والذي بنى على الافتراض بان مستويات الانتاج للوحدات الاخرى تظل ثابتة وغير متغيره ، سوف يبنى منحنى طلبه النافذ $effective$ بتعويض $q_k = q_i$ فى المعادله (٣٥-٧) :

$$(٣٨-٧) \quad p_k = A - [a + (n-1)b]q_k$$

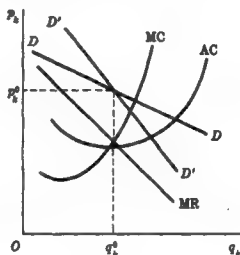
فالعدد $(n-1)$ من الوحدات عدد لا يستهان به من ناحية اهميته القصوى لان زياده واحد فى المائه فى مستوى انتاج احد المنافسين قد يسبب فى انخفاض p_k بنسبة 0.02 فى المائه ، ولكن فى نفس الوقت زياده واحد فى المائه فى كل 1000 وحدة انتاجيه قد يسبب فى انخفاض p_k بمقدار ٢٠ فى المائه واكثر 20 ان منحنى الطلب النافذ $effective demand curve$ فى المعادله (٣٨-٧) ، والذي وضع الحركات المتماثله والتي حدثت فى نفس الوقت من جميع البائعين يكون بجيلا اكثر اندازا من (٣٥-٧) ، وقد يتضح لمصاحب ممثل الوحدات انه غير قادر للتحرك على منحنى طلبها الانفرادى ، ولكن هذه المعلومه غير مفيداه بالنسبه له حيث انه ليس لديه اى تحكم فى مستوى انتاج منافسيه . اما الوحدات الاخرى فتستطيع تغيير مستويات انتاجها لانها تستطيع زياده ارباحها ، ولان تصرفاتهم ليست محكومة بتصرفات ممثل الوحدات . فيجب على ممثل الوحدات اغتنام هذه الفرصه لزيادة ربحه والتصرف تماما كما تصرفت الوحدات الاخرى .

أن مثل الوحدات ابتداءً من نقطة كمية وسعر مبدئية سوف يواجه منحني طلب منفصلين . ففي الشكل (٧-٥) نجد أن DD يكون منحني طلب لمثل الوحدات بالنسبة للتغيرات في مستوى انتاجه فقط ، وأن $D'D'$ يكون منحني طلبه النافذ بالنسبة للتغيرات المماثلة في مستويات الانتاج لبقية الوحدات الموجودة في الوحدة الصناعية فهذه بين المنحنيين يتقاطعان عند خليط الكمية والسعر المبدئي فكلما زادت جميع الوحدات مستويات انتاجها ، كان شكل وموقع المنحني $D'D'$ والذي يكون بدلالة q_k فقط انظر (٧-٢٦) ثابتا وغير متغيرا ، وكان DD والذي يعتد موقعه على انتاج جميع



(a)

شكل (٧-٥ أ)



(b)

شكل (٧-٥ ب)

الوحدات (انظر (٧-٣٥)) ينساب عبر $D'D'$ قاطعة دائما عند نقطة مستوى الانتاج الحالية لمثل الوحدات .

أن الوحدة الصناعية تصل الى التوازن عند يكون MR مساويا لـ MC لجميع الوحدات المتضمنة الوحدة الصناعية . فالمعادلات الـ n في المعادلة (٧-٣٧) يجب ان تحل لقيم الكميات المجهولة وعددها n ويمكن اثبات ان افتراض التفاضل ضمن بان (٧-٣٧) سوف ينتج انه مساوية مستويات الانتاج لجميع الوحدات وعددها n ولذلك فانه يمكن الحصول على الحل بتصميم $q_k = q_k$ في المعادلة (٧-٣٧) ثم حل المعادلة التالية لقيم q_k :

(١) هذا الحل لا يكون مثل حل سوق مشترك القلة ، والذي فيه واحد من الانسداد المشتركين يعرف ان (٧-٢٨) هو منحني الطلب المؤثر . في هذه الحالة تكون MR هي $A - [2a + 2(n-1)b]q_k$ او اقل $(n-1)bq_k$ ريلات عن كل مستوى خارج ، ويكون المستوى الخارج ، والذي عنده تتساوى قيمتي MR ، MC ، اقل من الذي تم الحصول عليه من حل (٧-٣٩) .

$$(٢٩-٧) \quad A - [2a + (n-1)h]q_k = C'(q_k)$$

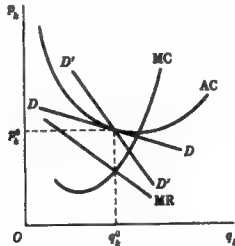
فالمعادله الاخير تـتضمـن معادله واحده بمجهول واحد ، ويكون الربح الاعلى وخليط السعر والكميه الامثل واحدا لجميع الوحدات . ان الشكل (٧-٥) يعطى وصفا هندسيا للتوازن على المدى القصير بحيث ان MR يساوى MC وان DD' يقطع $D'D'$ عند نقطة خليط السعر والكميه فى حالة التوازن .

ان ضربه الدخول والخروج من السوق تدفع كميه الربح الصافى لتصبح صفرا فى وحدة صناعيه تنافسيه كامله وقد يكون لها نفس التأثير فى المنافسه الاحتكاريه . فبممكن التعبير عن ربح ممثل الوحدات بدلالة انتاج وعدد الوحدات ضمن الوحدة الصناعيه اذا عوضنا من $q_k = q_i$ فى المعادله (٧-٣٦):

$$(٧-٤٠) \quad \pi_k = Aq_k - [a + (n-1)h]q_k^2 - C(q_k)$$

وبوضع π_k تساوى صفرا فان (٧-٣٩) و (٧-٤٠) يكونان نظاما يحتوى على معادلتين بمجهولين q_k و n ويحل هذين المعادلتين نحصل على قيم التوازن للمدى الطويل لمستوى الانتاج لممثل الوحدات وكذلك لعدد الوحدات .

ان موقع التوازن للمدى الطويل لممثل الوحدات يكون ممثلا فى الشكل (٧-٦) حيث ان وحدات جديده سوف تميل الى الدخول ضمن الوحدة الصناعيه اذا كان الربح الصافى لممثل الوحدات اكبر من صفر . فكلما ازداد عدد الوحدات ، كلما باع ممثل الوحدات مقدارا اقل من ناتجه باى سعر معطى ، وهذا يعنى ان كلا من DD' و $D'D'$ سوف يتزحزحا الى اليسار ويمكن الحصول على التوازن للمدى الطويل عند تساوى MR مع MC وعندما يكون DD ملاصقا لمنحنى معدل التكلفة AC (موضحا ان اجمالي الايرادات يساوى اجمالي التكلفة وعلى هذا فان الربح يساوى صفرا) . وكذلك عندما تنقطع نقطة التماس بـ $D'D'$.



شكل (٧-٦)

ان نقطة التوازن للعدى الطويل لمثل الوحدات تكون الى يسار ادنى نقطة على منحني ATC فهنا السعر يساوى معدل التكلفة ، كما هو حقيقة فى حالة مثل الوحدات تحت وضع المنافسة الكاملة ، ولكن السعر لا يساوى MC وبالمقارنة بنتائج المنافسة الكاملة نجد ان مثل الوحدات ينتج انتاجا اقل عند معدل اجمالى تكلفة اكبر .

SUMMARY

٧ - ٦ ملخص لما سبق

ان وحدة الانتاج الاحتكاريه تكون بنفسها وحده صناعيه ولا يؤثر عليها منافسة المضربين لها ، فالمحتكر يكون حرا فى اختيار اى خليط سعر وكمية يقع على منحني الطلب السالب الميل . وحيث ان اى توسع فى انتاجه يحدث عنه انخفاض فى السعر ، فان MR يكون اقل من سعره . ويتطلب شرط الدرجة الاولى للحصول على الحد الاطى من الربح المساواة بين MR و MC بينما يتطلب شرط الدرجة الثانيه بان يكون MC متزايدا بسرعه اكبر من MR فمندا قد مدنا دالة الانتاج بوضوح اكثر ، قام المحتكر لمحاولة الحصول على الربح الاطى بمساواة الايرادات الحديه له لانتاج لكل داخل بسعرها .

فلوان شروط الدرجة الثانيه قد تحققت ، فان المحتكر المميز سوف يحصل على ربح اعلى اذا ساوى بين MR فى كل سوق من الاسواق التى يتعامل معها ، وبين MC لانتاجه ككل فالمحتكر المميز الكامل يستطيع الحصول على كامل فائض المستهلك بالنسبه لانتاجه بمساواة سعره الحدى بتكلفته الحديه MC فالمحتكر الذى يكون له مصانع عدة يستطيع الحصول على الحد الاعلى من الربح بمساواة MC فى كل مصنع من مصانعهم . MR لانتاجه ككل . اما المحتكر الذى ينتج منتجات عدة فانه يساوى بين تكلفاته الحديه MCs وبين انتاجاته الحديه MRs حيث ان انتاجاته متعدد في هذه الحاله .

ولقد وجدنا انه لاضربيه القيمه ككل ولاضربيه الربح سوف يؤثران على خليط السعر والكميه الامثل للمحتكر الذى يعمل على الحصول على الحد الاعلى من الربح . نفرض اما ضربه معينه او ضربه قيمه سوف ينتج عنه انخفاض فى الانتاج وزيادة فى السعر .

اما المحتكر الذى يعمل على الحصول على الحد الاعلى من ايراداته فانه يحاول الحصول على ايرادات بيع ممكنه تحت شرط ان الربح لا يقل عن مستوى ادنى مقبول وقد ينتج عن فرض ضربه ربح انخفاض فى الناتج وزيادة فى السعر .

اما المحتكر المشتري فانه يواجه منحني طلب تصاعدي لاى داخل ، فقد يكون هو المشتري الوحيد لنوع معين من العمل . فتكلفته الحديه للعمل غرق معدل الاجر لانه لابد وان يزيد من معدل الاجر لجميع موظفيه من اجل التوسع فى التوظيف ولذا ، فان

شرط الدرجة الاولى للربح الاعلى يتطلب انه سوف يوظف عمالا للنقطه التى يتساوى عندها
قيمة انتاجه الحدى بتكلفته الحديه . فاذا كان المحتكر المشتري هو نفسه محتكرا فى سوق
الانتاج ، فان شرط الدرجة الاولى يتطلب بانه يساوى الايرادات الحديه لانتاج العمل
بتكلفته الحديه .

فى المنافسه الاحتكاريه يكون للبائع المنفرد منحنى طلب يعيل سالب لانتاجه المميز
ولكن هذا الانتاج المميز يكون بمثابة جزئ صغيرا جدا بالنسبه لاجل الى انتاج السوق
ولهذا فان تصرفاته لا يكون لها اى اثر ملحوظ على مضاربهه ولكن التحركات التى تحدث
فى نفس الوقت من جميع البائعين تسبب ترحزا فى منحنيات الطلب الفرديه . ويمكن
الحصول على الموازن للمدى القصير عندما يساوى كل بائع MR مع MC وسوف يسزاد
عدد الوحدات او ينخفض بدرجة كافيه لجعل الربح الصافى لمثل الوحدات يساوى صفرا
على المدى الطويل .

EXERCISES

7-1 Determine the maximum profit and the corresponding price and quantity for a monopolist whose demand and cost functions are $p = 20 - 0.5q$ and $C = 0.04q^3 - 1.94q^2 + 32.96q$ respectively.

7-2 A monopolist uses one input, X , which she purchases at the fixed price $r = 5$ to produce her output, Q . Her demand and production functions are $p = 85 - 3q$ and $q = 2\sqrt{x}$ respectively. Determine the values of p , q , and x at which the monopolist maximizes her profit.

7-3 Determine the maximum profit and the corresponding marginal price and quantity for a perfectly discriminating monopolist whose demand and cost functions are $p = 2200 - 60q$ and $C = 0.5q^3 - 61.5q^2 + 2740q$ respectively.

7-4 Let the demand and cost functions of a multiplant monopolist be $p = a - b(q_1 + q_2)$, $C_1 = a_1q_1 + \beta_1q_1^2$, and $C_2 = a_2q_2 + \beta_2q_2^2$ where all parameters are positive. Assume that an autonomous increase of demand increases the value of a , leaving the other parameters unchanged. Show that output will increase in both plants with a greater increase for the plant in which marginal cost is increasing less fast.

7-5 A revenue-maximizing monopolist requires a profit of at least 1500. Her demand and cost functions are $p = 304 - 2q$ and $C = 500 + 4q + 8q^2$. Determine her output level and price. Contrast these values with those that would be achieved under profit maximization.

7-6 Let the demand and cost functions of a monopolist be $p = 100 - 3q + 4\sqrt{A}$ and $C = 4q^2 + 10q + A$ where A is the level of her advertising expenditure. Find the values of A , q , and p that maximize profit.

7-7 A monopolist uses only labor, X , to produce her output, Q , which she sells in a competitive market at the fixed price $p = 2$. Her production and labor supply functions are $q = 6x + 3x^3 - 0.02x^4$ and $r = 60 + 3x$ respectively. Determine the values of x , q , and r at which she maximizes her profit. Is the monopolist's production function strictly concave in the neighborhood of her equilibrium production point?

7-8 Consider a market characterized by monopolistic competition. There are 101 firms with identical demand and cost functions:

$$p_k = 150 - q_k - 0.02 \sum_{i=1}^{101} q_i \quad C_k = 0.5q_k^2 - 20q_k + 270q_k \quad k = 1, \dots, 101$$

Determine the maximum profit and the corresponding price and quantity for a representative firm. Assume that the number of firms in the industry does not change.

7-9 A monopolist will construct a single plant to serve two spatially separated markets in which she can charge different prices without fear of competition or resale between markets. The markets are 40 miles apart and are connected by a highway. The monopolist may locate her plant at either of the markets or at some point along the highway. Let z and $(40 - z)$ be the distances of her plant from markets 1 and 2 respectively. The monopolist's demand and production cost functions are not affected by her location:

$$p_1 = 100 - 2q_1 \quad p_2 = 120 - 3q_2 \quad C = 80(q_1 + q_2) - (q_1 + q_2)^2$$

Determine optimal values for q_1 , q_2 , p_1 , p_2 , and z if the monopolist's transport costs are $T = 0.4zq_1 + 0.5(40 - z)q_2$.

SELECTED REFERENCES

- Chamberlin, E. H.: *The Theory of Monopolistic Competition* (8th ed., Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1962). The first statement of the problems of monopolistic competition and product differentiation. Geometry is used.
- Hadar, Josef: *Mathematical Theory of Economic Behavior* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1971). The theories of monopoly, monopsony, and monopolistic competition are covered in chaps. 6-8. Intermediate mathematics and geometry are used.
- Kuenne, Robert E. (ed.): *Monopolistic Competition Theory* (New York: Wiley, 1967). These essays in honor of E. H. Chamberlin cover many aspects of his theory. Most of the essays use little mathematics beyond geometry.
- Robinson, Joan: *The Economics of Imperfect Competition* (London: Macmillan, 1933). A pioneer study of monopoly, price discrimination, and monopsony in which many modern concepts were developed. The analysis is generally limited to geometry.

الفصل الثامن

الاحتكار الثنائي ، واحتكار القلة ، واحتكار بين طرفين

DUOPOLY, OLIGOPOLY, AND BILATERAL MONOPOLY

ان انماط السوق التي نوقشت حتى الان تتميز بوجود اما بائع واحد فقط (وهي حالة الاحتكار) او بوجود عدد كبير جدا من البائعين (وهي حالة المنافسة الكاملة) والمنافسة الاحتكارية (ففي الحالة الاولى لا يوجد للبائع المحتكر منافسا ولذلك فانسه لا يحتاج ان يهتم بنتائج تصرفاته على منافسيه اما في الحالة الاخيره فان البائعين باعداد كبيرة بحيث ان تصرف اي بائع منهم سوف يكون لها تأثيرا غير ملحوظ على منافسيه .

اما السوق التي يوجد فيها عدد صغير من البائعين ولكنه اكثر من واحد قد تقدم لنا بعض المصاعب فالسوق التي يوجد فيها بائعين فقط تمثل حالة الاحتكار الثنائي للبيع *duopoly* والسوق التي يكون فيها عدد صغير ولكنه اكبر من اثنين من البائعين تمثل حالة احتكار القلة *oligopoly* فاذا اعتبرنا السوق الذي تكون فيه المنتجات متجانسة فان المنافسة بين المشتريين سوف يشتت عنها سعر موحد لجميع البائعين لكل حجم كل واحد من البائعين كبير بالنسبة للسوق لدرجة ان تصرفات سوف يكون لها اثر ملحوظ على منافسيه . فتغيير الانتاج من قبل احد البائعين سوف يؤثر على السعر الذي يستلمه الجميع فنتائج مثل هذه المحاولات لتغيير السعر من قبل احد البائعين تكون غير مضمونة . فتنافسيه قد يتبعوا هذا التغيير . وقد لا يتبعوه ولكنه لا يستطيع افتراض انهم سوف لا يلاحظون هذا التغيير . فنتائج تحركات البائعين فقط في حالة الاحتكار الثنائي او حركات القلة من البائعين في حالة احتكار القلة سوف تعتمد على ردود فعل منافسيهم . ولذلك فانسه لا يمكن تعريف العلاقات العامة بين السعر والمبيعات للوحده الانتاجيه الواحده ، لان طبيعة ردود الفعل غير معروفه تامه . وحيث ان الوحده الانتاجيه يفرضها لاتطلبك التحكم في جميع المتغيرات التي تؤثر على الربح ، فانه من غير المحتمل وجود عملية حصول على ربح اعلى غير مقيد . انه يوجد عدد كبير جدا من انماط واشكال ردود لاسواق

البائعين المحتكرين وكذلك البائعين القلة وكتبية لهذا فانه يوجد عدد كبير جدا من النظريات في هذين الموضوعين . وسوف نناقش في هذا الباب عدد قليل جدا من اشكال وانماط ردود الفعل المحتملة . ففي الجزء (١-٨) نستعرض نظريات معينة من الاحتكار الثنائي واحتكار القلة والذين ينتجون سلعا متجانسة . اما الاحتكار الثنائي واحتكار القلة والذين ينتجون سلعا متفاضلة فانه نوقش في الجزء (٢-٨) اما الذين يقومون بهذين النوعين من الاحتكار (هما : البائعين المحتكرين فقط Duopsony والمحتكرين القلة oligopsony فقد نوقشت حالتها في الجزء (٣-٨) باختصار . اما نظريات المقامرة theory of games وتطبيقاتها على الاسواق باعداد بسيطة من المشاركين فانها يكونا موضوع الجزء (٤-٨) اما الجزء (٥-٨) فانه يضم بعض المفاهيم والافكار التي استعرضت في هذا الباب وتطبيقها على حالات واحتكار الطرفين (بائع واحد ومشتري واحد) bilateral monopoly .

٨ - ١ الاحتكار الثنائي من احتكار القلة : الإنتاج المتجانس

DUOPOLY AND OLIGOPOLY: HOMOGENEOUS PRODUCT

ان الوحدة الصناعية ذات الاحتكار الثنائي تحتوي على بائعين اثنين فقط ، اما الوحدة الصناعية ذات احتكار القلة فانها تحتوي على عدد صغير كافي بحيث ان تصرفات اى بائع مفرد سوف يكون لها تأثير ملحوظا على منافسيه انه ليس كافيا لتمييز احتكار القلة من المنافسة الكاملة لمنتجات متجانسة او من حالة البائعين العدة في المنافسة الاحتكارية لمنتجات متفاضلة على اساس عدد الباعة فقط . فالسمة المميزة الباعة هي استقلالهم تصرفات البائعين المختطف . فاذا كان تأثير قرار احد البائعين بتغيير كمية انتاجه على ربح الاخرين، $\partial \pi / \partial q_j$ تأثيرا طفيفا ، فان الوحدة الصناعية سوف تحقق المتطلبات الرئيسية للمنافسة الكاملة او لحالة تعدد البائعين في المنافسة الاحتكارية . فاذا كانت $\partial \pi / \partial q_j$ بحجم ملحوظ ، فان الحالة قد تكون حالة احتكار ثنائي او حالة احتكار القلة .

ان خليط السعر والكمية وبيع الاحتكار الثنائي واحتكار القلة سوف يعتمدان على تصرفات جميع اعضاء السوق فالاحتكار الثنائي او احتكار القلة يستطيع التحكم في مستوى انتاجه (او سعره ، اذا كانت منتجاته متفاضلة) ولكنه ليس له تحكم مباشر على المتصرفات الاخرى التي تؤثر على ربحه فربح كل بائع يكون نتيجة لتداخل قرارات جميع اعضاء السوق . انه لا يوجد افتراضات سلوكية عامة مقبولة لحالات احتكار القلة والاحتكار الثنائي بعكس وجودها في حالات المنافسة الكاملة والاحتكارية ، ولكن توجد حلول عديدة مختلفة لسوق احتكار القلة والاحتكار الثنائي ، وكل واحد من هذه الحلول يكون مبنيا على افتراضات سلوكية مختلفة .

ففى هذا الجز* ، سوف نكون حلا مقابلا لشرط المساواة بين السعر وتكلفته الحدية MC فى حالة المنافسة الكاملة ، ثم نقارن بالنتائج المناظرة لثلاثة حلول استملى افتراضات سلوكيه معينه وكل واحد من هذه الحلول صمم لسوق الاحتكار الثانى، ولكنه قد يصمم لسوق احتكار القله .

The Quasi-competitive Solution

الحل الشبه تنافسى

اعتبر السوق التى يوجد فيها وحدتين انتاجيتين يقوما بانتاج سلع متجانسه فمعكوس دالة الطلب تعطى السعر بدلالة الكمية الاجماليه المباه :

$$(١-٨) \quad p = F(q_1 + q_2)$$

حيث ان q_1 و q_2 يمثلان مستوى انتاج الاحتكار الثانى ويعتمد اجمالى ايرادات كلا من المبتكرين على مستوى انتاجه ومستوى انتاجه المضارب له :

$$R_1 = q_1 F(q_1 + q_2) = R_1(q_1, q_2)$$

$$R_2 = q_2 F(q_1 + q_2) = R_2(q_1, q_2)$$

اما الربح فانه يساوى اجمالى الايرادات ناقصا التكلفة لكل مبتكر والتى تعتمد على مستوى انتاجه هو فقط :

$$(٢-٨) \quad \pi_1 = R_1(q_1, q_2) - C_1(q_1)$$

$$\pi_2 = R_2(q_1, q_2) - C_2(q_2)$$

يتميز حل المنافسة الكامله بالمساواة بين السعر و MC ويعرف الحل الشبه تنافسى لسوقا تحتويه على عدد بسيط من البائعين على انه الحل الذى سوف يتحقق اذا اتبع كل بائع القاعدة التنافسيه ، ونحصل عليه بحل المعادلتين التاليتين لقيم p, q_1, q_2

$$p = F(q_1 + q_2) = C'_1(q_1)$$

$$(٣-٨) \quad p = F(q_1 + q_2) = C'_2(q_2)$$

وقد يتحقق الحل الشبه التنافسى ، وقد لا يتحقق ، فى اى سوق معينه ففى كسلا الحالتين فانه يعدنا بقياس (او نعط) نقارن به حلول حالات وجود عدد بسيط من البائعين . ومثل هذه المقارنات تكون مهمة جدا وخصوصا فى اقتصاديات الرفاهيه welfare economics (انظر الباب ١١) .

مثال : افترض ان دوال التكلفة والطلب تكون كالتالى :

$$(٤-٨) \quad p = 100 - 0.5(q_1 + q_2) \quad C_1 = 5q_1 \quad C_2 = 0.5q_2^2$$

وبحل (٣-٨) بحالة هذا المثال وبالتعويض فى (٢-٨) نحصل على الحل الشبه تنافسى :

$$(٥-٨) \quad q_1 = 185 \quad q_2 = 5 \quad p = 5 \quad \pi_1 = 0 \quad \pi_2 = 12.5$$

وهذا الحل قد توفرن بالحلول التي سوف تلى فى الاجزاء المتبقية فى الباب .

The Collusion Solution

حل التواطؤ (أو التامر)

قد يتجلى للمحتكرين الثنائيين (أو ثلة المحتكرين) اعتماد كل منهما على الاخر فيقررا توحيد تصرفاتهما من اجل الحصول على الحد الاعلى من اجمالى ربح الوحده الانتاجيه وبهذا يكون مستوى الانتاج لكليهما تحت تحكم واحد وتكون الوحده الانتاجيه فى الحقيقه ، احتكاريه . افترض ان :

$$R(q_1 + q_2) = R_1(q_1, q_2) + R_2(q_1, q_2) = (q_1 + q_2)F(q_1 + q_2)$$

وافترض ايضا ان اجمالى الربح يكون :

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = R(q_1 + q_2) - C_1(q_1) - C_2(q_2)$$

وهو نفس (١٦-٧) والذي يمثل دالة الربح للمحتكر صاحب الصنعتين وعلى هذا فان شروط الدرجه الاولى تتطلب بان يكون MC لكل منتج مساويا لـ MR للناتج ككل .

اعتبر المثال المعطى بالمعادله (٤-٨) فيكون ربح الوحده الصناعيه كالتالى :

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = 100(q_1 + q_2) - 0.5(q_1 + q_2)^2 - 5q_1 - 0.5q_2^2$$

وبوضع اشتقاقات π الجزئيه مساويه لصفر :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 95 - q_1 - q_2 = 0 \quad \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 100 - q_1 - 2q_2 = 0$$

وبحل لقيمتى q_1 ، q_2 ثم التمييز فى دالة الربح ودوال الطلب :

$$(٦-٨) \quad q_1 = 90 \quad q_2 = 5 \quad p = 52.5 \quad \pi_1 = 4275 \quad \pi_2 = 250$$

ومقارنته بالحل الشبه تنافسى والمعطى بالمعادله (٥-٨) نجد ان اجمالى الناتج اقل بكثير والسعر اعلى بكثير والربح اعلى بكثير ، ولكن التكاليف الحديه فى الوحده تنتج الانتاجيتين متساويه فى الحاليتين ، ولكن هذه التكاليف الحديه الان تساوى MR للوحده الصناعيه بدلا من السعر . وتكون مستويات الربح للمعادله (٦-٨) هى تلك المعطاة بدوال الربح الفرديه . ويكون تقسيم الربح الاجمالى قابل للمفاوضه بين البائعين المحتكرين .

The Cournot Solution

حل كورنوت

ان الحل التقليدى لمسأله الاحتكار الثنائى (او احتكار القلة) يلتصق دائما بالاسم او قسيتين كورنوت Augustin Cournot الاقتصادى الفرنسى فى اوائل القرن التاسع عشر الميلادى . وكما فى السابق ، فانه يفترض ان وحدتى الانتاج تقوم بانتاج سلع

متجانسه • ونفس الافتراض السلوكي الاساسي لحل كورنوت على ان كلا من المحتكرين (في حالة الاحتكار الثنائي) يعمل على الحصول على الحد الاعلى من الربح بافتراض ان - الكمية المنتجة من قبل منافسيه غير قابله للتغير بالنسبة لقرار الكمية التي ينتجها هو نفسه فالمحتكر الاول (ونعطيه الرمز 1) يعمل على الحصول على الحد الاعلى من الربح π_1 بالنسبة ل q_1 معاملا q_2 كثابت ، واما المحتكر الثاني (ونرمز له ب II) فانه يحاول الحصول على الربح الاعلى π_2 بالنسبة ل q_2 معاملا q_1 كثابت •

وبوضع الاشتقاقات الجزئية المناسبة للمعادله (٢-٨) تساوى صفرا :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \frac{\partial R_1}{\partial q_1} - \frac{dC_1}{dq_1} &= 0 & \frac{\partial R_1}{\partial q_1} &= \frac{dC_1}{dq_1} \\ (٢-٨) & & & \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \frac{\partial R_2}{\partial q_2} - \frac{dC_2}{dq_2} &= 0 & \frac{\partial R_2}{\partial q_2} &= \frac{dC_2}{dq_2} \end{aligned}$$

ان شروط الدرجة الاولى تتطلب بان يساوى كل محتكر منها MC بـ MR الخاصين به ، ويطلب شرط الدرجة الثانيه لكل محتكر منها انه : اما ان يكون :

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} = \frac{\partial^2 R_i}{\partial q_i^2} - \frac{d^2 C_i}{dq_i^2} < 0 \quad i = 1, 2$$

اوانه اما ان يكون :

$$(٨-٨) \quad \frac{\partial^2 R_i}{\partial q_i^2} < \frac{d^2 C_i}{dq_i^2} \quad i = 1, 2$$

فكل محتكر منها يجد ان انتاجه الحدى MR. يتزايد بسرعة اقل من تكلفته الحديـه MC •

ان عملية الحصول على الربح الاعلى لحل كورنوت ليست هي نفسها في حالة المحتكر صاحب المصنعين ، حيث ان الفرد الواحد يتحكم في قيم كلا من مستويي الانتاج •
فهنا سوف يقوم كل محتكر ثنائي بالعمل للحصول على الربح الاعلى بالنسبة للتصغير الوحيد تحت تصرفه • ويتبع هذا ان الانتاجات الحديـه MRs للمحتكر الثنائي ليست بالضرورة مستويه فاذا وضعنا $q = q_1 + q_2$ ووضعنا كذلك $\frac{\partial q}{\partial q_1} = \frac{\partial q}{\partial q_2} = 1$ فـ ان MRs للمحتكر الثنائي تكون :

$$\frac{\partial R_i}{\partial q} = p + q_i \frac{dp}{dq} \quad i = 1, 2$$

ومن هذا نجد ان المحتكر الثنائي الذي يملك انتاجا اكبر سوف يكون له MR اصغر •

ان سوق الاحتكار الثنائي يكون في توازن اذا كانت قيمتي q_1 و q_2 بحيث ان كل محتكر ثنائي يعمل على الحصول على الربح الاعلى معطى انتاج الاخر وانه لا يرغب في تغيير انتاجه • ويمكن الحصول على حل التوازن بحل المعادله (٢-٨) بقيمتي

q_1 و q_2 اذا تحققت المعادله (٨-٨) وتستطيع ان نصف طريقة عمل السوق بتوسع اكثر اذا قدما خطوة اضافيه مثل الحل لستويات الانتاج التوازنيه . ونقرر دوال ردود الفعل . والتي تعبر عن انتاج كل مشترك ثنائى بدلالة انتاج مضاريه ، بحل المعادله الاولى من (٨-٧) لقيمة q_1 ثم حل المعادله الثانيه لقيمة :

$$\begin{aligned} q_1 &= \Psi_1(q_2) \\ q_2 &= \Psi_2(q_1) \end{aligned} \quad (٨-٩)$$

فدالة رد فعل المشترك الثنائى الاول (والذي رمزنا له بـ I) تعطى العلائقه بين q_1 و q_2 بالخاصيه التى تنص على ان لاي قيمه معينه لـ q_2 فان القيمة المقابله لـ q_1 سوف تمكنه من الحصول على الحد الاعلى من الربح π_1 . اما دالة رد فعل المشترك الثنائى الثانى (والذي رمزنا له بـ II) فانها تعطى قيمة q_2 التى تمكنه من الحصول على الحد الاعلى من الربح π_2 لاي قيمه معينه لـ q_1 فيكون حل التوازن عبارة عن زوج من القيم q_1^* و q_2^* والتي تحقق كلا من دوال رد الفعل .

مثال : اذا كانت دوال التكلفة والطلب على النحو التالى :

$$p = A - B(q_1 + q_2) \quad C_1 = a_1 q_1 + b_1 q_1^2 \quad C_2 = a_2 q_2 + b_2 q_2^2$$

بحيث ان جميع المتغيرات بقيم ثابتة تكون موجبه ، فان ربح كل واحد من الاحتكاريين يكون :

$$\pi_1 = Aq_1 - B(q_1 + q_2)q_1 - a_1 q_1 - b_1 q_1^2$$

$$\pi_2 = Aq_2 - B(q_1 + q_2)q_2 - a_2 q_2 - b_2 q_2^2$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئيه المناسبه تساوى صفر :

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = A - B(2q_1 + q_2) - a_1 - 2b_1 q_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = A - B(q_1 + 2q_2) - a_2 - 2b_2 q_2 = 0$$

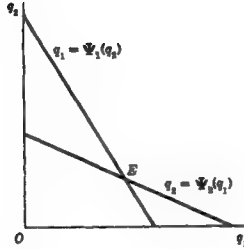
وتكون دالتى رد الفعل المقابله :

$$(٨-١٠) \quad q_1 = \frac{A - a_1}{2(B + b_1)} - \frac{B}{2(B + b_1)} q_2 \quad q_2 = \frac{A - a_2}{2(B + b_2)} - \frac{B}{2(B + b_2)} q_1$$

وبما ان B ، b_1 ، b_2 جميعا موجبين فان اى ارتفاع فى انتاج اى من المشتركين —————
الثنائيين سوف يسبب انخفاض فى الانتاج الاكمل للمحتر الثانى ويوضح الشكل (٨-١)
دوال رد الفعل . ومن هذا الشكل يتضح ان هذه الدوال تكون دوال خطيه ويعطينا
حل المعادله (٨-١٠) توازنا ممثلا فى نقطة تقاطع منحنى رد الفعل ، مثل نقطه E
على الشكل (٨-١) ان حل (٨-١٠) يكون :

$$q_1 = \frac{2(B+b_2)(A-a_1) - B(A-a_2)}{4(B+b_1)(B+b_2) - B^2}$$

$$q_2 = \frac{2(B+b_1)(A-a_2) - B(A-a_1)}{4(B+b_1)(B+b_2) - B^2}$$



شكل (١ - ٨)

وتتحقق شروط الدرجة الثانية بدوال الطلب الخطية ودوال التكلفة التربيعية :

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial q_1^2} = -2(B+b_1) < 0 \quad \frac{\partial^2 \pi_2}{\partial q_2^2} = -2(B+b_2) < 0$$

وبالمعنى إلى المثال الموضح في المعادلة (٨-٤) يمكن للتقاربي التحقق من أن دوال رد الفعل تكون :

$$(٨-١١) \quad q_1 = 95 - 0.5q_2 \quad q_2 = 50 - 0.25q_1$$

وأن حل التوازن يكون :

$$q_1 = 80 \quad q_2 = 30 \quad p = 45 \quad \pi_1 = 3200 \quad \pi_2 = 900$$

وبالمقارنة مع الحل الشبه تنافسي (٨-٥) نجد أن المحسّن الثنائي لكورنوت ينتج انتاجا اجماليا اصغر بسعر مرتفع وبيع أكثر . وبالمقارنة بحل التامر (او التواطؤ) (٨-٦) نجد أنه يوضح انتاجا اجماليا اكبر بسعر اقل وبيع اقل . ويوضح من هذا انه باعقاف مناسب من كيفية توزيع ربح الوحدة الصناعية ، سوف يكون كلا من المحسّنين احسن وضعاً فسي حالة حل التواطؤ من حل كورنوت وأن السهل اثبات أن حل التواطؤ ليس هو الحل الوحيد الذي يفضل حل كورنوت فإذا قام على سبيل المثال ، المحسّن الثنائي الاول I بانتاج 79 وحدة من q_1 والمحسّن II قام بانتاج 29 وحدة من q_2 (وحسده واحدة اقل من حل كورنوت) فان ارباحهما على التوالي سوف يكونا : $\pi_1 = 3239$ $\pi_2 = 913.5$

وطى هذا فانه بالرغم من ان حل كورنوت يكون حلا مثاليا لكل من المحتكرين بافتراض ان الاخر ينتج انتاجا توازنا يوافق حل كورنوت ، فانه لا يكون حلا مثاليا بالنسبة للتغيرات المشتركة والتغيرات التي تم تنسيقها بين المحتكرين بالنسبة لمستويات الانتاج .

ان الافتراض السلوكي الرئيسي لحل كورنوت يكون عادة متناحيا وضعيا حيث ان كل محتكر بائع يتصرف كما لو ان انتاج خصمه محدودا ولكن هذا ليس هو واقع الحال لانه من اجل التوصل الى نقطة توازن فان المحتكرين البائعين سوف يقوموا بعمليات متتالية من الانضباط والتغير (راجع التمرين ٩-٨) ، بحيث ان احد البائعين المحتكرين يقرر كمية انتاجه وهذا سوف يدعوا المحتكر الاخر الى تعديل وضبط انتاجه هو وبالتالي فان المحتكر الاول سوف يقوم هو بدوره بتعديل انتاجه نتيجة لتغيير المحتكر الثاني لانتاجه وبالتالي فان المحتكر الثاني سوف يقوم بتعديل انتاجه كذلك وهكذا . فانه ليس من المحتمل ان يفترض كلا منهما أن قرارات كمية الانتاج لاتؤثر على قرارات كمية انتاج خصمه اذا كان كل تعديل في كمية الانتاج يتبعها في الحال تعديل لكمية انتاج الخصم .

فإذا كنا نفكر ان التوصل الى التوازن للخصمين يكون في نفس الوقت فان كمية الانتاج القصوى للمحتكر البائع الاول لاتمثل بالمعادله :

$q_1 = \Psi_1(q_2)$ ولكن تعطيها المعادله $q_1 = \Psi_1[\Psi_2(q_1)]$ وبالمثل للمحتكر البائع الثاني لان كل واحد منهما يعرف تماما سلوك الاخر وتصرفاته وكبدل لهذا الافتراض فاننا نفترض ان كل واحد من المحتكرين البائعين سوف يقوم بالحصول على الربح الاقصى على افتراض ان سعر خصمه سوف يظل بدون تغيير ولكن هذا غير منطقي بالنسبة لاني انتاج متجانس homogeneous product وطى المصوم فان المحتكرين البائعين والمحتكرين القلائل يعرفون تماما انهم يعتمدون على بعضهم البعض .

وفي بعض الحالات فان حل كورنوت يتطابق تماما مع الحل الشبه تنافسي وذلك كلما ازداد عدد الوحدات الانتاجيه .

مثال : افترض انه يوجد العدد n من الوحدات الانتاجيه بالمستويات الانتاجيه التاليه (q_1, q_2, \dots, q_n) ثم افترض ان معكوس دالة الطلب تكون معطاه بالمعادله التاليه $p = aq$ بحيث ان $q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ وان $a > 0$ وان $-1 < b < 0$ وإذا افترضنا ايضا ان جميع الوحدات الانتاجيه موحده (لا اختلاف بينها) بحيث ان تكلفة الوحدة الانتاجيه الواحده يكون معطاه بالمعادله $c_i = c$ وان $i = 1, \dots, n$ وبذا فانه اذا وحد انتاجا متجانسا وان جميع الوحدات الانتاجيه لها نفس التكلفة فان كل وحده انتاجيه سوف تقوم بانتاج المستوى $q_i = q/n$ وللحصول على حل كورنوت فاننا نقوم بتفاضل المعادله التاليه

بالنسبة للمقدار q_i :

$$\pi_i = aq^b q_i - cq_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

وتصبح المعادلة كالتالى :

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = aq^b + baq^{b-1} q_i - c = 0$$

وبتمويض $q = nq_i$ نحصل على :

$$q = \frac{c^{1/b}}{(a + ab/n)^{1/b}} \quad \text{وكذلك نحصل على} \quad q_i = \frac{c^{1/b}}{n^{(b-1)/b} (an + ab)^{1/b}}$$

ولكلما اقتربت n من $q \rightarrow \infty$ فإن q تقترب من $(c/a)^{1/b}$ وهذا هو الحل الشبه تنافسى والذي يمكن التأكد منه بحل المعادلة $aq^b = c$ وفى هذه الحالة يكون $p = MC$ للحصول على q .

The Stackelberg Solution

حل ستاكل بيرج

أن ربح كل بائع مشترك ، عامه يكون بدلالة مستويات الانتاج للمحتكرين :

$$(12-8) \quad \pi_1 = h_1(q_1, q_2) \quad \pi_2 = h_2(q_1, q_2)$$

فالحصول على حل كورنوت فاننا نحصل على الربح الاقصى من π_1 بالنسبة للمكسبه q_1 فافترض ان q_2 ثابتة ، ونحصل على الربح الاقصى من π_2 بالنسبة للمكسبه q_2 فافترض ان q_1 ثابتة وقد يفترض كل بائع مشترك ، عامه بعض الافتراضات الاخرى من خصمه وانذا قضا بتطبيق صلية الحصول على الربح الاقصى فان هذه الصليه التى يقوم بهها البائعين المحتكرين تتطلب الاتى :

$$(13-8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} &= \frac{\partial h_1}{\partial q_1} + \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} &= \frac{\partial h_2}{\partial q_2} + \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0 \end{aligned}$$

ومثل التعميرين $\partial q_1 / \partial q_2$ ، $\partial q_2 / \partial q_1$ التغيرات المتداخلة التى يفترضها كلامن البائعين المحتكرين من خصمه . وفى حالة ان كل بائع مشترك قد قام بافتراض افتراضات خاطئه من خصمه فأن المعادلتين فى (13-8) سوف لاتمثل أى تحسن ملحوظ فى موديل كورنوت .

ان من اهم افتراضات التغيرات المتداخلة تلك الموجوده ضمن تحليل القيسناده والاتباع *leadership and followership analysis* والتى قام الاقتصادى الالماني هنرك فون ستاكل بيرج بصياغتها وتركيبها فالتابع *follower* سوف يعتقد بدالة رد الفعل المعطاه بالمعادله (9-8) بحيث يقوم بتعديل مستوى انتاجه للحصول على الحد الاقصى من

الربح واضعاً في تقديره كمية انتاج خصمه والتي تكون معروفة لديه والذي يعتبره كرائد له . أما الرائد او القائد *leader* فإنه لا يعتقد بدالة رد الفعل انما يفترض ان خصمه سوف يتصرف كانه تابع له وبذلك فإن الرائد سوف يحاول الحصول على الحد الاعلى من الربح واضعاً في اعتباره انه يعرف تماماً دالة رد فعل خصمه والذي يعتبره كتابع له .

فاذا قررت الوحدة الانتاجية I ان تلعب دور الرائد فإنه يحتم عليها ان نفترض ان دالة رد فعل الوحدة الانتاجية II حقيق ومؤكد وسوف يقوم بتعويض هذه الدالة ضمن دالة ربحه بحيث ان :

$$\pi_1 = h_1(q_1, \Psi(q_1))$$

وبذا يصبح ربح الوحدة الانتاجية I بدلالة q_1 فقط ويمكن الحصول على حسده الأقصى بالنسبة لهذا المتغير الواحد فقط . وتستطيع الوحدة الانتاجية II تقرير ربحها الأقصى من الرائد بافتراض ان الوحدة الانتاجية I تتقيد بدالة رد فعلها هي وانها (أى الوحدة الانتاجية I) تتصرف كأنها تابعة وتتحصل على الربح الأقصى للوحدة الانتاجية I من التابع بتعويض المستوى الأقصى لانتاج الوحدة الانتاجية II في دالة رد فعل الوحدة الانتاجية I وتتحصل على الحد الأقصى لربح II من التابع بتعويض المستوى الأقصى للوحدة الانتاجية I في دالة رد فعل الوحدة الانتاجية II .

فكل واحد من الباشعيين المحتملين يقرر مستوى ربحه الأقصى من وجهة النظر على انه تابع ورائد وانه يرغب في ان يلعب الدور الذي يدر عليه الكمية القصوى من الربح ، وبهذا فإنه يكون هناك احتمالات أربعة للانتاج :

(١) ترغب الوحدة الانتاجية I في أن تكون هي الرائدة وأن تكون الوحدة الانتاجية II هي التابعة .

(٢) II ترغب في ان تكون هي الرائدة و I هي التابعة .

(٣) الاثنان يرغبان في ان يكونا الرائد أو أن

(٤) أن الاثنان يرغبان في أن يكونا التابع .

وبهذا فان الناتج (١) سوف ينتج عنه تصرفات متناسقة وسوف يتقرر من خلاله الحصول على توازن محدد ^(١) حيث أن I يفترض ان II سوف يتصرف كتابع له ، وأنه سوف يفعل هذا بالتأكيد ، وان II سوف يفترض ايضاً وان I سوف يتصرف كرائد وأنه سوف ينفصل هذا بالتأكيد . وبالمثل فان (٢) سوف ينتج عنه توازن محدد . أما في حالة أن كلاهما يرغب في أن يكون تابعا فإن توقعاتهما سوف لا تتحقق ، لان كل واحد منهما يفترض ان

(١) في هذه الحالة يتحقق شرطى الحد الاقصى الاول والثاني .

الآخر سوف يتصرف كرائد وعلى هذا فإن طبيعته أن يعدلها من توقعاتها فنجد أنه تحت افتراضات ستاكيل بهيرق * فإن حل كورنوت سوف يتحقق إذا رغب كل واحد منهما في أن يتصرف كتابع واضعاً في اعتباره أن خصمه سوف يتصرف كتابع أيضاً ، وألا فإن أحدهما لابد وأن يغير من سلوكه ويتصرف كرائد قبل التوصل إلى التوازن .

أما إذا رغب كل واحد منهما أن يتصرف كرائد ، فإن كل واحد منهما سوف يفترض أن دالة رد الفعل سوف تتحكم في تصرفاته ولكن في الحقيقة سوف لا يتبع أي واحد منهما دالة رد فعله وهذا نواجه حالة عدم توازن لمسألة ستاكيل بهيرق ، ولقد اعتقد ستاكيل بهيرق أن حالة عدم التوازن هذه هي التي تحدث في أغلب الأحيان وأن النتيجة النهائية لعدم التوازن هذا لا يمكن التنبؤ بها مسبقاً فلو كان ستاكيل بهيرق محققاً فإن هذا حاله سوف ينتج عنها حالة حرب اقتصادية ولا يمكن تحقيق التوازن إلا إذا خضع أحد المعتكرين لقيادة خصمه أو أغاقتا حصل بينهما *

مثال : بالعودة إلى المثال المعطى بالمعادلة (٨-٤) فأتينا نحمل على الربح الأقصى للوحدة الانتاجية الرائدة I بتمهيز دالة رد الفعل للوحدة II والمعطى بالمعادلة (٨-١١) في معادلة ربح الوحدة II :

$$\pi_1 = 100q_1 - 0.5q_1^2 - 0.5q_1(50 - 0.25q_1) - 5q_1 \\ = 70q_1 - 0.375q_1^2$$

وبالقيام بعطيه الحصول على الربح الأقصى بالنسبة للكمية q_1 :

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = 70 - 0.75q_1 = 0 \quad q_1 = 93\frac{1}{3} \quad \pi_1 = 3266\frac{2}{3}$$

وبالمثل في حالة الوحدة الانتاجية II :

$$\pi_2 = 100q_2 - 0.5q_2^2 - 0.5q_2(95 - 0.5q_2) - 0.5q_2^2 \\ = 52.5q_2 - 0.75q_2^2$$

$$\frac{d\pi_2}{dq_2} = 52.5 - 1.5q_2 = 0 \quad q_2 = 35 \quad \pi_2 = 918.75$$

وللحصول على الربح الأقصى للوحدة I كتابع تقرر أولاً انتاجه بتمهيز انتاج الرائد (وهو 35 وحدة) في دالة رد فعل التابع (٨-١١) ثم نحسب ربحه على النحو التالي :

$$q_1 = 95 - 0.5q_2 = 77.5$$

$$\pi_1 = 3003.125$$

وبالمثل نعوض بالقيمة 93 في دالة رد فعل الوحدة II ثم نحسب ربحه على النحو التالي :

$$q_2 = 50 - 0.25q_1 = 26\frac{1}{2} \quad \pi_2 = 711\frac{1}{2}$$

ومن هذا نجد أن كلا من البائعين المحتكرين يتحصل على ربح أكثر من كونه رائدا ولهذا فإن كلاهما يرفض أن يكون هو الرائد فهذا المثال والذي يحدد كورنيسوت بسهولة ، أصبح يمثل حالة عدم توازن بالنسبة لستاكيل بيرق وذلك نتيجة للتغيير الذي حدث في الافتراضات السلوكية الأساسية .

٨ - ٢ الاحتكار الثنائي واحتكار القلة : تنوع المنتجات :

DUOPOLY AND OLIGOPOLY: DIFFERENTIATED PRODUCTS

قد يحدث تنوع في السلع والمنتجات في حالة الاحتكار الثنائي واحتكار القلة كما هو الحال بالنسبة للمنافسة الاحتكارية .

Product Differentiation

تنوع المنتجات :

إن المنتج للسلع المتنوعة في سوق يكون فيه ثلة من المحتكرين يواجه منحى طلب خاص به وحده بحيث أن الكمية التي يستطيع بيعها تعتمد على قرارات الأسعار من جميع الأنحاء الموجودين في السوق .

$$(١٤-٨) \quad q_i = f_i(p_1, p_2, \dots, p_n) \quad i = 1, \dots, n$$

حيث أن $\partial q_i / \partial p_i < 0$ وأن $\partial q_i / \partial p_j > 0$ لجميع $i \neq j$.
فأى ارتفاع في السعر من طرف أحد البائعين (وليكن البائع i) مع بقاء الأسعار الأخرى ثابتة ينتج عنه انخفاض في مستوى إنتاج البائع i لأن بعض المستهلكين الذين يتعاملون معه سوف يتحولون إلى منافسيه ولكن إذا رغب بعض البائعين الآخرين في رفع أسعار سلعهم فإن البائع سوف يكون قادرا على بيع كمية أكبر بسعر ثابت نتيجة لتحول بعض المستهلكين من البائعين المنافسين له . أما في حالة المنافسة الاحتكارية فإن نتائج ما يقوم به أحد المنتجين على الآخرين تكون طفيفة جدا بين بقية المنافسين ولكن في حالة الاحتكار الثنائي واحتكار القلة فإن هذه النتائج تنتشر بشكل طفيف بين مجموعة أصغر من المنتجين .

أن المنتجين الفرادى يستطيعون التحكم في السعر أو الكمية وعلى هذا فإن دوال الطلب يمكن التعبير عنها في صورة المقلوب بحيث أن مستويات الإنتاج تكون كتغيرات

(١) : مستقلة

$$(١٥-٨) \quad p_i = F_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad i = 1, \dots, n$$

كما أن جميع الاشتقاقات الجزئية للمعادلة (١٥-٨) تكون سالبة . فلو أن البائع i رفع من إنتاجه مع بقاء إنتاج الآخرين ثابت ، فإن p_i سوف تنخفض لأن زيادة الكمية المنتجة سوف تسبب في انخفاض في السعر فلو فرضنا أن بائعا آخر قرر زيادة إنتاجه فانه بالطبع سوف يتحمل على سعر اقل لمنتجاته وبالتالي فان سعر البائع i ايضا سوف ينخفض من اجل المحافظة على ثبات الكمية q_i عند مستوا معين . والا فان بعضا من زبائنه سوف يتحولون الى البائع الذي يبيع بسعر اقل ومن السهل تعديل حلول كورنت ، وسنأكل بيرق والتواطى collusion لحالة المنتجات المتنوعة بالتمهض من $p = F(q_1 + q_2)$ بدوال الطلب المفردة .

$$p_1 = F_1(q_1, q_2) \quad p_2 = F_2(q_1, q_2)$$

ويمكن كذلك توسيع رقعة التحليل لتشمل الحالات التي تكون فيها الاسعار كمفترقات مستقلة :

$$q_1 = f_1(p_1, p_2) \quad q_2 = f_2(p_1, p_2)$$

وتكون الارباح بدلالة الكميات :

$$\pi_1 = h_1(q_1, q_2) \quad \pi_2 = h_2(q_1, q_2)$$

وبالتعويض :

$$\pi_1 = h_1[f_1(p_1, p_2), f_2(p_1, p_2)] = H_1(p_1, p_2)$$

$$\pi_2 = h_2[f_1(p_1, p_2), f_2(p_1, p_2)] = H_2(p_1, p_2)$$

وهذا يكون الربح لكل واحد من المحتكرين بدلالة كلا السعيرين وتصبح عملية الحصول على الحد الاطلى من الربح بدلالة السعيرين ايضا .

ففى حالة المنتجات المتنوعة فان الربح فى حالة الاحتكار الثنائى قد يعتمد على المعامل المتصرفه على الاعلانات فاذا كانت الاعلانات مؤثرة وات بنتيجة ، فانها تسمح للبائع ببيع كمية اكبر بسعر معطى او بكمية محددة بسعر اقل وتكون منحنيات الطلب كالآتى :

$$p_1 = F_1(q_1, q_2, A_1, A_2) \quad p_2 = F_2(q_1, q_2, A_1, A_2)$$

(١) يمكن الحصول على دوال الطلب بحيث أنها تصف الحالة التي يكون فيها السعر هو المتغير المستقل لبعض البائعين وتكون الكمية هي المتغير المستقل للبعض الآخر وهذا يكون المتغير المعتمد على غيره لكل بائع بدلالة المتغيرات المستقلة لجميع البائعين .

حيث ان A_1 و A_2 تتلآن مقدارى مصروفات الاعلان للباح الاول والثانى وتصبح
دالتى ربحها كالتالى :

$$\pi_1 = q_1 F_1(q_1, q_2, A_1, A_2) - C_1(q_1) - A_1$$

$$\pi_2 = q_2 F_2(q_1, q_2, A_1, A_2) - C_2(q_2) - A_2$$

وبهذا يمكن لكل واحد من المحتكرين ان يتحمل على الحد الاطى من الربح
بدلالة مصروفات على الاعلان بالاضافه الى مستوى انتاجه .

الحل الخاص بتقاسم السوق : The Market-Shares Solution

يوجد هناك نموذج اخر للتغيرات الافتراضيه بحيث ان المحتكر الثانى (ونرمز له
بالرقم II) يرفق فى المحافظه على نصيب ثابت من اجمالى البيع للمنتجات المتشابهه بفرض
التنظر من نتائج تصرفاته على ارباحه المدى القصير . وسوف يكون اهتمامه منصبا على
المميزات فى المدى الطويل والتي سوف يستخلصها من المحافظه على نصيبه المعطى من
السوق . فإى تغيير فى الكمية التى ينتجها المحتكر الاول I سوف يتبعه حالا تغيير
نسبى من جانب المحتكر الثانى II فتكون العلاقة التالىيه صحيحة ومحققة :

$$(١٦-٨) \quad \frac{q_2}{q_1 + q_2} = k \quad q_2 = \frac{k q_1}{1 - k}$$

بحيث ان k تمثل النصيب الذى يطمح II فى الحصول عليه فى السوق . ان المحتكر
I يمثل هنا رائدا للسوق حيث ان تصرفاته سوف يتبعها تصرفا مقررًا مسبقًا من المحتكر
II وسوف تكون دالة الطلب المعكسبه للمحتكر I هى :
 $p_1 = F_1(q_1, q_2)$ وتكون دالة ربحه هى :

$$\pi_1 = q_1 F_1(q_1, q_2) - C_1(q_1)$$

وبالتعويض من (١٦-٨) بالكيمه q_2 نحصل على :

$$\pi_1 = q_1 F_1 \left(q_1, \frac{k q_1}{1 - k} \right) - C_1(q_1)$$

فتصبح دالة الربح للمحتكر I بدلالة q_1 فقط ويمكن الحصول على الحد الاطى من
الربح بدلالة متغير واحد فقط مادام المحتكر II يتصرف بطريقة تحفظ له البقاء على
نصيبه من السوق .

مثال : افترض ان دالى الطلب والتكلفه للمحتكر هما كالتالى :

$$p_1 = 100 - 2q_1 - q_2 \quad C_1 = 2.5q_1^2$$

فاذا افترضنا ان $k = \frac{1}{3}$ فان $q_2 = 0.5q_1$ يكون ربح المحتكر I :

$$\pi_1 = q_1(100 - 2q_1 - 0.5q_2) - 2.5q_1^2 = 100q_1 - 5q_1^2$$

وبوضع الاشتقاق الجزئي للربح π_1 مساويا للصفر، وبحل المعادلة للكمية q_1 وبالتعميم في العلاقات السابقة، نحصل على :

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = 100 - 10q_1 = 0$$

$$q_1 = 10 \quad q_2 = 5 \quad p_1 = 75 \quad \pi_1 = 500$$

وبهذا يكون المحتكر I قد تمكن من الحصول على الحد الاقصى من الربح بإنتاج عشرة وحدات وكان رد فعل المحتكر II هو إنتاج خمسة وحدات .

الحل الخاص بمنحنى الطلب المتوى (المعرج) :

The Kinked-Demand-Curve Solution

تتصف بعض اسواق احتكار القلة واسواق الاحتكار الثنائي بتغيرات السعر المتكررة . فوحدات الانتاج في مثل هذه الاسواق لا يقومون بتغيير اسعارهم وكميات انتاجهم كرد فعل للتغيرات البسيطة في منحنيات التكلفة كما تنص عليه التحاليل السابقة للاسواق. ان حل منحنى الطلب المتوى (المعرج) يمثل تحليلا نظريا مطابقا لهذا السلوك الملحوظ . مبتدئا من اسعار وكميات قرر انتاجها مسبقا ، يستطيع احد المحتكرين ان يخفض سعره (يزيد من كميته انتاجه) بافتراض ان المحتكر الآخر سوف يخفض سعره (يزيد من كميته انتاجه) من اجل الحفاظ على نصيبه من السوق . فلو ان احدا من المحتكرين رفع سعره . فان خصمه سوف يحافظ على سعره بدون اى تغيير. وذلك يحافظ على نصيبه من السوق وسوف يتبع هذا انخفاض في السعر وليس ارتفاعا في السعر .

مثال : افترض ان دالتي الطلب والتكلفة لكل واحد من المحتكرين كالتالي :

$$\begin{aligned} p_1 &= 100 - 2q_1 - q_2 & C_1 &= 2.5q_1^2 \\ (17-8) \quad p_2 &= 95 - q_1 - 3q_2 & C_2 &= 25q_2^2 \end{aligned}$$

ولنفترض ان السعريين والكميتين الحاليه والموجوده في السوق كالتالي :

$$\begin{aligned} p_1 &= 70 & q_1 &= 10 \\ p_2 &= 55 & q_2 &= 10 \end{aligned} \quad (1)$$

فلو ان المحتكر I رفع سعره ، فان المحتكر II سوف لا يغير سعره ويتركه عند

(1) يمكن للقارىء من التحقق من ان هذا الخليط من السعر والكمية يمثل حلا مسبقا لحلول كورنوت ويكون $MC = MR$ لكل واحد من المحتكرين I, II بافتراض ان مستوى انتاج خصمه يظل بدون تغيير اما طريقة الحصول على هذا الربح من السعر والكمية فلا يهتما هنا في هذه الحالة (حالة منحنى الطلب المتوى) .

(٥٥ رايلا) وبالتعميق بالسعر $p_2 = 55$ إلى دالة طلب المحكتر II والمعطاه بالمعادلة (١٧-٨) للحصول على q_2 :

$$(١٨-٨) \quad q_2 = \frac{40 - q_1}{3}$$

ولهذا فإن مستوى انتاج II ونصيبه من السوق سوف يزداد كلما زاد I في سعره وذلك بفعل انخفاض مستوى انتاجه . ويتعمق قيمة q_2 المعطاه بالمعادلة (١٨-٨) في دالة طلب المحكتر I والمعطاه بالمعادلة (١٧-٧) نحصل على :

$$(١٩-٨) \quad p_1 = \frac{260 - 5q_1}{3}$$

ف نجد ان سعر I يكون بدلالة q_1 فقط اذا افترضنا ان II سوف يحافظ على سعره عند (٥٥ رايلا) فاننا بدانا من الوضع الاولى ، فان (١٩-٨) تكون محققة فقط للحالة $q_1 < 70$ ، $p_1 < 70$ ويمكن اشتقاق دالة MR للمحكتر I في حالة ارتفاع السعر بتكوين دالة اجمالي التكلفة من المعادلة (١٩-٨) :

$$R_1 = q_1 \left(\frac{260 - 5q_1}{3} \right)$$

$$(٢٠-٨) \quad \frac{dR_1}{dq_1} = \frac{260 - 10q_1}{3} \quad \text{وكذلك}$$

وهذا يكون MR للمحكتر الاول ، عند انتاج $q_1 = 10$ في حالة ارتفاع السعر هو 53 رايلا .

ان الدالى الطلب و MR المعطاه بالمعادلتين (١٩-٨) و (٢٠-٨) لا تحققان اذا خفض المحكتر I من سعره . ففي هذه الحالة ، سوف يقوم المحكتر II بتباطؤ بتخفيض سعره بنسبه كانيه تسمح له بالحفاظ على نصف اجمالي حجم المبيعات . فالمحكتر II لا بد وان يزداد من مستوى انتاجه بنفس النسبه الذى زاد بها المحكتر I من اجل المحافظة على نصيبه في السوق بحيث ان :

$q_2 = q_1$ ، ويتعمق q_1 في دالة طلب المحكتر I والمعطاه بالمعادلة (١٧-٨) نحصل على :

$$(٢١-٨) \quad p_1 = 100 - 3q_1$$

وهذا يكون سعر المحكتر I بدلالة q_1 فقط اذا اطينا الحقيقة بان المحكتر سوف يحافظ على نصيبه من السوق وتكون دالة الطلب المعطاه بالمعادله

(٢١-٨) محققة للقيمتين $p_1 > 70$ ، $q_1 > 10$ ويمكن اشتقاق دالة MR للمحكتر I

حالة ارتفاع السعر يتكون دالة اجمالي الإيرادات من المعادلة (٢١-٨) على النحو التالي :

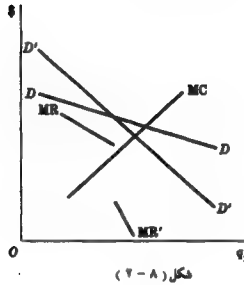
$$R_1 = q_1(100 - 3q_1)$$

$$\frac{dR_1}{dq_1} = 100 - 6q_1 \quad \text{وكذلك}$$

وبهذا يكون MR للمحتكر الاول في حالة ارتفاع السعر هو (٤٠ ريالاً) بانتاج $q_1 = 10$.

ان الوضع الاولى يمثل نقطه الربح العظمى للمحتكر I ويكون MC لمستوى الانتاج لعشرة وحدات هو ٥٠ ريالاً . ولا يستطيع زيادة ربحه بزيادة سعره (تخفيض مستوى انتاجه) لان MR تتجاوز MC اي ان $(50 > 53)$ وهذا الفرق سوف يزداد بزيادة السعر . ولا يستطيع كذلك من تخفيض سعره (زيادة مستوى انتاجه) لان MR اقل من MC (اي ان : $(40 < 50)$ وهذا الفرق سوف يزداد بانخفاض في السعر ويكون مزيج السعر والكمية الاوليه حدا اقصى لاي قيمه لـ MC من 53 الى 40 ريالاً وى انخفاض في MC الخاص به بكمية لاتزيد عن ١٠ ريالات سوف لاتجعله يرغب في تخفيض سعره والتوسع في مبيعاته . وبالعكس فان زيادة MC بكمية لاتزيد عن 3 ريالاً سوف لاتدفعه لزيادة سعره وتقليص مبيعاته .

وبطريقه الرسم ، نجد ان منحنى الطلب الاخرى effective demand curve للمحتكر I يكون ملتويًا kinked ويكون منحنى MR الاخرى غير متصل عند مستوى انتاجه الاولسى . ويكون منحنى طلبه هو $D'D'$ (انظر الشكل (٢-٨)) اذا كان رد فعل المحتكر II هو المحافظه على نصيبه من السوق . اما في حالة محافظه المحتكر II على سعره فان منحنى الطلب للمحتكر 1 يكون DD . وبهذا يكون المنحنى DD محققاً لزيادة نفسى السعر ، و $D'D'$ محققاً لانخفاض في السعر . ويتبع منحنى MR الاخرى منحنى MR المقابل للمنحنى DD على ايسار من مستوى انتاجه الاولى وكذلك منحنى MR المقابل $D'D'$ على اليمين من مستوى انتاجه الاولى . وبهذا فان المحتكر I ويكون غير قادراً على مساواة MR بـ MC .



٨ - ٣ احتكار الشراء بواسطة مشترين واحتكار القلة في حالة الشراء

DUOPSONY AND OLIGOPSONY

لقد ناقشنا حالة المحتكر في الجزء ٢-٤ في بعض اسواق الداخلة inputs يكون عدد المشترين اكبر من واحد ، ولكنه لا يزال قليلا لدرجة ان افتراض قيام الشراء بالتنافس باسعار ثابتة لا يمكن الحفاظ عليه فمثل هذه الاسواق تناقش في هذا الجزء . نعرف السوق التي يكون فيها اثنين من المشترين فقط بانها تمثل حالة احتكار الشراء بواسطة مشترين *duopsony* وكذلك نعرف السوق التي يكون فيها عدد قليل من المشترين ولكنه اكبر من اثنين بأنه يمثل حالة احتكار القلة في حالة الشراء . *oligopsony* .

ان حالة السوق التي يكون فيها عدد قليل من المشترين تشبه السوق التي يكون فيها عدد قليل من البائعين فلا يوجد افتراضات سلوكية للمنافسة مقبولة من الجميع . فكل مشترى يستطيع التحكم في مستوى مشترياته ولكنه سوف يتأثر بوضوح بتصرفات المشترين الآخرين . فمعظم نظريات الاحتكار الثنائي واحتكار القلة والتي تعطي المنتجات الغير متفاضلة يمكن تكييفها لتغطي احتكار الشراء بواسطة مشترين واحتكار القلة في حالة الشراء .

فعلى سبيل المثال والتوضيح نعتبر هنا نوعية معدلة من حل كورنوت افترض وجود سوق عام محلية مكونة من وحدتين للإنتاج تشتري من بائعين عدة يتعاملون بالمنافسة . وكالسابق فان سعر العمل يكون دالة تزايديه بالنسبة للكمية :

$$r = g(x_1 + x_2)$$

حيث ان x_1, x_2 يمثلان الكميات التي اشترتها الوحدات الإنتاجيتين ونفترض ان كل مشتري سوف يستخدم العمل فقط لإنتاج السلعة التي سوف يبيعها في سوق تنافسيه على مستوى قومي وبسعر ثابت فتكون دالتي الإنتاج هما :

$$q_1 = h_1(x_1) \quad q_2 = h_2(x_2)$$

ويكون ربحهما هو :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= p_1 h_1(x_1) - g(x_1 + x_2) x_1 \\ \pi_2 &= p_2 h_2(x_2) - g(x_1 + x_2) x_2 \end{aligned} \quad (٢٢-٨)$$

وبهذا يكون قد طبقنا الفرض السلوكي الاساسي لكورنوت لان كل واحد من الاثنين المشتريين سوف يعمل على الحصول على الحد الاعلى من الربح على افتراض ان الآخر غير متأسرا بتصرفاته هو . وبوضع الاشتقاقات الجزئية المناسبة للمعادلة (٢٢-٨) مساوية لصفر نجد:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} = p_1 h'_1(x_1) - r - x_1 g'(x_1 + x_2) = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} = p_2 h'_2(x_2) - r - x_2 g'(x_1 + x_2) = 0$$

ومن هاتين المعادلتين نحصل على :

$$\begin{aligned} p_1 h'_1(x_1) &= r + x_1 g'(x_1 + x_2) \\ p_2 h'_2(x_2) &= r + x_2 g'(x_1 + x_2) \end{aligned} \quad (٢٣-٨)$$

فكل واحد من المشتريين المحتكرين سوف يساوي قيمة حدة الإنتاجى بحدة التكلفة للدواخل وسوف لا يكون له نفس حد التكلفة عند التوازن الا اذا كانت $x_1 = x_2$ فالذى يمتلك مستوى مشتروات اكبر يكون له حد التكلفة الاعلى . اما شروط الدرجة الثانية فانها تأسى راسا من تعميم المعادلة (٢٢-٧) ان قيمة الإنتاج الحديه لكل مشتري محتكر يجب ان تزيد بدرجة اقل سرعة من تكلفته الحديه .

تعمير دوال ردود فعل الدواخل عن مشتريات كل واحد من المشتريين المحتكرين بدلالة مشتروات الآخر وتتحصل عليها بحل المعادلة الاولى من معادلات (٢٣-٨) لقيم x_1 والمعادلة الثانية لقيم x_2 .

$$x_1 = \Phi_1(x_2)$$

$$x_2 = \Phi_2(x_1)$$

ويشبه مدى الحلول المحتملة في هذه الحالة لذلك في حالة الاحتكار الثنائي ويمكن كذلك ادخال التغيرات التخمينية والقيادة والتبعيه من نوع ستاغل بيرج ضمنها .

THEORY OF GAMES

٨ - ٤ نظريات المجموعات (الألعاب)

ان نظريات احتكار القلة والاحتكار الثنائي المتنافسه في الجزئين (٨-١) و (٨-٢) تؤدي الى حلول رياضييه متناسكه باستخدام حساب التفاضل ولكنها فرضه للاستلزام احتوائها على اقتراعات شوائبه من ما تظنه الوحدات الانتاجيه من بعضها البعض ، وعن ردود ، فعلها . فالنظريات الرياضيه (للمجموعات تمثل طريقه بديله للتطبيق على عدد صغير من حالات السوق المعتمده كل واحد فيها على الاخر وتناقش في الاجزاء الثلاثه من هذا الباب المجموعات الغير تعاونيه او المتنافسيه مطلة في لعبة يكون من شخصين بحصيله تساوى صفر *two-person, zero-sum games* اما المجموعه التعاونيه *Cooperative games* والى يظهر كل مشترك فيها اهتمامه بالتصرف والسلوك الجماعي التعاوني المشترك نفس تناقش في الجزئين الاخيرين .

اللعبة المكونه من شخصين وبحصيله تساوى صفر :

Two-Person, Zero-Sum Games

ان اى لعبة قد تكون مكونه من حركات متتاليه كما هو الحال في لعبة الشطرنج او قد تكون مكونه من حرك واحد لكل لاعب من المشتركين في اللعبة فالتعاقيل العاليه سوف تكون محدده بالالامات ذات الحركه الواحده : *single-move games* . ففي هذا المضمار نعرف كلمه استراتيجيه (خطه) بانها مواصفات حركه معينه لاحد المشاركين في اللعبه . نقطه المحتكر المشعري *duopolist* تتكون من اختيار قيمه معينه لكل واحد من المتغيرات الموجوده تحت تحكمه فاذا كان السعر هو المتغير الوحيد ، فان الخطه سوف تتكون من اختيار سعر معين فاذا كان السعر ومصاريف الاعلان هما المتغيران ، فان الخطه سوف تتكون من احتكار قيمتين محددين لكلا من السعر ومصاريف الاعلان ويفترض في ان يكون لكل مشترك هدا محدودا من الخطط مع ان العدد قد يكون كبيرا جدا . وهذا الافتراض يلغى احتمال التغير المتواصل للمتغيرات الحركيه *action variables* وسوف تكون نتيجه لعبه المحتكر الثنائي ، بمعنى ان الربح المكتسب من كل مشترك سوف يتغير من التكلفة المباشره *relevant cost* وطلاقات الطلب وذلك حالما يختار كل واحد من المشتركين خطه .

تعتمد في تصنيف انواع الاعراب على معيارين اساسيين هما :

(١) عدد المشتركين (٢) حصيلة اللعبه .

فالاعراب الاول مجرد احصاء لعدد الاشخاص المشاركين في اللعبه بهما الحسم

المتضاربة فقد يوجد شخص واحد ، شخمان ، ثلاثة اشخاص ، وبالتعميم ، قد يوجد عدد n من الاشخاص المشاركين فى كل لعبة (او مجموعة) اما المعيار الثانى فانه يسمح بان يكون هناك علامة مميزة بين الالعب التى تنتهى بحصيلة تساوى صفر وتلك التى تنتهى بحصيلة تساوى صفر وتلك التى تنتهى بحصيلة لا تساوى صفر :

zero-sum and non-zero-sum games

فاللعبة المنتهية بحصيلة تساوى صفر هى تلك المجموعة التى يكون حصيلة ناتجها الجبرى (مثلا ، الارباح) للمشاركين مساوية لصفر لكل خليط محتمل من الخطط (الاستراتيجيات)^(١) فاللعبات التى يشترك فيها شخمان وتكون حصيلة ناتجها صفرا يجب ان تكون تنافسية منتظمة (غير تعاونية) لانه اذا كان احد اللاعبين يخسر دائما فان ذلك يعتبر ربحا للاخرين المشاركين فى اللعبة فلا يكون هناك اى مكان للتعاون .

ان اللعبة المكونة من شخص واحد وبحصيلة صفر تكون غير متمعة لان اللاعب لا يربح شيئا بغض النظر عن اختياره للخطط التى يستخدمها . فالمحتكر او محتكر الشرا قد يعتبر كالشارك الوحيد فى اللعبة المكونة من شخص واحد وبحصيلة غير صفر . ويمكن تطبيق اللعبة المكونة من شخصين بحصيلة صفر على سوق احتكار الشرا والذى تكون فيه فئمة (ربح) احد المشتركين مساوية دائما للفئمة المطلقة لخسارة الاخر . وعموما اذا ، كان اللاعب I يملك n من الخطط فان الحصيلة المحتملة للعبة تولفها صفوفه الربح التالى :

$$(2-8) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث ان a_{ij} تمثل ربح اللاعب I اذا استخدم الخطه رقم i واستخدم خصمه (اللاعب II) الخطه رقم j . وبما ان حصيلة هذه اللعبة صفر ، فان الربح المقابل الذى كسبه اللاعب II هو $-a_{ij}$.

مثال : اعتبر مصفوفة الربح التالى :

$$(2-8) \quad \begin{bmatrix} 8 & 40 & 20 & 5 \\ 10 & 30 & -10 & -8 \end{bmatrix}$$

(١) ان اللعبة التى تكون حصيلتها صفرا هى حالة خاصة من اللعبة التى تكون حصيلتها ثابتة constant-sum game . بمعنى انها اللعبة التى تكون حصيلتها ثابتة لكل خليط من الخطط . فكل لعبة بحصيلة ثابتة يمكن تحويلها الى لعبة بحصيلة صفر وبالعكس .

فإذا استخدم اللاعب I خطته الاولى واستخدم اللاعب II خطته الثانية فان اللاعب I سوف يربح 40 والثاني يربح -40 ولكنه اذا استخدم I خطته الثانية واستخدم II خطته الثالثة فان I سوف يربح (-10) و II يربح 10 .

ان مشكلة اتخاذ قرار المحتكر المشتري تتكون من اختيار الخطه المطبوعه في optimal strategy فاللاعب I يربح في الحصيله (40) في الصف الاول والعمود الثاني من الصفوفه (٢٥-٨) واللاعب II يربح في الحصيله -10 في الصف الثاني والعمود الثالث . وتعتمد الحصيله النهائي على الخطط لكلا المحتكرين ، ولا يحظك اى واحد منهما من ان يفرض رغبته فاذا اختار اللاعب I خطته الاولى ، فان اللاعب II قد يختار خطته الرابعه وتكون الحصيله 5 بدلا من 40 ولكن اذا اختار اللاعب II خطته الثالثه فان اللاعب I قد يختار خطته الاولى ، وتكون الحصيله 20 بدلا من -10 . ان نظريات المجموعات تفرض انعاطا سلوكيه تسمح بتقرير التوازن في حالات مثل هذه . فاللاعب I يخشى ان يكتشف اللاعب II خطته المختاره ومن ثم يربح في " اللعب بحذر " فاذا اختار اللاعب I الخطه رقم ١ فاقبل ربح يحصل عليه وبالتالي يكون اقصى ربح بالنسبه لللاعب II يعطيه اصغر عنصر في الصف رقم ١ من صفوفه الربح ويؤمزه بالرمز $\min a_{ij}$ القيمة الصغرى لـ a_{ij} . فهذا هو الربح المتوقع لللاعب I من توظيفه للخطه رقم ١ اذا كان ما يخشاه من معرفة اللاعب II وسلوكه قد تحقق . ويكون ربح I اكبر من هذا المقدار اذا فشل II (في اختيار الخطه المناسبه . فاللاعب I يربح في تحقيق الحد الاعلى من اقل كليه يتوقع الحصول عليها maximize his minimum / ولذلك فان (I) سوف يختار الخطه ١ التي تعطيه اكبر قيمة من القيم الصغرى وتكون الحصيله المتوقعه هي : $\max \min a_{ij}$ فهو لا يستطيع ان يكسب اقل ربحا ولكنه قد يربح اكثر .

وبالمثل فان اللاعب II يتملك نفس الخشيه من معلومات وسلوك اللاعب I فاذا وظف II خطته رقم ١ فانه يخشى ان يوظف I الخطه المقابله لأكبر عنصر في العمود رقم ١ من صفوفه الربح $\max a_{ij}$ ولهذا فان II سوف يختار الخطه ٢ التي يكون فيها $\max a_{ij}$ هو الاصغر ، ويكون ربحه المتوقع هو $\min \max a_{ij}$. فتكون قرارات المحتكر المشتري متوافقه ويتحقق التوازن اذا كان :

$$\max \min a_{ij} = \min \max a_{ij} \quad (٢٦-٨)$$

فاذا اخترنا k لتكون الرقم الاستدلالي الذي من اجله $\min a_{ij} = \max \min a_{ij}$ واخرنا h لتكون الرقم الاستدلالي الذي من اجله $\max a_{ij} = \min \max a_{ij}$ فانه اذا تحققت المعادله (٢٦-٨) فاننا نسمي الخطه رقم k والخطه رقم h للماسب

واللامب II على التوالى زوج توازنى من الخطط equilibrium pair of strategies

وبالمعنى الى المثال المعطى بالمعادلة (٢٥-٨) فان اللامب I سوف يوظف خطته الاولى اذا توقع اللامب II هذا الاختيار من I ويكون ربح I هو 5 ولكن اذا وظف I خطته الثانية وتوقع II هذا الاختيار فان ربحه سوف يكون 10 فاللامب II سوف يوظف خطته الرابعة ومن ثم فان هذا سوف يحدد خسارته بالبلغ 5 لان الحد الاعلى لحصيلة كل عمود اخر (عمود نعم وعمود لا) من (٢٥-٨) تكون اكبر من 5 ففى هذه الحالة:

$$\max \min a_{ij} = \min \max a_{ij} = a_{14} = 5$$

وبهذا تكون قرارات المحتكر المشعري متوافقة ويتحقق التوازن ، فلا واحد من المحتكرين يستطيع زيادة ربحه بتغيير خطته اذا بقيت خطه خصمه بدون تغيير .

مثال : لنفترض ان مصفوفة الازياح هى :

$$(27-8) \quad \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

حيث ان اللامب I يمتلك خطتين وان اللامب II يمتلك اربعة . فمن الممكن تبسيط مصفوفة الازياح هذه واللعب العقابله لها بتعريف فكرة " السيادة " او البساطة dominance فيصح (٢٧-٨) يتضح ان II سوف لا يستخدم ابدا خطته الثالثة لانه يستطيع دائما ان يحسن من وضعه بتوظيف خطته الاولى بغض النظر عن الخطه اللامب I فكل عنصر فى العمود الثالث يكون اكبر من المنصر العقابل فى العمود الاول وبذلك فانه يمثل خسارة اكبر للامب II وعموما فان العمود رقم 1 يسيطر (او يسود) على العمود رقم 4 اذا كان $a_{ij} \leq a_{i1}$ لجميع i كان $a_{ij} < a_{i1}$ لواحد i على الاقل . اما العمود الرابع من (٢٧-٨) فانه مسيطر عليه من كلا العمودين الاول والثانى . ونستطيع تعريف السيطرة ايضا بالنسبة لخطط اللامب I وعموما فان الصف رقم 1 يسيطر على الصف رقم 2 اذا كان $a_{1j} \leq a_{2j}$ لجميع j وكان $a_{1j} > a_{2j}$ لواحد j على الاقل . اما فى المصفوفة (٢٧-٨) فان لاصف من الصفتين يسيطر على الاخر ، ولذا فان اللامب العاقل سوف لا يوظف ابدا خطه السيطرة وذلك يمكن تبسيط مصفوفة الازياح بازالة جميع خطط السيطرة .

فبازالة العمودين الثالث والرابع من (٢٧-٨) تصبح مصفوفة الازياح :

$$(28-8) \quad \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

وباعتبار القواعد الموضحة سابقا ، فإن اللاب I يرغب في توظيف خطته الثانية وإن اللاب II سوف يرغب في توظيف خطته الاولى ، ولكن هذه القرارات غير متوافقة :

$$\max_j \min_i a_{ij} = a_{22} = -1 \neq 3 = a_{21} = \min_j \max_i a_{ij}$$

فلو ان المحسك المشرى وظف هذه الخطط ، فان الحصيله الاولى سوف تكون $a_{21} = 3$ فاذا وصف II خطته الاولى فان I لا يستطيع زيادة ربحه بتغيير خططه . ولكن ، اذا استخدم I خطته الثانيه فان II يستطيع تخفيض خسارته من 3 الى -1 بالانتقال الى خطته الثانيه . فستطيع I حينئذ من زيادة ربحه من -1 الى 4 والانتقال الى خطته الاولى فيستطيع II حينئذ من تخفيض خسارته من 4 الى -2 بالانتقال الى خطته الاولى . فالانقرضات التي ادت الى موقع توازن للمعادلة (٢٥-٨) نتج عنها نذبات غير منتهيه للمعادله (٢٨-٨) ولم ينتج عنها زوج توازن .

الخطط المختلطة :

Mixed Strategies

قد يكون هناك حل للعبة معينه وقد لا يكون اذا اختار المحسك المشرى الخطط ، بالشكل الذى وضعناه سابقا . فالمازق الممثل باللعبات مثل (٢٨-٨) يمكن الخروج منه بالسماح للمحتكرين المشرين من ان يختاروا خططهم على اساس احتسابى probabilistic basis فاذا اخترنا p_1, p_2, \dots, p_m لتكون الاحتمالات التى سوف يستخدمها اللاب I لتوظيف كل واحد من خططه (وعدد ها m خطه) بحيث ان $0 \leq p_i \leq 1$ ، وان $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. افترض ان اللاب سوف يستخدم عملية عشوائيه فى اختيار خطه معينه فعلا اذا كانت $m=3$ ، وان $p_1=0.3$ ، $p_2=0.1$ ، $p_3=0.6$ فقد يعين الارقام من صفر الى اثنين للخطه الاولى ، وثلاثة للخطه الثانيه واربعه الى تسعه للخطه الثالثه ، وقد يختار رقم بوحده واحد بمعطيه عشوائيه ثم يوظف الخطه المقابله للرقم المختار . فالاختيار العشوائى سوف لا يسمح للاب II من توقع اختيار اللاب I اذا عرف احتمالات اللاب I .

ويستطيع اللاب II من عشوائيه اختيار خطه بتعيين الاحتمالات s_1, s_2, \dots, s_n لخططه بحيث ان $0 \leq s_j \leq 1$ ($j=1, \dots, n$) وان $\sum_{j=1}^n s_j = 1$. فتكون اهتمامات المحسك المشرى منسجه على الربح المتوقع بدلا من الربح الفعلى . فربحه المتوقع يساوى مجموع الحصيلات المحتمله مضروبها كل واحد منها باحتمال حدوثها . فعلا ، اذا وظف اللاب II خطه رقم i باحتمال يساوى واحد ، وان اللاب I اختار الاحتمالات p_1, \dots, p_m فان الربح المتوقع للاب I هو $\sum_{j=1}^m a_{ij} p_j$.

ان مشكلة القرار لكل محتر مشتري هي ان يختار مجموعة تصوي للاحتتمالات .
فاللاعب I يخشى ان اللاعب II سوف يكتشف خطته وان II سوف يختار خطه من
عنده تنكته من الحصول على الحد الاعلى من الربح المتوقع ، بمعنى ان هذه الخطه
سوف تجعل الربح المتوقع للاعب I اقل . وبالمثل فان اللاعب II يكون لديه نفس
الخوف من اللاعب I فتكون الاحتمالات التي يوظفها المحتر المشتري احتمالات تصوي ،
اذا كان :

$$(29-8) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j \geq V \quad j=1, \dots, n$$

واذا كان ايضا :

$$(30-8) \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} q_i \leq V \quad i=1, \dots, m$$

حيث ان V معرفة على انها حصيلة اللعبة (قيمة اللعبة) *value of the game*
تنتم العلاقات (29-8) على ان الربح المتوقع للاعب I ستكون على الاقل بـ V اذا
وظف II ايا من خطته باحتمال يساوي واحد ، وتنتم العلاقات (30-8) ان الخساره
المتوقعة للاعب II تكون على الاقل بـ V اذا وظف I ايا من خطته باحتمال
يساوي واحد . تنتم نظريه اساسيه من نظريات المجموعات على ان اى حل يعنى قيم
٢ ، وقيم التي تحقق (29-8) و (30-8) دائمة موجوده ، وان V تكون فريده
unique فاذا اختار كلا المحترين خططهم على اساس احتماليه ، فان الربح
المتوقع للاعب I E_1 يمكن تقديره من (29-8) :

$$E_1 = \sum_{j=1}^n s_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \right) \geq \sum_{j=1}^n s_j V$$

$$(31-8) \quad E_1 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i s_j \geq V \quad \text{او}$$

وكذلك الخسارة المتوقعة للاعب II يمكن تقديرها من (30-8) :

$$E_2 = \sum_{i=1}^m q_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} p_j \right) \leq \sum_{i=1}^m q_i V$$

$$(32-8) \quad E_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} q_i p_j \leq V \quad \text{او}$$

ان الحدود التي في الوسط في (31-8) تكون متطابقة (متماثله) :
الربح المتوقع للاعب I يساوي الخسارة المتوقعة للاعب II ويدمج (31-8) مع
(32-8) :

$$V \leq E_1 = E_2 \leq V$$

والتي تثبت ان :

$$E_1 = E_2 = V$$

وهذه تنص على ان الحصيله المتوقعه تكون هى نفسها لكل واحد من المحتكرين المشعريين وتساوى حصيله اللعبه (قيمه اللعبه) اذا كان كلاهما يوظف احتمالاتهم القصوى . فاذا وظف I احتمالاته القصوى ، فان ربحه المتوقع لا يقل عن V بغض النظر عن الخطئه التى يختارها اللاعب II وتكون اكبر من V اذا وظف II مجموعه احتمالات غير قصوى . وبالمثل ، اذا وظف II احتمالاته القصوى ، فان خسارته المتوقعه سوف لا تزيد عن V بغض النظر عن الخطئه التى يختارها I سوف تكون اقل اذا وظف مجموعه احتمالات غير قصوى .

البرمجه الخطئيه المماثله (المكافئه) Linear-Programming Equivalence

ان من الممكن تغيير الخطط القصوى للمحتكرين وكذلك حصيله اللعبه وذلك بتحويل مشاكل اللعبه الى اطار البرمجه الخطئيه (راجع الجزء ٥-٢) ولا تعتبر الحالات - التى تكون فيها $V > 0$ ثم نعرف المتغيرات الاتيه للمحتكر الشرائى II :

$$(٣٣-٨) \quad z_j = \frac{s_j}{V} \quad j = 1, \dots, n$$

ومن منطلق هذا التعريف نجد ان :

$$(٣٤-٨) \quad \frac{1}{V} = z_1 + z_2 + \dots + z_n$$

ويرغب اللاعب II فى ان يجعل خسارته العظمى المتوقعه صغيره بقدر المستطاع او ما يماثل ذلك (او يكافؤه) انه يرغب فى جعل $1/V$ باكبر حجم ممكن فتكون البرمجه الخطئيه المماثله له هى فى ان يجد القيم التى من اجلها تكون $i = 1, \dots, m$ والتى تعطيه الحد الاعلى من (٣٤-٨) بشرط ان :

$$(٣٥-٨) \quad a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \dots + a_{in}z_n \leq 1 \quad i = 1, \dots, m$$

ولقد اشتقت العلاقات فى (٣٥-٨) بقسمة (٣٠-٨) على V ثم بالتعويض من

$$(٣٣-٨)$$

وبتعريف المتغيرات الخاصه بالمحتكر المشترى I :

$$(٣٦-٨) \quad w_i = \frac{r_i}{V} \quad i = 1, \dots, m$$

ومن منطلق هذا التعريف نجد ان

$$(٣٧-٨) \quad \frac{1}{V} = w_1 + w_2 + \dots + w_m$$

يرغب اللاعب II فى ان يجعل ربحه الادنى المتوقع اكبر ما يمكن او ما يماثل ذلك انه يرغب فى $1/V$ اصغر ما يمكن ، فتكون البرمجه الخطئيه المماثله له فى ايجاد القيم التى من اجلها $z_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$) والتى تعطى الحد الادنى للمعادلات فى (٣٧-٨) بشرط

ولقد اشغلت العلاقات في (٣٨-٨) بقسمة العلاقات في (٢٩-٨) على ٧ ثم بالتعويض من (٣٦-٨) .

ان نظام البرجيه للاب I المعطى بمجموعتي المعادلات (٢٧-٨) او (٢٨-٨) هي الزوج dual لنظام البرجيه للاب II المعطاء بمجموعتي المعادلات (٣٤-٨) و (٣٥-٨) بحيث ان مقلوب (معكوس) حصيلة اللعيه المعطى بالقيمه القصوى للمعادلات (٢٤-٨) والذي يساوي القيمه الادنى للمعادلات (٣٧-٨) ويمكن ، وبسهولة الوصول الى الاحتمالات القصوى للمحتكرين العشريين باستخدام (٣٣-٨) وباستخدام (٣٦-٨) من القيم القصوى للمتغيرات z_i و w_i .

ان صيغة (وضع البرمجه الخطيه يسهل الحصول على اثبات ان الحلول تحقق دائما للمبات المشترك فيها شخصان بحصيله صفر • وهذا الاثبات يندش من:

أولاً : الافتراض بأن عدداً محدداً من الحلول القصوى يتحقق دائماً لنظام البرمجة الخطية ، ومن ثم المتدليل على أن حلول البرمجة القصوى تقدم حلاً للمعضلة القائمة . نفى البداية نفترض أن جميع a_{ij} أكبر من صفر ، بمعنى أن $a_{ij} > 0$ فاحد الحلول الممكنة ولكنه ليس الحل القصوى للنظام المبرمج في المعادلات (٣٤-٨) و (٣٥-٨) تعطيه المعادلة $z_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) فإذا جعلنا $a^0 = \min a_{ij}$ فإن أحد الحلول الممكنة للنظام المعطى بالمعادلات (٣٦-٨) و (٣٧-٨) تعطيه المعادلة $w_i = 1/a^0$ ($i = 1, \dots, m$) ، فالاحتمال على محدود من الحلول القصوى لأنظمة البرمجة لا يأتى إلا من أحد النظريتين — الأزدواجية المعطى في الجزء (٥-٧) — والتي تنص على أنه : إذا تحقق وجود حلول ممكنة (ولكن غير قصوى) للنظام المبرمج وأن مزوجها موجود وصحيح ، فإن عدداً محدداً من الحلول القصوى سوف يوجد ويتحقق للنظامين معاً .

فإذا افترضنا ان القيم القصوى للمتغيرات المبرمجة تكون معطاة بـ
 z_1, \dots, z_m وكذلك w_1, \dots, w_m فعلى الاقل احد w_i لا بد وان يكون موجبا
 لان $w_i = 0 (i = 1, \dots, m)$ لا يكون ممكنا للمعادلات (٢٨-٨) وبالمثل ، على الاقل احد
 z_i يجب ان يكون موجبا لانه لو كانت جميع قيم z_i مساوية لصفر ، فان شروط
 المعادلات (٢٥-٨) سوف تتحقق على اساس انها غير متساويات منضبطة ولكن بمقد
 هذا ، كما اثبت بنظرية الازدواجية في (٤٠-٥) فان جميع قيم w_i سوف تتساوى
 صفر والتي اثبت انها مستحيلة . وبما ان على الاقل احد z_i وان احد w_i يجب
 ان يكون موجبا ، فانه من الممكن مساواة مطلوبات القيم القصوى للدوال في (٢٤-٨) و

فى (٢٧-٨) :

$$V = \frac{1}{\sum_{j=1}^n z_j} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n w_j}$$

$$V \sum_{j=1}^n z_j = V \sum_{j=1}^n w_j = 1 \quad \text{وأنه كذلك :}$$

وبالتعويض من (٢٣-٨) و (٢٦-٨)

$$\sum_{j=1}^n s_j = 1 \quad s_j \geq 0 \quad \sum_{j=1}^n r_j = 1 \quad r_j \geq 0$$

وهما احتمالات اللعبة وبالتعويض من (٢٣-٨) و (٢٦-٨) فى (٢٥-٨) ونفسى (٢٨-٨) يكون من السهل التحقق من ان هذه الاحتمالات سوف تكون حلا للعبة كما مرفناه بالمعادلات فى (٢٩-٨) و (٣٠-٨) .

ان المعادلات فى (٣١-٨) وفى (٣٢-٨) يعرفوا حصة اللعبة على انها متوسط مرجح لمناصر مصفوفة الازواج . فمن الضروري ان تكون V موجبه لتحقيق المتطلبات الغير سالبيه nonnegativity للمتغيرات المبرمجه ولكنه عامة ، قد نستنتج ان V تكون موجبه الا اذا كانت جميع قيم a_{ij} موجبه وهذه الصعوبة يمكن حلها بتعريف حلا معدلا بقيم موجبه فلوان واحدا واكثر من a_{ij} كان اقل من او مساويا لمناصر $a_{ij} \leq 0$ ، فما علينا الا ان نختار رقما ، ويمكن k بالخاصه التاليه :

$a_{ij} + k > 0$ لجميع i, j ثم نضيف k لكل مناصر من عناصر مصفوفه الازواج ، فنجد ان حصة هذه اللعبة المعدله سوف يعتمدى حصة اللعبة الاولييه بقدر k :

$$(٣٩-٨) \quad V' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} + k) r_i s_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} r_i s_j + k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i s_j = V + k$$

وتكون القيمه موجبه كما اردنا لها بالتركيب ، وتكون الاحتمالات القصوى هى نفسها للعبة الاولييه والمعدليه ^(١) . ولذا فان حلا للعبة الاولييه يمكن الحصول عليه من حلا للبرمجه الخطيه للعبة المعدل . وبالعوده الى اللعبة المعطاه بالمعادله (٢٨-٨) وبوضع $k = 4$ فان مصفوفه الازواج للعبة المعدله ستكون :

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

ويكون نظام البرمجه الخطى للالاب II هو ايجاد قيم $z_1, z_2 \geq 0$ والتي تعطى

$$\frac{1}{V'} = z_1 + z_2$$

الحد الاقصى ل :

¹ See J. G. Kemeny, J. L. Snell, and G. L. Thompson, *Introduction to Finite Mathematics* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1957), p. 291.

$$\begin{aligned} 2z_1 + 8z_2 &\leq 1 \\ 7z_1 + 3z_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

بشرط :

ويمكن للقارئ التحقق عن طريق الرسم من ان الحل الاقصى الوحيد هو:
 الاحتمالات القصوى للعبة II هي $z_1 = 0.1, z_2 = 0.1, V = 1$ ويمكن للقارئ كذلك من
 التحقق بان الحل الاقصى للنظام المبرمج المزدوج هو $w_1 = 0.08, w_2 = 0.12$ والتي
 تعطى احتمالات قصوى للعبة I على انها : $p_1 = 0.4, p_2 = 0.6$.

Cooperative Games

اللعبات (المجموعات) التعاونية :

ان نظريات المجموعات التنافسية المنضبطة لا تمثل توضيحا كافيا لسلوك المحتررين
 القلة فمعالج اي محتر منهم لا يكون دائما على طرفى نقيض ، وانما يمكن تشخيص تصرفاته
 بخليط من التنافس والتعاون . وتظهر خاصية التعاون فى اللعبات التى تكون حصيلتها
 غير صفر (غير ثابتة) ولكن مثل هذه اللعبات لا تؤهل بالضرورة الى التعاون ولكن النتائج
 المرجوة لا تتحقق الا عن طريق التعاون . وللتوضيح نعتبر سواقا لثنتين من المحتررين
 (حالة الشراء) بحيث ان القانون يحرم الحل التواطؤى (التامرى) *collusive solution*
 وكذلك نفترض ان الرشاوى واعادة توزيع الربح ايضا لا يسمح بها القانون . فكل واحد من
 المحترين تكون له خطتين :

(١) يستطيع ان يعلن بانه " رائد " *leader* ومن ثم ينتج كمية لا بأس بها من
 المنتجات ، او

(٢) يستطيع ان يعلن بانه " تابع " *follower* ومن ثم ينتج كمية صغيرة نسبيا من
 المنتجات . ويعداها يعلن كل واحد منهما عن رغبته فان عليه ان يلتزم بما اعلن
 ويتبع ذلك بالطبع ، كمية الانتاج التى ينتجها بغض النظر عن ماذا اعلن عنه
 خصمه .

ولنفترض ان مصفوفة الارباح هى :

	رائد Leader	المحتكر II Follower
رائد Leader	(200, 250)	(1000, 200)
المحتكر (١) تابع Follower	(150, 950)	(800, 800)

بحيث ان الرقم الاول والثاني من كل مجموعة اقواس يمثلان مستويات الربح للاعب I ولللاعب II على التوالي .

ويمكن الحصول على افضل حصة لكل واحد منها اذا كان هو الرائد وكان منافسه هو التابع ، وتكون الحصة اسوأ ما يمكن اذا عكس دورهما . فقد يناقش البعض بانه من المعقول ان يعلن كل واحد منها عن كونه تابعا ليحصل على ربحا متوسطا معقولا وتكون هذه هي افضل خطة لكل واحد منها . ولكن لو ان I اعتقد ان II سوف يكون تابعا ، فان I سوف يعلن انه هو الرائد بالتزكية وبالمثل للاعب II وبما ان لكل واحد منها الحافز الذي يدفعه لان يكون رائدا فان سلوكهما الغير تعاوني سوف يتقود كل واحد منها للحصول على ادنى مستوى من الارباح . وفى الحقيقة بان خطط الزيادة للمحتكرين الاثنين تمثل زوجا توازنيا بينما خطط التبعيه المفضله لامتثل زوجا توازنيا فمن الواضح ان كلاهما سوف يستفيد من التعاون ، ولكنه ليس من الواضح كيفيه الوصول الى اتفاق بشأن هذا التعاون ، وحتى ولو وافق كل واحد منها على ان يكون تابعا ، فان لكل منها الحوافز التى تدفعه لاختلال هذا العقد واطلاق نفسه رائدا ، فاحتمال وجود حلول تعاونيه يعتمد على احتمال التوصل الى التزامات وضمانات غير قابلة للاختلال بها او عدم التقيد بها .

حل المفاوضة ناش :

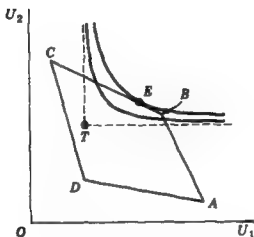
The Nash Bargaining Solution

لنعتبر الحالة التى يحاول فيها المحتكرين التفاوض من اجل التوصل الى حل تعاوني للمثال فى (٤٠٨) فاذا افترضنا ان كل واحد منها راغبا فى الحصول على الحد الاقصى من المنفعة المتوقعة من ارباحه وان كل واحد منها يتسكك ببديهييات فون نيومان مورجنستيرن .

لنفترض ان النقاط الاربع A, B, C, D فى الشكل (٣٠٨) يمثلون حصائل الربح الاربعه للمعادلات (٤٠٨) مطبقة فى فراغ المنفعة mapped into utility-space. فاذا افترضنا ان المحتكرين سوف يتبعان الخطط الخليطة ، فان للقارىء يستطيع ان يتحقق من ان منطقة المنفعة المختلطة فى هذه الحالة تكون معطاة بالشكل $ABCD$ رباعى الاضلاع) انظر تمرين (٣٠٨) فالمفاوضات فى مثل هذه الحالة تتمثل فى اختيار نقطة من المجموعة (مجموعة منطقة المنفعة المختلطة) .

فاذا افترضنا ان المحتكرين لم ينجحوا فى التوصل الى اتفاق فانه ليس باستطاعة اى منها تهديد الاخر ببيع منتجاته باسعار مخفضه لبيوت البيع بالتخفيض بربح مضمون فاذا

افترضنا ان (\bar{U}_1, \bar{U}_2) تمثلان منافع هذه الأرباح فان النقطة T على الشكل (٣-٨) يكون لها الاحداثيات (\bar{U}_1, \bar{U}_2) ولا يحتاج أى واحد منها على ان يوافق على قبول ربحا اقل من الربح الذى تقدم له خطة التهديد فالهدف من الحل التعاونى هو ان على كل محتكر ان يختار نقطة على شمال شرق نقطة T على حدود مناطق المنفعة المحتملة وبالهدية فانه يوجد اعداد لاحصر لها لمثل هذه الحلول .



شكل (٣-٨)

ولذا فانه حسب حل المفاوضة لناش فان كل واحد من المحتكرين يجب ان يوافق على خطط بحيث ان الدالة :

$$(٤١-٨) \quad W = (U_1 - \bar{U}_1)(U_2 - \bar{U}_2)$$

تكون هى الدالة المعظمى بشروط الضوابط التى تنص على ان النقاط الموجودة فى منطقة المنفعة المحتملة هى فقط المتوفرة فيها الشروط والقبولة . وتعرف هنا المنحنى المعادل لـ W على انه الحل الهندسى لنقطة المنفعة التى تعطى قيمة محسدة . An iso- w curve W لـ

وهذه المنحنيات ما هى الا قطع زائدة قائمة $rectangular hyperbolas$ بحيث ان القيمة الثانية لـ W تزداد مع ازدياد المسافة من T فالتين من مثل هذه المنحنيات موجود فى شكل (٣-٨) فنقطة E تعطى حل لناش وتقع على احدى منحنى من منحنىات المعادلة لـ w والتى يكون لها ، على الاقل نقطة واحدة مشتركة مع منطقة المنفعة المحتملة . فعلى الخط الواصل بين نقطتى B (تمثل كلا المحتكرين كتابعين) و C

(مثل I كتابه ، و II كرائد) سوف يوظف I الخطة التي تجعل منه تابعاً
 II فإنه سوف يوظف خطة مختطه وتكون احتمالات كونه رائداً معطاه بالنسبه BE
 الى BC وتكون احتمالات كونه تابعاً معطاه بالنسبه BC الى BE ويجب على القارئ
 ان يلاحظ ان هذا العمل يتطلب (يستلزم) مقارنة شخصية لمنافع فون — نيومان
 مورجنستيرن . interpersonal comparison of von utilities .

٨ - • الاحتكار الثنائي (الاحتكار بين طرفين) BILATERAL MONOPOLY

ان المحتكر لا يملك دالة عرض انتاج تربط السعر والكليه ، فهو يختار نقطة على
 دالة طلب المشتري والتي تعطيه الحد الاقصى من ارباح . وبالمثل فان محتكر الشراء
 monopsonist لا يملك دالة طلب للدواخل فهو يختار نقطة على دالة عرض المشتري والتي
 تعطيه الحد الاقصى من الارباح . فالاحتكار الثنائي هو عبارة من حالة في السوق
 تتمثل بوجود مشتري واحد فقط وبائع واحد فقط فليس من المحتمل للبائع ان يتصرف
 كمحتكر ولا البائع كمحتكر مشتري في نفس الوقت .

فلا يستطيع البائع ان يستغل دالة طلب غير موجودة ، ولا المشتري ان يستغل
 دالة طلب غير موجودة . فلا بد من ان احد يتنازل . فهناك احتمالات لثلاث نتائج
 طامة :

(١) قد يسيطر (او يتحكم) احد المشترين ويجبر الاخر على قبول قرارات سعره و/
 او كميته المنتجه .

(٢) وقد يتعاون البائع والمشتري ويحققا حلاً مثل حل ناش ، او

(٣) قد تتحطم الية السوق بالمعنى ان لا يكون هناك من متاجرة ابداً .

فانظريات الاحتكار ، واحتكار القله ونظريات المجموعات تساعد على فهم النتائج
 المختلفه المحتملة .

Reference Solutions

الحلول المرجعية (أو الاسنادية)

افترض حالة احتكار ثنائي في سوق السلعة المنتج Q_2 فالمشتري للسلعة Q_2
 يستخدمها كداخل input لانتاج Q_1 حسب دالة انتاجه $q_1 = h(q_2)$ فهو يبيع السلعة
 Q_1 في سوق تنافسيه بالسعر الثابت p_1 أما البائع فإنه يستخدم دخلاً واحد هو X لانتاج

Q_2 فهو يشتري X من سوق تنافسيه بالسعر الثابت P . افترض انه يمكن وضع دالة انتاجه في الشكل المعكوس $X = H(q_2)$ فالحلول المنشودة من قبل الاحتكار ، والمحتكرين ، وشعبه التنافس تعطى نقاطاً أساساً (مرجع) مفيدة لمن يقوم بتحليل هذه السوق .

من الممكن الحصول على حل احتكاري اذا كان بإمكان البائع السيطرة وفرض السعر الذي يرضه على المشتري ويكون ربح المشتري :

$$\pi_2 = p_1 h(q_2) - p_2 q_2$$

فهو يضع $d\pi_2/dq_2$ مساوية لصفر للحصول على الحد الأقصى من الربح :

$$\frac{d\pi_2}{dq_2} = p_1 h'(q_2) - p_2 = 0$$

$$(٤٢-٨) \quad p_2 = p_1 h'(q_2)$$

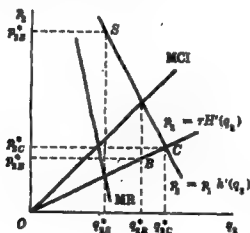
وهي تمثل مقلوب دالة الطلب للمشتري للسلعة Q_2 فالمشتري يشتري السلعة Q_2 للحد الذي يكون عنده قيمة انتاجه الحدى مساوية للسعر الذي وضعه البائع . فالبائع المحتكر سوف يعرض من (٤٢-٨) بالسعر p_2 ويتحصل على الحد الأقصى من الربح :

$$\pi_2 = p_1 h'(q_2) q_2 - r H(q_2)$$

$$\frac{d\pi_2}{dq_2} = p_1 [h'(q_2) + h''(q_2) q_2] - r H'(q_2) = 0$$

$$(٤٣-٨) \quad p_1 [h'(q_2) + h''(q_2) q_2] = r H'(q_2)$$

فشرط التوازن (٤٣-٨) ينص على أن البائع يساوي بين MR الخاص به وبين MC وللحصول على سعر الاحتكار p_2^* فاننا نقوم بحل (٤٣-٨) لاننتاج الاحتكار q_2^* نسم نموض بهذه القيمة في (٤٢-٨) فمثال لمثل هذا الحل الاحتكاري تعطيه النقطة S في الشكل (٤٨) .



شكل (٤٨ -)

ان من الممكن تحقيق حل لاحتكار الشراء $monopsony$ وذلك اذا سيطر المشتري
واعلى سعره على البائع واجبره على قبوله فيكون ربح البائع هو :

$$\pi_S = p_2 q_2 - rH(q_2)$$

نحو يضع $d\pi_S/dq_2$ تساوى صفر للحصول على الحد الأقصى من الربح على الشكل التالى :

$$\frac{d\pi_S}{dq_2} = p_2 - rH'(q_2) = 0$$

$$(٤٤-٨) \quad p_2 = rH'(q_2)$$

وهذا هو مقلوب دالة عرض السلعة Q_2 فالبائع ينتج ويبيع السلعة Q_2 للحد الذى يكون
مده تكلفته الحديه مساويه للسعر الذى وضعه المشتري . فالمشتري المحتكر يعرض من
(٤٤-٨) من اجل p_2 ويحصل على الحد الأعلى من الربح :

$$\pi_B = p_1 h(q_2) - rH'(q_2)q_2$$

$$\frac{d\pi_B}{dq_2} = p_1 h'(q_2) - r[H'(q_2) + H''(q_2)q_2] = 0$$

$$(٤٥-٨) \quad p_1 h'(q_2) = r[H'(q_2) + H''(q_2)q_2]$$

وشرط التوازن (٤٥-٨) ينص على ان المشتري يساوى قيمة اُنتاجه الحدى بالتكلفة
الحديه للداخل (MCI) وللحصول على سعر المشتري المحتكر p_2^B فاننا نقوم بحل (٤٥-٨)
للحصول على انتاج المحتكر المشتري q_2^B ثم نعوض بهذه القيمة فى (٤٤-٨) فننال لمثل
هذا الحل تعطيه النقطة B على الشكل (٤٨) .

واخيرا اذا اعتبرنا السعر والكمية التى يمكن التوصل اليها اذا كان كلا البائـع
والمشتري متقبلين للأسعار (اى أن الاسعار على طلبها) فان مقلوب دالتى الطلب
(٤٤-٨) والعرض (٤٤-٨) سوف تكون فعاله وتتحدد الكمية الشبه - تنافسيه q_2^C
بمساواة سعر العرض والطلب :

$$(٤٦-٨) \quad p_2^C = p_1 h'(q_2^C) = rH'(q_2^C)$$

وسوف يساوى سعر شبه - التنافس بين قيمة الانتاج الحدى للمشتري والتكلفة الحديه
للبائع . وهذه النتيجة الشبه - تنافسيه قد لا تكون حصيله ممكنه بسوق يتميز بكونه
احتكاريا ثنائيا ، ولكنها تعدنا بنقطة اسناد (مرجع) اخرى مفيدة . فنمال الحل الشبه
تنافسى تعطيه النقطة C على الشكل (٤٨) .

فمن الممكن تعميم بعض نتائج المقارنه بين حلول الاحتكار (B) واحتكار لشراء* (S)
وشبه التنافس (C) على الشكل (٤٨) لتغطى جميع الحالات التى يكون فيها منحنى
الطلب $[p_1 h'(q_2)]$ بمنحى سالب يكون فيها منحنى العرض $[rH'(q_2)]$ بمنحى موجب بمعنى

الحالات التي يكون فيها $h'(q_2) < 0$ وكذلك $H''(q_2) > 0$ وسوف تقع نقاط توازن الاحتكار والاحتكار الثنائي الى الجهة اليسرى من تقاطع منحنى العرض والطلب وبهذا تكون q_2^B دائما أكبر من q_2^B و q_2^B ففي الشكل (٤-٨) تكون $q_2^B > q_2^B$ وهذه النتيجة لا تتحقق دائما فانتاج الاحتكار والاحتكار الثنائي يعتمد على ميل كل من منحنى الطلب ومنحنى العرض .

ويمكن للقارىء من هنا حالة يكون فيها $q_2^B < q_2^B$ وسوف يقع سعر التوازن دائما بين سعري الاحتكار الثنائي . وبما ان توازن الاحتكار يقع على منحنى الطلب على الجهة اليسرى من الحل شبه - التنافس .

فان $p_2^B > p_2^B$ وبما ان توازن احتكار يقع على منحنى العرض على الجهة اليسرى من الحل شبه - التنافس فان $p_2^B > p_2^B$ افترض ان $\pi_2^B, \pi_2^B, \pi_2^B$ يمثلون مستويات ارباح البائع في الحالات الثلاثة فانه عموما يكون :

$$\pi_2^B > \pi_2^B > \pi_2^B$$

واذا افترضنا ان $\pi_2^B, \pi_2^B, \pi_2^B$ يمثلون مستويات ارباح المشتري فانه عموما يكون :

$$\pi_2^B < \pi_2^B < \pi_2^B$$

واشبات هذه اللامتناهيات متروك كتدوين للقارىء .

Collusion and Bargaining

التواطؤ والمفاوضة :

ان من العادة الافتراض بأن المشاركين في السوق سوف يتصرفون على انتمساده بعضهم على البعض الاخر بطريقة تعاونه وأنهم سوف يتوصلون الى اتفاق يوافق جميع الأطراف من حيث السعر والكمية فيمكن لمرحلة المفاوضة ان تتم على خطوتين منفصلتين الأولى أن يقرر المشتركون الكمية التي تمكنهم من الحصول على الحد الاعلى من الربح المشترك وثانيا تقرير السعر الذي يوزع الربح المشترك بينهم ومعادلة هذا الربح هي :

$$\begin{aligned} \pi &= \pi_B + \pi_S = [p_1 h(q_2) - p_2 q_2] + [p_2 q_2 - rH(q_2)] \\ &= p_1 h(q_2) - rH(q_2) \end{aligned}$$

وبوضع $d\pi/dq_2$ مساويه لصفر :

$$\frac{d\pi}{dq_2} = p_1 h'(q_2) - rH'(q_2) = 0$$

$$p_1 h'(q_2) = rH'(q_2)$$

وهذا الربح المشترك سوف يكون عند حده الاقصى عند الانتاج الذي يتساوى عنده قيمة الانتاج الحدى للمشتري مع التكلفة الحدية للبائع . وهذا مشابه للحل الشبه -

تتافس المعطى بالمعادلة (٣٩-٨) ويكون مستوى الانتاج التواطى. الاقصى مشابهاً لمستوى الانتاج الشبه تتافس q_2 وسوف يتصرف الاحتكار الثانى التواطى بنفس الطريقة التى تتصرف بها. الوحدات المتنافسة وذلك بالنسبة للعالم الخارجى . ليس من الضروري ان يضع سعر شبه المتنافس من حل التواطى. لان البائع سوف يرفض باعلى سعر يمكن الحصول عليه للكمية المطلوبة وكذلك المشتري فإنه يرفض بأقل سعر ممكن، فإذا افترضنا ان الحد الاعلى هو ذلك السعر الذى يجبر ربح المشتري لان يكون صفراً، وان يكون الحد الأدنى هو ذلك السعر الذى يجبر ربح البائع لان يكون صفراً :

$$(٤٧-٨) \quad \frac{p_1 h(q_2)}{q_2} \geq p_2 \geq \frac{r H(q_2)}{q_2}$$

وبما ان ربحاً سالباً سوف يجبر أحد الوحدات الانتاجية على عدم استمرارية عملياتها الانتاجية ، فان السعر لا يمكن تحديده خارج هذه الحدود .

والبدل هو ان نفترض ان المشتري لا يمكن ان يعمل اسوة من الحل الاحتكارى وان البائع لا يمكن ان يعمل اسوة من حل الاحتكار الشرائى .

$$p_1 h(q_2) - p_2 q_2 \geq \pi_0$$

$$p_2 q_2 - r H(q_2) \geq \pi_0$$

وبحل كل واحد من اللامساويات السابقة لقيمة π_0 :

$$(٤٨-٨) \quad \frac{p_1 h(q_2) - \pi_0}{q_2} \geq p_2 \geq \frac{r H(q_2) + \pi_0}{q_2}$$

وهذه الحدود يمكن الحصول عليها من حلول الانحدار (المراجع) . فإذا كسبنا π_0 π_0 موجبتين فان (٤٨-٨) سوف تعدنا بعدى اضيق للمفاوضة والمساومة من (٤٧-٨) ففي الحالتين يكون تحديد سعراً معيناً ضمن حدود المفاوضة معتدلاً على قوة المفاوضة بالنسبة للبائع والمشتري .

SUMMARY

٨ - ملخص ما سبق

يعتمد ربح محترق القلعة والمحترق الثانى على افعال وردود افعال منافسيهم وترتكز الدلائل المنطقية على افتراضات منطقية بالنسبة لسلوك السوق . واحد هذه الاساليب هو ان نضع افتراضاً من استجابته معينة ومحددة للوحدات الانتاجية للتأثير على منافسيهم ويرتكز الحل الشبه تتافس على افتراض ان الوحدات الانتاجية تتساوى بين السعر والتكلفة الجديدة . ويتحقق الحل التواطى اذا اتحد المشترين فى السوق معاً لتحظيم الربح الكلى للمنطقة . ويمكن التوصل الى حل كورنوت اذا عالم كل مشترك من ربحه بافتراض ان مستوى انتاج المنافسين لن يتأثر باجراءه هذا . ولكن حل ستاكيل يهيج فى الافتراض

بالاتراف التضميلي للمحتكرين الثنائيين بالتضخيم المتداخلة لانفعالهم • قد يرفض اى
مضمم فى ان يقوم بدور الرائد او التابع ، ويتم التوصل الى توازن السوق فقط اذا كانت
رغباتهم متوافقة • ويمكن تطبيق هذه الحلول على كل من المنتجات المتجانسة والمفاضلة
قد يجد منتج المنتجات المفاضلة ان الدعاية تكون مريحة •

ويتحقق الحل الخاص بتقاسم السوق عندما يتبع المشترك فى السوق تحركات منافسيه
بالطريقة التى تحافظ له على نصيب ثابت من اجمالي مبيعات الصناعة • بينما يتحقق الحل
الخاص بمنحى الطلب الطئوى اذا ما افترض بائع ان منافسيه سوف يتبعونه فى حالة خفض
الاسعار ، لكنهم سوف يتركون السعر بدون تغير اذا ما رجع هو السعر •

تشابه احتكار الشراء بواسطة مشترين واحتكار القلة فى حالة الشراء مع الاحتكار الثنائي
احتكار القلة فى حالة البيع فى انه لا توجد فى الحالتين افتراضات سلوكية يقبله بصفه
معد ويمكن تعديل معام التنبؤات الخاصة بالاحتكار الثنائي واحتكار القلة لكى تتطابق
ايضا احتكار الشراء بواسطة مشترين واحتكار القلة فى حالة الشراء وطبقا لافتراض سلوك
كورت سوف يختار كل مشتر مشتوا ما من الشراء بافتراض ان المشترين الاخرين لن يتأثروا
بتصرفاته •

ويمكن تطبيق نظرية المجموعات التعاونية وكذلك الغير تعاونية على الاسواق ذات
العدد الصغير من المشتركين (المساهمين) وتطبيق النظرية الاولى ، يمكن معالجة
السوق ثنائي الاحتكار احيانا كلعبة مكونة من شخصين وحصيلته تساوى صفر • يختار كل
من المحتكرين الاحتمالات لعدد محدود من الخطط التى تتنظم من القيمة المتوقعة لربحه
معنايا اختيار الخطة الأكثر تفضيلا لجانب منافسيه • يتساوى الربح المتوقع لاحتكار
المحتكرين الثنائيين (والذي يتساوى الخسارة المتوقعة للمحتكر الاخر) مع حصيله اللعبة
اذا كان كلاهما يوظف احتمالات القصوى • يمكن استخدام البرمجة الخطية للحصول على
حلول عددية للعبة المكونة من شخصين وحصيلته تساوى صفر •

يطلب تطبيق نظرية المجموعة المتساوية ان يكون المساهمين فى السوق قادرين على
عمل اتفاقيات ربط مع بعضهم البعض ، ويشرط حل ناش قسمه معقوله وادلة للربح من
العمل التعاونى للمشاركين •

يتخذى البائع الوحيد المشترى الوحيد فى الاحتكار الثنائي بتحدد السعر والكمية
اما من خلال سيادة مشترك واحد واما من طريق التفاوض والتعاون • ويستوجب
الاسعار ، الكميات والارباح التى يمكن التوصل اليها فى حالة احتكار القلة ، واحتكار

القله في حالة الشراء، وحالة شبه التنافس وجود نقاط اسناد عند تحليل الاحتكار الثنائي
ويحظم مستوى الانتاج في حالة الحل شبه التنافسي الربح المشترك للبائع والمشتري،
ويكون التفاوض قاصرا على سعر كمي ما • وتبني قيود التفاوض على السعر بناءً على افتراض
حول مستويات دنيا مقبولة للربح •

EXERCISES

8-1 Consider a duopoly with product differentiation in which the demand and cost functions are $q_1 = 88 - 4p_1 + 2p_2$, $C_1 = 10q_1$, and $q_2 = 56 + 2p_1 - 4p_2$, $C_2 = 8q_2$ for firms I and II respectively. Derive a price reaction function for each firm on the assumption that each maximizes its profit with respect to its own price. Determine equilibrium values of price, quantity, and profit for each firm.

8-2 Let duopolist I, producing a differentiated product, face an inverse demand function given by $p_1 = 100 - 2q_1 - q_2$ and have the cost function $C_1 = 2.5q_1$. Assume that duopolist II wishes to maintain a market share of $\frac{1}{2}$. Find the optimal price, output, and profit for duopolist I. Find the output of duopolist II.

8-3 Let n duopolists face the inverse demand function $p = a - b(q_1 + \dots + q_n)$ and let each have identical cost function $C_i = cq_i$. (a) Determine the Cournot solution. (b) Determine the quasi-competitive solution. (c) As $n \rightarrow \infty$, does the Cournot solution converge to the quasi-competitive solution?

8-4 Let two duopsonists have production functions $q_1 = 13x_1 - 0.2x_1^2$ and $q_2 = 12x_2 - 0.1x_2^2$ where x_1, x_2 are the input levels employed by the duopsonists. Assume that the input supply function is $r = 2 + 0.1(x_1 + x_2)$ where r is the supply price of the input, and that q_1 and q_2 are sold in competitive markets for prices $p_1 = 2$ and $p_2 = 3$. (a) Find the input reaction functions. (b) Determine the Cournot equilibrium values for $x_1, x_2, q_1, q_2, \pi_1, \pi_2$.

8-5 Let the profit matrix of a two-person, zero-sum game have elements a_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$), and let r_i ($i = 1, \dots, m$) and s_j ($j = 1, \dots, n$) be the optimal probabilities for participants I and II respectively. Prove that these probabilities are also optimal for a game with profit elements $a_{ij} + k$ where k is a constant.

8-6 Consumers distributed uniformly along a straight-line road are the potential market for two duopolists whose decision problem is where to locate their sales offices. Demand is completely inelastic, and consumers will purchase from whichever sales office is nearer. Assume that the road is 4 miles long and that, for simplicity, each firm has exactly five possible strategies: it may locate itself at either end or at the 1-mile, 2-mile, or 3-mile markers. Let the payoffs to the duopolists be their respective market shares. (a) Is this a zero-sum (or constant-sum) game? (b) What is the payoff matrix? (c) What are optimal strategies for the duopolists?

8-7 Show that the feasible utility region for mixed strategies in Fig. 8-3 is $ABCD$ if the duopolists have two pure strategies each as stated in the discussion of Fig. 8-3.

8-8 Let the buyer and seller for the bilateral monopoly discussed in Sec. 8-5 have the production functions $q_1 = 270q_2 - 2q_2^2$ and $x = 0.25q_1^2$ respectively. Assume that the price of q_1 is 3 and the price of x is 6. (a) Determine the values of q_2, p , and the profits of the buyer and seller for the monopoly, monopsony, and quasi-competitive solutions. (b) Determine the bargaining limits for p ; under the assumption that the buyer can do no worse than the monopoly solution and the seller can do no worse than the monopsony solution. (c) Compare your results with Fig. 8-4.

8-9 Assume that the adjustment of each of the two Cournot duopolists to his rival's output level takes a finite length of time. Specifically, let a change in output level from period $t-1$ to period t be the fixed proportion k of the difference between desired and actual output levels in period $t-1$. Under what circumstances will this dynamic adjustment process converge to the Cournot equilibrium if the demand function is $p = 100 - (q_1 + q_2)$ and the cost functions are $C_1 = 3q_1, C_2 = 2q_2$?

SELECTED REFERENCES

- Andrews, P. W. S.: *On Competition in Economic Theory* (New York: St. Martin's, 1964). A nonmathematical review and critique of imperfect-competition theories.
- Baumol, William J.: *Business Behavior, Value and Growth* (rev. ed., New York: Harcourt, Brace & World, 1967). Part I covers oligopoly theory. Calculus and geometry are used.
- Buchanan, Norman S.: "Advertising Expenditures: A Suggested Treatment," *Journal of Political Economy*, vol. 50 (August, 1942), pp. 537-557. Also reprinted in R. V. Clemence (ed.), *Readings in Economic Analysis*, (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1950), vol. 2, pp. 230-250. A geometric determination of the optimum advertising expenditure for a firm.
- Cohen, Kalman J., and Richard M. Cyert: *Theory of the Firm* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965). Imperfect competition is covered in chaps. 10-13. Calculus and geometry are used.
- Cournot, Augustin: *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, trans. by Nathaniel T. Bacon (New York: Macmillan, 1897). The original statement of the Cournot solution. Also one of the first applications of mathematics to economics.
- Efroymson, Clarence W.: "A Note on Kinked Demand Curves," *American Economic Review*, vol. 33 (March, 1943), pp. 98-109. Also reprinted in Clemence, *Readings in Economic Analysis*, vol. 2, pp. 218-229. A nonmathematical discussion of kinked demand curves and full-cost pricing.
- Fellner, William: *Competition Among the Few* (New York: Knopf, 1949). A nonmathematical discussion of oligopoly and bilateral monopoly. Contains an exposition of the Stackelberg solution.
- Friedman, J. W.: *Oligopoly and the Theory of Games* (Amsterdam: North-Holland, 1977). A comprehensive survey of the subject with some advanced mathematical treatment.
- Luce, R. Duncan, and Howard Raiffa: *Games and Decisions* (New York: Wiley, 1957). A comprehensive treatise with only simple mathematics in the text. More difficult proofs are in appendices.
- Malfinvaud, E.: *Lectures on Microeconomic Theory* (Amsterdam: North-Holland, 1972). Duopoly and bilateral monopoly are covered in chap. 6.

الفصل التاسع

توازن الأسواق المتعددة

MULTIMARKET EQUILIBRIUM

إن تحليل تحديد وتوزيع الأسعار يمكن أن يتم على مستويات ثلاثة بزيادة في التعميم :

- (١) توازن المستهلك الفردى أو المنتج (٢) توازن السوق .
- (٣) التوازن فى نفس الوقت لجميع الأسواق .

أما النوع الأول من التحليل وكان موضوع الأبواب من الثانى إلى الباب الخامس والنوع الثانى من التحليل كان موضوع الأبواب من السادس إلى الثامن وهذا الباب خاص بالنوع الثالث من التحليل .

إن التحاليل النظرية تحتوى عادة على معلومات ومتغيرات وافتراضات سلوكية تسمح بتحديد قيم محددة للمتغيرات حالما تكون المعلومات data قد عرفت . فإذا اعتبرنا التحاليل الخاصة بالمستهلك الفردى ، فإن المعلومات الطمقة به هى دالة منفعيته دخله ، وأسعار السلع . أما المتغيرات فهى كمية السلع المشتراه والمستهلكه والافتراض السلوكى الأساسى هو رغبته فى الحصول على الحد الأعلى من منفعة . وبالمثل تكون التحاليل الخاصة بالمنتج الفرد ، فمعلوماته هى دالة انتاجه وأسعار جميع الداخلى والخارج inputs and outputs أما المتغيرات فهى كمية الداخلى التى يشتريها وكمية الخارج التى ينتجها وبيعها ، ويكون الافتراض السلوكى هو رغبته فى الحصول على الحد الأعلى من الربح . ولكن تحاليل أى وحدة مفردة لا يلقى الضوء على تحديد الأسعار ، لأن جميع الأسعار قد اعتبرت على أنها مؤشرات (كميات متغيرة القيمة parameters) .

إن تحاليل التوازن فى السوق المفردة يعتبر أكثر عمومية بعض الشيء ويتحدد السعر المفرد كنتيجة لسلوك عدد كبير من المستهلكين فى الحصول على الحد الأعلى من منفعتهم

وكذلك سلوك عدد كبير من المنتجين في الحصول على الحد الأعلى من الربح 1 فتكون المعلومات الخاصة بتحليل التوازن في سوق السلع هي دالتي المنفعة والانتاج لجميع المستهلكين والمنتجين ، ودخولات جميع المستهلكين وأسعار جميع العوامل وكذلك أسعار جميع السلع لدى السلعة تحت الاعتبار وتكون المتغيرات الصريحة **explicit variables** هي سعر السلعة والمشتريات والبيعات للسلعة لكل مستهلك ومنتج ، ويمكن إضافة شرط خلو السوق **market cleared** (اجمالي الطلب يجب ان يساوى اجمالي العرض) لافتراض الحصول على الحد الأعلى من المنفعة والربح . وبالمثل تكون تحليل سوق العوامل الفرد ماعدا ان دخل المستهلكين يكون محدودا بمبيعات عواملهم .

ان سعر كل سلعة وكل عامل من العوامل يكون بمثابة متغير لتحاليل السوق الخاصة به ويكون مؤشرا لتحاليل الأسواق الأخرى الباقية . فلا يوجد ضمان أن ينتج مجموعه متوافقة من الأسعار من الحل الجزئي **piecemeal solution** وذلك اذا أخذنا كل سوق على حده وسوف يكون من المصادفات أن السعر المفروض للسلعة Q_1 في تحليل سوق السلعة Q_2 هو نفس السعر الذي حددته تحليل السوق للسلعة Q_1 على حده .

ان جميع الأسواق تكون متداخلة ولها علاقة ببعضها البعض . فالمستهلكون ينفقون دخلهم على جميع السلع ، ويكون الطلب على كل واحد من هذه السلع معتمدا على أسعارها كلها . فاذا كانت السلعتان Q_1 و Q_2 بدائل أجمالية **gross substitutes** فان أي زيادة في سعر Q_1 سوف يدفع المستهلكين جميعا لتعويض Q_2 بدلا من Q_1 ولكن لو ان هاتين السلعتين كانتا متكاملتان ومتلازمتان في الطلب **complements** فان أي زيادة في سعر أحدهما قد يدفع المستهلكين لضبط استهلاكهم من كلا السلعتين (راجع الجزء ٢-٥) فمن الممكن تعريف زوجين من الدواخل على أساس أنها بدائل أو على أساس أنها تكمل كل وحدة منهما الأخرى بالإضافة الى أن الانتاج والاستهلاك لا يكونا مستقلين فالمستهلكين يكسبون دخلهم من بيع عملهم كخدمات يقدمونها وكذلك العوامل الأنتاجية الأخرى المهمة للمنتجين .

ونتيجة لهذه العلاقات المتداخلة ، فان التوازنات لأسواق العوامل وأسواق الانتاج يجب أن تحدد في نفس الوقت من أجل تأمين الحصول على مجموعة متوافقة من الأسعار .

ان المعلومات الخاصة بتحديد توازن الأسواق المتعددة بصفة عامة هي دالتي المنفعة والانتاج لجميع المستهلكين والمنتجين وكذلك ما يمتلكونه ميدانيا من العوامل / أو السلع . فالمتغيرات هي أسعار جميع العوامل والسلع والكميات المشتراة والمباعة من قبل كل مستهلك ومنتج . وتتطلب الافتراضات السلوكية أن تكون عملية الحصول على الحد

الأعلى من المنفعة والربح متشعبة مع شرط خلوك كل من الأسواق .

ان مناقشة تحاليل توازن الأسواق المتعددة لنظام التبادل البحث

Pure exchange تكون في الجزء ١-٩ ويكون موضحا لأنظمة السبعين في الجزء ٢-٩ ثم وسعت التحاليل لتغطي الانتاج والتبادل المقايض في الجز ٣-٩) أما في الجزء (٤-٩) فاننا نناقش مشاكل تحديد الأسعار المطلقة absolute price واختيار معيارا للقيمة standard of value

PURE EXCHANGE

٩ . ١ المقايضة (المبادلة) البحث

ان المقايضة البحث تتعامل مع مشاكل التوزيع والتسمير لمجتمع ما مكون من عدد n من الأفراد الذين يتبادلون ويستهلكون كميات محدودة من عدد m من السلع . ويكون كل واحد من افراد المجتمع مالكا لسلعة واحدة او اكثر وان يكون حرا في بيع وشرا ما عنده وما يحتاجه باسعار السوق السائدة فيمكن تفسير عمليات البيع والشرا على انها صفقات مقايضة تحويل مستهلكا ممتلكا لشعيرين من الكعرا* وثلاثة من التفاح وافترض انه لا يوجد اى سلع اخرى . فاسعار السوق السائدة سوف تحدد الشروط التي سوف يتم من خلالها عملية مقايضة الكعرا* للتفاح او التفاح للكعرا* فلو كان سعر الكعرا* خمسة قروش وسعر التفاحة عشرة قروش فان المستهلك سوف يحصل على تفاحة واحدة مقابل بيع كعرتين او كعرتين مقابل تفاحة واحدة فاذا علمنا اسعار السوق والممتلكات الاولى ، فان تبادل اى مستهلك سوف تتحدد بدالة منفعة العاديه . وسوف تكون حالة نادرة اذا لم يستطع اى مستهلك من رفع مستوى اكتفائه من خلال عملية المقايضة . فالمستهلك سوف يبيع جزا مما عنده من السلع ليضيف لما عنده مادام قادرا على زيادة الرقم القياسى لمنفعته

Equilibrium of the i th Consumer

التوازن للمستهلك

نعرف فائض الطلب للمستهلك i للسلعة j ونرمز له (E_j) على انه الفرق بين الكمية التي تستهلكها (q_j) وما عنده مبدئيا (q_j^0) :

$$E_j = q_j - q_j^0 \quad j = 1, \dots, m \quad (1-9)$$

فلوان ما استهلكه من Q_j فاق ما عنده مبدئيا ، فان فائض طلبه سوف يكون موجبا ، فهو يشتري Q_j من السوق . فلوان استهلاكه كان اقل مما عنده ، فان فائض طلبه سوف يكون سالبا ، فهو يبيع Q_j في السوق فليس من الممكن تحديد علاقة فائض طلبه مسبقا . فهو اما ان يبيع او ان يشتري Q_j فالتمييز الحاد بين المشتري والبائعين المستخدم نفس الباب السادس لا يكون ممكنا هنا .

فدخل المستهلك يساوى قيمة ماعده :

$$(2-9) \quad y_i = \sum_{j=1}^n p_j q_{ij}^0$$

فهذه هي كمية القوة الشرائية لو انه باع جميع ماعده فمن اجل ربطا التحاليل بتلك في الباب الثاني ، نفترض ، الان انه سوف يبيع جميع ماعده وتستخدم ما يتحصل عليه منها لشراء سلع بالاسعار السائدة في السوق . فقيمة السلع التي يشتريها والتي يستهلكها يجب ان تساوى دخله كما هو معطى بالمعادلة (2-9) :

$$(3-9) \quad y_i = \sum_{j=1}^n p_j q_{ij}$$

نفترض ان سوف تحتوي ، في اغلب الأحيان ، على بعض السلع التي باعها ، ولكن هذا لا يضر بان القيام بعطيات البيع والشراء لا تكلفه شيئا كما هو مفروض فيمكن حذف الصفقات التي تلغى نفسها بنفسها بدون ان تؤثر على التحاليل ولذلك فانه يفترض ان المستهلك سوف لا يبيع ويشتري نفس السلعة . ويمكن صيغة شرط ميزانيته بدلالة فائض طلبه \cdot ويشرح (2-9) من (3-9) وبالتصغير من (1-9) :

$$(4-9) \quad \sum_{j=1}^n p_j (q_{ij} - q_{ij}^0) = \sum_{j=1}^n p_j E_{ij} = 0$$

والتي تنص على ان القيمة الصافية لفائض طلبات المستهلك يجب ان تساوى صفرا . فشرط ميزانية المستهلك بهذه الصيغة وعلى هذا الشكل يوضح ان قيمة السلع التي يشتريها يجب ان تساوى قيمة السلع التي يبيعها \cdot

ان تحاليل التوازن للمستهلك والتي ناقشناها في الباب الثاني تحتاج الى تعديلات طفيفة لتطبيقها على المستهلك في اقتصاد القايضة - البحتة فمفهوم المستهلك القياسية تكون بدلالة كميات السلع التي يستهلكها ، ولكن يمكن صيغتها بدلالة فائض طلباته وما عنده من السلع وذلك بتمخيص $q_{ij} = E_{ij} + q_{ij}^0$ من (1-9)

$$(5-9) \quad U_i = U_i(q_{i1}, \dots, q_{im}) = U_i(E_{i1} + q_{i1}^0, \dots, E_{im} + q_{im}^0)$$

فالمستهلك يرغب في الحصول على الحد الاعلى من قيمة منفعة القياسية تحت شرط ميزانيته فباستخدام شرط دالة المنفعة في (5-9) وشرط الميزانية في (4-9) تكون الدالة :

$$(6-9) \quad V_i = U_i(E_{i1} + q_{i1}^0, \dots, E_{im} + q_{im}^0) - \lambda \left(\sum_{j=1}^n p_j E_{ij} \right)$$

ثم نضع الاشتقاق الجزئية للدالة V_i بالنسبة لفائض الطلبات و مساويه لصفر :

$$(7-9) \quad \frac{\partial V_i}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial U_i}{\partial E_{ij}} - \lambda p_j = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial \lambda} = - \sum_{j=1}^n p_j E_{ij} = 0$$

وبما أن $dE_j/dq_j = 1$ فإن المجموعة الأولى من معادلات (٧-٩) يمكن مياضها بدلالة زيادات المنفعة القياسية :

$$\frac{\partial U_j}{\partial E_j} \frac{dE_j}{dq_j} - \lambda p_j = \frac{\partial U_j}{\partial q_j} - \lambda p_j = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

فشرط الدرجة الأولى للمستهلك المفرد هي نفسها الشروط الطالوفة من الباب الثاني، فالمستهلك يشتري ويبيع السلع حتى يكون معدل ابدال السلع لكل زوج من السلع (=) لنسبة لزيادات منفعتهم القياسية (مساويا لنسبة اسعارهم) اما شروط الدرجة الثانية فافتراض شبه - التفرع المنضبط بانتظام (راجع الجزء ٦-٢) .

فلو ان شروط الدرجة الثانية تحققت ، فان من الممكن اشتقاق فائض متطلبات المستهلك i من شروط الدرجة الاولى . فنحذف من (٧-٩) ثم الحل للحصول ، على العدد m من فائض المتطلبات بدلالة اسعار السلع :

$$q_j = E_j(p_1, \dots, p_m) \quad j = 1, \dots, m \quad (٨-٩)$$

ويعتمد فائض متطلبات المستهلك على اسعار جميع السلع فاذا كان ما عنده Q_j لا يساوى صفرا فان فائض طلبه للسلعة Q_j قد تكون موجبا لبعض مجموعات من الاسعار ويكون سالبا للبعض الاخر

لقد اُخذنا في الجزء (٣-٢) ان d وال طلب المستهلك تكون متجانسة من الدرجة صفر في الدخل والاسعار . فمكن الممكن اثبات نظرية معاملة لاقتصاد القايضة البحث : ان d وال فائض طلب المستهلك تكون متجانسة من الدرجة صفر في الاسعار ، بمعنى ان فائض المتطلبات سوف تظل غير متغيرة اذا زادت جميع الاسعار وانخفضت بنفس النسبة (١) فلو ما غننا جميع الاسعار فان ذلك سوف يضاف كلا من قيمة ما عنده المستهلك وتكلفة السلع التي يشتريها . فلوان ما عنده المستهلك يكون كثيرا وطاق وان اسعارهم ارتفعت من خمسة عشرة قرش الى عشرة وعشرون قرشا على التوالي فان باكان المستهلك الحصول على ثقافة واحدة لاثنين من الكشرا او اثنين من الكشرا للثقافة الواحدة ففى مثل هذا الاقتصاد والقايضة فان المستهلك سوف يكون راغبا في حسب تبادل السوق بدلا من مستويات الاسعار البحث .

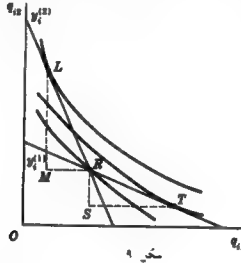
ان الرسم البياني (الشكل ١-٩) يحتوى على بيان وصفى لتوازن المستهلك المفرد

(١) الاثبات مشابه لذلك في الجزء (٣-٢) يتضمن d في شرط الميزانية نفس (٦-٩) ويوضع اشتقاقها الجزئية مساوية لصفر للحصول على نظام مشابه لـ (٧-٩) ونسمة المعادلات $(m+1)$ الاولى على المعادلات m كحذف و E_j نستخرج E_j كعامل مشترك من المعادلة $(m+1)$

فما يمتلك المستهلك تعدنيه احداثيات النقطة R وتكون خط دخله هو المحسـل المهندس لجميع الكميات الخليطة والتي يكون لها نفس القيمة في السوق كما لما تنطقه • فلوان $y^{(1)}$ يمثل خط دخله ، فانه سوف يعمل على الحصول على الحد الأعلى من منفعة يتحرك الى T فهو سوف يبيع RS وحدة من Q_2 ويشتري ST وحدة من Q_1 وذلك نتيجة لتحرك من R الى T ويكون فائض طلبه للسلعة Q_1 موجبا ويكون فائض طلبه للسلعة Q_2 سالبا •

افترض ان سعر Q_1 زاد بالنسبة لسعر Q_2 وان خط دخله الجديد هو $y^{(2)}$ فان نقطة L تكون موقع المنفعة القصوى بالنسبة لهذا الخط الجديد للدخل فالمستهلك سوف يبيع L وحدة من MR ويشتري Q_1 وحدة من ML ذلك نتيجة لتحرك من R الى L لذا نرى ان اى تغير في السعر كان نتيجة هو تغير في اشارات فائض متطلبات المستهلك • فالان ، يكون فائض طلبه للسلعة Q_1 سالبا ، وفائض طلبه للسلعة Q_2 موجبا •

ان عدم اهمية مستويات السعر البحت يكون واضحا من التحاليل البيانية على الرسم فملكية المستهلك تكون ممثلة بنقطة تمثل الكميات المادية • ويكون خط دخله مارا خلال هذه النقطة يعمل يساوي سالب نسبة اسعار السلع • فالتغير النسبي لكلا السعريين سوف يترك نسبتها غير متأثرة وسوف لا يتغير الميل ولا موقع خط الدخل •



Market Equilibrium

توازن السوق :

يمكن هنا دالة اجمالي فائض الطلب للسلعة Q_2 وذلك بتجميع دوال فائض الطلب لكل مستهلك من المستهلكين وعدد هم N :

$$E_i = \sum_{j=1}^m E_{ij}(p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_m) = E_i(p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_m)$$

وهذه الدالة تكون أيضا بدلالة أسعار السلع وعددها m ويمكن الحصول على توازن جزئي للسوق i إذا كان فائض الطلب للسلعة Q_i مساويا لصفر وذلك عندما تكون بقية الاسعار $(m-1)$ معطاة قيم ثابتة :

$$E_i(p_1^0, \dots, p_{j-1}^0, p_{j+1}^0, \dots, p_m^0) = 0 \quad (9-9)$$

وشروط (9-9) يكافئ الشرط الذي يتطلب ان يكون الطلب مساويا للعرض • ويمكن الحصول على سعر التوازن للسلعة Q_i وذلك بحل المعادلة (9-9) لقيمة p_i التي تعتمد على الاسعار المعينه للسلع الاخرى $(m-1)$ وتتحدد مشتريات ومبيعات المستهلكين كل على حدة بتموضيع سعر التوازن في دوال فائض الطلب المفردة •

Multimarket Equilibrium

توازن الأسواق المتعددة

والان نتعامل مع جميع الاسعار كمشتريات وتعتبر التوازن في نفس الوقت لجميع الاسواق وعدد m فاجبالي فائض الطلب يجب ان يساوى صفرا في كل سوق :

$$E_j(p_1, \dots, p_m) = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (9-10)$$

فشرط التوازن تكون نظام مكون من m معادلة محتوية على n متغير ولكن (9-10) لا تحتوي على اكثر من $(m-1)$ من المعادلات المستقلة •

ان شروط الميزانية للمستهلكين جميعا ليست شروط توازن ولكنها متطابقات identities تتحقق لاي مجموعة من الاسعار • وبجميع جميع شروط الميزانية المعطاة بالمعادلة (9-10) لجميع المستهلكين •

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_j E_{ij} = \sum_{j=1}^m p_j E_j = 0 \quad (9-11)$$

حيث ان $E_j = \sum_{i=1}^n E_{ij}$ وهذا النقط الاجمالي لشروط الميزانية ليس الا مطابقة تتحقق لاي مجموعة من الاسعار وهذه المطابقة تسمى قانون فالراز (Walras' law) بعض الاحيان ينطلق قانون فالراز • وتتطلب شروط التوازن ان كل اجمالي فائض الطلب يساوى صفرا اذا كانت جميع الاسعار موجبة • ومن الواضح انه اذا كانت $E_j = 0$ فان قيمة فائض الطلب لـ $Q_i(p_i, E_i)$ يجب ايضا ان يساوى صفرا فاذا كانت الاسواق الـ $(m-1)$ الاولى في توازن فان اجمالي قيمة فائض طلباتهم تساوى صفر :

$$\sum_{j=1}^{m-1} p_j E_j = 0 \quad (9-12)$$

ويطرح (9-12) من (9-11)

$$\sum_{j=1}^m p_j E_j - \sum_{i=1}^{n-1} p_i E_i = p_m E_m = 0$$

ويضع من هذا ان $E_m = 0$ اذا كانت $p_m \neq 0$ فانما تحققت التوازن في الاسواق لـ $(m-1)$ فان التوازن سوف يتحقق في السوق الـ m اليه .

ان توازن الاسواق المتعددة تصفه كالمعادلات الـ $(m-1)$ في (١٠-٩) فاضافه المعادلة m والتي تعتمد على المعادلات الـ $(m-1)$ الاخرى سوف لا يضيف اية معلومات جديدة . وما ان معادلات (١٠-٩) تكون مستقلة وظيفيا ، فان مصفوفة جاكوب الخاصة بهم Jacobian تكون مطابقة لصفر ، ولا يكون هناك حل فريد محلي لقيمة p_i . (راجع الجزء ٢-٨) ان عدم المقدرة على تحديد مستويات الاسعار البحثية يجب ان لا يكون نتيجة مفاجئة لو اننا تذكرنا ان المستهلكين راغبين فقط في نسب المبادلة في اقتصاد من نوع المقايضة .

وما ان دوال فائز الطلب تكون متجانسة من الدرجة صفر في الاسعار فان عدد المتغيرات يمكن تخفيضه الى $(m-1)$ وذلك بقسمة الاسعار البحثية الـ m بسماح احد السلع المختارة بطريقة عشوائية ، فلوان Q_1 وقع عليها الاختيار ، فان (١٠-٩) يمكن اعادة كتابتها كالتالي :

$$E_j = E_j(1, \frac{p_2}{p_1}, \dots, \frac{p_m}{p_1}) \quad j=1, \dots, m \quad (١٣-٩)$$

فالمتغيرات في (١٣-٩) هي اسعار Q_1 ($j \neq 1$) بالنسبة لسعر Q_1 بمعنى انها نسب المقايضة بالنسبة للسلعة Q_1 . فنحذف اى معادلة من (١٣-٩) نحصل على نظام مكون من $(m-1)$ معادلة وهذا النظام المكون من معادلات غاضليه يكون له حل رياضي فريد بالنسبة بنسب الاسعار الـ $(m-1)$ هذا اذا لم تنمى قيمة مصفوفة جاكوب في حدود حوار صفر neighborhood. فهذا الحل الرياضي الفريد انما هو توازن لاسواق متعددة وذلك اذا احتوى على كميات ونسب اسعار حقيقية وغير سالبة .

ومن الممكن بنا انظمة اسواق متعددة محددة بحيث يكون لها حلول توازن ، وبالمثل يمكن بنا انظمة لا يكون لها حلول توازن اما في هذا الباب فان التركيز على الانظمة التي يكون لها حلول توازن . اما الشروط التي تتحقق اولاً وتتحقق بها التوازن فانها سوف تكون من موضوعات الباب العاشر .

فحالما نحدد نسب المقايضة للتوازن من (١٣-٩) فان مشتروات ومبيعات كسل فرد يمكن تحديدها بالتعويض في دوال فائز الطلب المفردة . وعلى كل حال ، فانه يمكن

تحدد توازن الأسواق المتعددة بطريقة مباشرة بدون اللجوء الى دوال فائز الطلب
الاجالى • دوال الطلب المفرد تكون متجانسة من الدرجة صفر في الاسعار ويمكن
كتابتها على نمط (١٢-٩)

$$(١٤-٩) \quad E_i = E_i(p_1, \dots, p_n) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix}$$

والان نضيف شرط خلو السوق :

$$(١٥-٩) \quad \sum_{j=1}^m E_{ij} = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

فالنظام المكون من (١٤-٩) و (١٥-٩) يحتوى على $(mn + m)$ معادلة بحيث ان $(m - n)$
تمثل فائز الطلبات المفرد ، وان $(m - 1)$ تمثل نسب المقايضة كمستغيرات •
وكما سبق فان النظام يكون معتمدا وظيفيا ولا يمكن حله لمستويات الاسعار البحتة •

TWO-COMMODITY EXCHANGE

٩ ٢ تبادل السنتين

ان من الممكن توضيح اوجه مهمة جدا لتوازن الأسواق المتعددة وذلك من خلال
الامثلة التي يتبادل فيها شخصين سلعتين ونعطى هنا امثلة من حساب التفاضل والتكامل
وامثلة من الهندسة •

A Calculus Example

مثال حساب التفاضل والتكامل :

افترض ان الشخص I يمتلك 78 وحدة من Q_1 ولاشيء من Q_2 وان دالة منفعة

$$U_1 = q_{11}q_{12} + 2q_{11} + 5q_{12} \quad \text{هى :}$$

وتمتصيف $q_{11} = E_{11} + 78$ وكذلك $q_{12} = E_{12}$ في دالة منفعة ثم تكون الدالة :

$$V_1 = (E_{11} + 78)E_{12} + 2(E_{11} + 78) + 5E_{12} - \lambda(p_1E_{11} + p_2E_{12})$$

ضع الاشتقاق الجزئية لـ V_1 مساوية لصفر :

$$\frac{\partial V_1}{\partial E_{11}} = E_{12} + 2 - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial E_{12}} = E_{11} + 83 - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \lambda} = -(p_1E_{11} + p_2E_{12}) = 0$$

ويستطيع القارئ من التحقق من ان شرط الدرجة الثانية المقدم في الجزء (٢-٢) قد
تحقق •

ويهدف λ وحل شروط الدرجة الاولى لقيم E_{11} وقيم E_{12} فان دوال فائز الطلب

للشخص I تكون :

$$E_{11} = \frac{p_2}{p_1} - 41.5 \quad E_{12} = 41.5 \frac{p_1}{p_2} - 1$$

ويكون فائض طلباته بدلالة نسب سعر السلعة وتكون متجانسه من الدرجة صفر في الاسعار ويتحقق شرط ميزانيته لاي مجموعة اسعار :

$$p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 41.5 \right) + p_2 \left(41.5 \frac{p_1}{p_2} - 1 \right) = 0$$

وتستطك دوال فائض الطلب جميع المميزات العادييه • فاي زيادة في p_1 بالنسبه لـ p_2 سوف يخفض E_{11} ويرفع E_{12} وان اى زيادة في p_2 بالنسبه لـ p_1 سوف يزيده E_{11} ويخفض E_{12} .

افترض ان دالة المنفعة للشخص هي :

$$U_2 = q_{21}q_{22} + 4q_{21} + 2q_{22}$$

وان مطلعه مكونه من 164 وحدة من Q_2 ولاشيء من Q_1 فاشقاق شبهه باشتقاق الشخص I يعطى دوال فائض الطلبات :

$$E_{21} = 84 \frac{p_2}{p_1} - 1 \quad E_{22} = \frac{p_1}{p_2} - 84$$

ان شرط ميزانية II سوف يتحقق دائما ، وان فائض طلباته سوف يكون متجانسا من الدرجة صفر في الاسعار •
وتطبيق شرط خلو السوق :

$$E_1 = E_{11} + E_{21} = 85 \frac{p_2}{p_1} - 42.5 = 0$$

$$E_2 = E_{12} + E_{22} = 42.5 \frac{p_1}{p_2} - 85 = 0$$

فاى واحدة من هاتين المعادلتين كافيه لتحديد نسب المقايضة للتوازن فتحل المعادلة الاولى ، نجد ان $p_2/p_1 = 0.5$ ويحل الثانيه نجد ان $p_1/p_2 = 2$ فالحليين متطابقين

ففى حالة التوازن ، وحده واحده من Q_1 يمكن مبادلتها بوحدين من Q_2 •
وتعويض نسب اسعار التوازن في دوال فائض الطلب المفرده •

$$E_{11} = -41 \quad E_{12} = 82 \quad E_{21} = 41 \quad E_{22} = -82$$

فالشخص I يعطى الشخص II وحدة من Q_1 مقابل Q_2 وحدة من Q_2 .

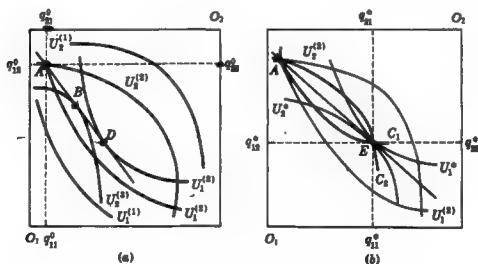
The Edgeworth Box

صندوق ادج وورث :

يمثل صندوق ادج وورث الصورة الهندسية لاقتصاد القائضه البحتة الذي يشتمل على شخصين يتبادلان سلعتين ان خارطة السوا "indifference" للشخص I تكون صورة بالطريقة العادية بقطعه اصل O_1 في الركن الجنوبي الغربي من الشكل (٩-٢) .

فطالة من منحنيات السوا "indifference curves" ممطة في الشكل (٩-٢) بحيث ان $U^p < U^p < U^p$ اما الرسم البياني لمنحنيات السوا للشخص II فانها دورت 180 درجة بحيث ان نقطة اصلها O_2 تقع في الركن الشمالي الشرقي من الرسم . وتقاس الكميات q_{21} ، q_{22} من البعدين الى الشمال ومن اعلى الى اسفل بالتوالي كلما تحرك الشخص بعيدا عن نقطة الاصل . فتزداد المنفعة كلما تحرك الى اسفل :

$U^p < U^p < U^p$ ولقد جمعنا بين منحنيات السوا لكلا الشخصين في رسم بياني واحد لتكون " صندوق " يكون عرضه مساويا لمجموع ما يمتلكه الشخص من السلعة Q_1 ويكون ارتفاعه مساويا لمجموع ما يمتلكه الشخصان من السلعة Q_2 وعصف كل نقطة داخله فمن الصندوق او على حدوده توزيعا محددا للكميات المحدودة للسلمتين . فعلى سبيل المثال ، نصف نقطة الاصل Q_2 الحالة التي يمتلك فيها الشخص I كلا السلمتين .



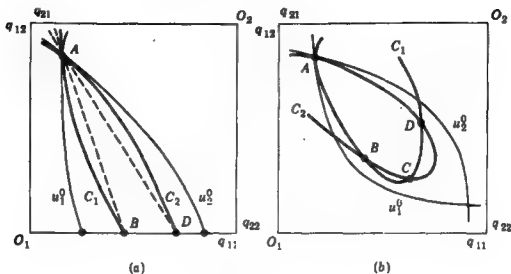
(٩-٢) شكل

اعبران ما يمتلكه الشخص I مكون من q_{11} و q_{12} وان ما يمتلكه الشخص II مكون من q_{21} و q_{22} والتي تعصف النقطة A في الشكل (٩-٢) اما شرطه الميزانية لكل واحد منهما فانه ممثل بخط مارا بنقطة A ويميل يساوي سالب نسبته الاسعار . اعبر خط الميزانية العار بنقطتي B و D فالشخص I سوف يحمل على الحد الاعلى من منفعة بمبادلة Q_2 مكان Q_1 وذلك بالتحرك من A الى D حيث

ان RCS الخاص به يساوى نسبة الاسعار . وبالمثل فالشخص II سوف يحصل على الحد الأعلى من منفعة بمبادلة Q_1 مكان Q_2 وذلك بالتحرك من A الى B ونسبه الاسعار هذه لا تعطى توازن لاسواق متعددة . فالـ RCS لكلا المستهلكين متساويين ولكن I يرغب في Q_1 بكمية اكبر مما يرغب II في بيعه ويرغب في بيع اكثر Q_2 مما يرغب II في شرائه .

ونعرف منحنى العرض *offer curve* للشخص I على انه المحل الهندسى لنقط الحصول على الحد الاعلى من المنفعة مثل نقطة D، والتي تحصل عليها كل دورنا خط الميزانية حول A لتمثل نسب اسعار مختلفة لمنحنى العرض للشخص I من الشكل (٩-٢)، بالحرف C_1 فهو يمر عبر A ن A سوف تكون نقطة منفعة نظى اذا كان نسبة الاسعار مساوية لمحل منحنى السعر عند نقطة A فلو كان خط الميزانية يعبر اكثر حده فانه سوف يبيع Q_1 ويشتري Q_2 ولكن لو كان خط الميزانية يعبر اقل وحده فانه سوف يشتري Q_1 ويبيع Q_2 فمنحنى العرض يقع على منحنى السعر الاولى $U^{(1)}$ ماعدا عند A حيث ان الاثنان يلتقيان . اما بالنسبة للشخص II فان منحنى عرضه هو C_2 وصمم بطريقة مماثلة لـ C_1 اما نقطة E على الشكل (٩-٢) حيث تقاطع C_1 و C_2 فانها تمثل توازن اسواق متعددة اما نسبة اسعار التوازن فانها تعطى بالميل السالب لخط الميزانية المار بنقطتي A و E وتكون مستويات المنفعة في حالة التوازن للشخص I و II هي U^I و U^{II} على التوالي . فالمستهلك I يستبدل $(q_1^I - q_2^I)$ وحدة من Q_2 من المستهلك II مقابل $(q_2^I - q_1^I)$ وحدة من Q_1 .

ان صندوق ادج ورت في الشكل (٩-٢) يوضح حالة مزعجه قد تحدث حتى ولو تحققت افتراضات شبه - التغير المنضبط . فما يمتلكه الشخصان يكون ممثلا بالنقطه A ويكون منحنى العرض للشخص I هو C_1 وللشخص II هو C_2 فلا توجد توازن فريد بتعريف عام للأسواق المتعددة لان ما يمتلكه I من Q_1 سوف ينفذ قبل مساواة RCSs للمستهلكين . فمن الواضح انه من الافضل لكلا المستهلكين ان يستبدلا . فالافتراض (التخمين) المعقول " هنا هو ان الوضع النهائي سوف يقع في مكان ما على الخط الممتد BD بمسمر محدد يعطى الخطين المستقيمين AD و AB ويجب عند رسم افتراضات اضافيه قبل اختيار اى نقطة توازن بعينها . فشكل (٩-٣) يوضح حالة يتحقق فيها افتراض شبه - التغير المنضبط وتوجد ثلاث نقاط توازن بارزة هي D, C, B وقد يتحقق القارىء من انه لبعض نسب الاسعار فان Q_2 سوف تكون بمثابة سلعة جيبن . Giffen good راجع لجزء (٢-٥) للمستهلك I وان Q_1 بمثابة سلعة جيبن للمستهلك II .



شكل ٩، ٣

٣ - ٩ الإنتاج والتبادل (المفاضلة) PRODUCTION AND EXCHANGE

والآن توسع تحاليل توازن الأسواق المتعددة يشمل الاقتصاد التي تكون فيه السلع تنتج وتتبادل معا . فما يمتلكه المستهلك يكون مكونا العوامل الأولية مثل الأرض وقوة العمل وبإضافته فإن جميع الأرباح التي تكتسبها الوحدات الانتاجية سوف توزع على المستهلكين . فالمستهلك يبيع عادة العوامل وتستخدم عوائدها مع ما يحصل عليه من أرباح لشراء ما يحتاجه من السلع . وقد يحتفظ بجزء مما يمتلكه لاستهلاكه الخاص . ومثال ذلك : قوة العمل فالمستهلك نادرا ما يعرض للبيع قوته العمل كاملة فقد يحتفظ بجزء منها لاستهلاكه على شكل قضاة وقت فراغ (وقت غير مخصص للعمل) فالمستهلك الذي يمتلك عاملا من العوامل التي لا تعطيه أي متعة ، فإنه سوف يعرض كل ما يمتلكه من هذا العامل بغض النظر عن سعر السلعة أو العامل . فبعض المستهلكين قد يبيع عاملا ويشتري آخر . ومثال ذلك صاحب الأرض الذي يوظف خدام محليين . فاصحاب رؤوس المال سوف يستخدمون العوامل والسلع المنتجة معا لإنتاج السلع . لهذه السلع المنتجة سوف تكون مستخدمة كدواخل وكمسلع استهلاكية في شكلها النهائي (١) .

(١) أن من الضروري أن يعبر عن بعض الأحيان السلع استهلاك الوسيط البحتية pure intermediate goods والغير مرغوبه من المستهلكين . لأنها تنتج ومن ثم تستخدم كدواخل inputs .

Equilibrium of the i th Consumer

توازن المستهلك

يمتلك كل واحد من الـ n مستهلك كمية تتكون من واحد أو أكثر من السلع الأولية وعددها s ونرمز لما يمتلكه المستهلك i بـ $q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{is}$ فقد يبيع (ويشتري) بالأسعار السائدة في السوق (p_1, p_2, \dots, p_s) فهو يستخلص منفعة من كميات العوامل الأولية التي يحفظ بها ومن الكميات $(m-s)$ للسلع المنتجة التي يشتريها .

$$U_i = U_i(q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{im}) \quad (١٦-٩)$$

حيث ان السلع المنتجة مرقمة من $(s+1)$ الى m .
فيكون فائض طلب المستهلك لاى عامل من العوامل يساوى الكمية التي يستهلك ناقصا الكمية الأولية التي يمتلكها ، وان فائض طلبه لاى سلعة يساوى الكمية التي يستهلك :

$$\begin{aligned} E_{ij} &= q_{ij} - q_{ij}^0 & j &= 1, \dots, s \\ E_{ij} &= q_{ij} & j &= s+1, \dots, m \end{aligned} \quad (١٧-٩)$$

فالفائض الطلب لاى عامل قد يكون موجبا ، او سالبا ، او صفرا ، ولكنه في الغالب يكون سالبا لان المستهلك مادة يبيع العوامل من اجل شراء السلع . ففائض طلبه للسلع يجب ان يكون موجبا او صفرا . فدخل المستهلك يساوى قيمة ما يمتلكه من العوامل زائدا ما يكتسبه من الربح :

$$y_i = \sum_{j=1}^s p_j q_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{h=1}^{N_k} \theta_{kh} \pi_{kh} \quad (١٨-٩)$$

حيث ان N_k هو عدد الوحدات التي تنتج السلعة k وان π_{kh} هو الارباح للوحدة h التي تقوم بانتاج السلعة k وان $\theta_{kh} \geq 0$ المستهلك النسبى من هذه الارباح (١) .

فقيمة العوامل والسلع التي يستهلكها يجب ان تساوى دخله :

$$y_i = \sum_{j=1}^m p_j E_{ij} \quad (١٩-٩)$$

ونحصل على معادلة ميزانية المستهلك بطرح (١٨-٩) من (١٩-٩) ثم نعبسوخ في (١٧-٩) :

$$\sum_{j=1}^m p_j E_{ij} - \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{h=1}^{N_k} \theta_{kh} \pi_{kh} = 0 \quad (٢٠-٩)$$

ويكون صافى قيمة فائض طلبه مساويا لما يكتسبه من الربح او الخسارة اذا كان سالبا فالمستهلك ، طبعيا يجبل الى الحصول على الحد الاعلى من المنفعة تحت شروط ميزانيته

(١) لقد افترضنا ان كل وحدة من وحدات الانتاج سوف تقوم بانتاج سلعة واحدة والا فسنضطر الى تغيير طريقة الجمع في المعادلة (١٨-٩) اذا فرضنا ان الوحدات تقوم بانتاج منتجات مشتركة .

نحمل على الدالة التالية :

$$Z_i = U_i(E_{i1} + q_{i1}^0, \dots, E_{im} + q_{im}^0, E_{i(m+1)}, \dots, E_{in}) \\ - \mu \left(\sum_{j=1}^m p_j E_{ij} - \sum_{h=1}^m \sum_{k=1}^{N_h} \theta_{hik} \pi_{hk} \right)$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئية للدالة Z_i مساوية لصفر :

$$\frac{\partial Z_i}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial U_i}{\partial E_{ij}} - \mu p_j = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (21-9)$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \mu} = - \left(\sum_{j=1}^m p_j E_{ij} - \sum_{h=1}^m \sum_{k=1}^{N_h} \theta_{hik} \pi_{hk} \right) = 0$$

تتطلب شروط الدرجة الأولى بأن يساوى المستهلك بين RCS لكل زوج من السلع ونسبة أسعارها . ولقد أشتبنا في الجزء (٦-٢) بأن افتراض شبه - التقعر المضبوط حصول منطقة ما سوف يضمن تحقيق شروط الدرجة الثانية . وبالتالي يمكن الحصول على دوال فائض طلبات المستهلك بحل (٢١-٩) لقيم الـ m فائض طلب وذلك بدلالة مستويات الربح التي نستمد منها الفائدة وكذلك بدلالة الـ m سعر . ولقد أشتبنا (فيما يلي) أنه من الممكن جعل الأرباح بدلالة أسعار السلع والمعامل ولذا فإنه يمكن جعل فائض طلبها بدلالة الأسعار فقط .

$$(22-9) \quad E_{ij} = E_{ij}(p_1, \dots, p_m) \quad j = 1, \dots, m$$

فالأرباح متجانسة من الدرجة الأولى بالنسبة للأسعار . ومن السهولة التأكد من أن فائض طلبات المستهلك تكون متجانسة من الدرجة صفر بالنسبة لأسعار جميع السلع والمعامل .

توازن الوحدة h من وحدات الصناعة j

Equilibrium of the h th Firm in the j th Industry

ان كل وحدة من وحدات الإنتاج سوف تقوم بخلط الداخلة لإنتاج سلعة واحدة فقط وذلك حسب القواعد الفنية technical rules التي تطبقها عليه دالة الإنتاج (١)

$$q_{hj} = f_{hj}(q_{hj1}, \dots, q_{hjM})$$

حيث أن q_{hj} هو مستوى الخارج للوحدة h في الصناعة j وأن q_{hj} هي كمية السلعة k التي يستخدمها المنتج كداخلة . فالمعامل والسلع (١- m) تستخدم كلاهما كداخلة فربح صاحب الوحدة الإنتاجية يتكون من إيراداته التنافسية competitive revenue ناقصا تكلفة الداخلة :

(١) فبعض الأحيان تقدم الإنتاج بالافتراض البديل الذي ينص على أن كل وحدة تنتج جميع السلع بالاشتراك .

$$\pi_M = p_M f_M(q_{M1}, \dots, q_{Mm}) - \sum_{k=1}^m p_k q_{Mk}$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئية للربح بالنسبة لكل داخل مساوية لصفر :

$$(٢٣-٩) \quad \frac{\partial \pi_M}{\partial q_{Mk}} = p_M \frac{\partial f_M}{\partial q_{Mk}} - p_k = 0 \quad k = 1, \dots, m$$

فصاحب الوحدة الانتاجية سوف يستفيد من كل داخل الى الحد الذي يجعل قيمة انتاجه الحدى الفيزيائى **marginal physical product** مساويا لسعره . فلو كانت دالة الانتاج محدبة بانحناءات فى منطقة ما فان شروط الدرجة الثانية سوف تتحقق فى تلك المنطقة ما عدا عند النقط المنعزلة (راجع الجزء ٣-٤) .

تتطلب الشروط (٢٣-٩) بأن $\partial q_{Mk} / \partial q_{Mk} = 1$ فاذا استخدم صاحب الوحدة الانتاجية ما ينتجه هو كداخل (مثل : الفلاح الذى يزرع القمح ومن ثم يستخدمه كحبوب) فانه سوف يستفيد منه للنقطة التى يساوى عندها الانتاج الحدى الفيزيائى الوحدة . ويمكن الحصول على دوال فائض طلب صاحب الوحدة الانتاجية بالنسبة له داخله وذلك لمنطقة انتاج محدبة بانحناءات منتظم بحل المعادلات m من (٢٣-٩) من أجل $q_{Mk} = E_{Mk}^*$:

$$(٢٤-٩) \quad E_{Mk}^* = E_{Mk}^*(p_1, \dots, p_m) \quad k = 1, \dots, m$$

ان كمية كل داخل يقوم بشرائها تكون بدلالة جميع الأسعار . وبما أنه أبدا لا يعرض (يبيع) دواخله ، فانه فائض طلبه يكون دائما غير سالبه .

فاذا كانت الصناعة I تحتوى على عدد N_I من الوحدات المتطابقة فان اجمالى فائض طلباتها للدخل k ستساوى فائض طلب صاحب وحدة ما مضروبا فى عدد الوحدات ضمن اطار الصناعة :

$$(٢٥-٩) \quad E_k^I = N_I E_{Mk}^*(p_1, \dots, p_m) = E_k^I(p_1, \dots, p_m, N_I)$$

فيكون فائض طلبات الصناعة لائى داخل ، بدلالة جميع الأسعار وعدد الوحدات الداخلة ضمن اطاره .

يمكن الحصول على فائض طلب صاحب الوحدة لمنتجاته هو (أو عرضه لمنتجاته هو) بالتعويض بدوال فائض الطلب لدواخله (٢٤-٩) فى دالة انتاجه ^(١) وبوضع :

$$E_M = -f_M(E_{M1}^*(p_1, \dots, p_m), \dots, E_{Mm}^*(p_1, \dots, p_m))$$

$$E_M = E_M(p_1, \dots, p_m) \quad \text{أو بأكثر تبسيطا :}$$

(١) لقد عرفنا بصورة متعملة دوال فائض طلب السلعة Q كتابع وكذلك كداخل . ويمكن الممكن دمج الاثنين معا كفايضا طلب واحد بدون التأخير على التحاليل .

فيكون فائض متطلبات الصناعة ككل يساوى فائض طلب أحد ممثلي الوحدات مضروباً في عدد الوحدات :

$$(٢٦-٩) \quad E_i = N_i E_{N_i}(p_1, \dots, p_m) = E_i(p_1, \dots, p_m, N_i)$$

ويعتمد فائض متطلبات الصناعة على أسعار جميع السلع وعدد الوحدات ضمن الصناعة
ان فائض طلب صاحب الوحدة للعتيعة ودواخله تكون متجانسة من الدرجة صفر في جميع الأسعار . فلو أن جميع الأسعار تغيرت بالعامل $t > 0$ فإن الربح سيصبح :

$$\pi_{N_i} = t p_i f_{N_i}(q_{N_i}^1, \dots, q_{N_i}^m) - \sum_{k=1}^m t p_k q_{N_i}^k$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئية مساوية لصفر :

$$\frac{\partial \pi_{N_i}}{\partial q_{N_i}^k} = t p_i \frac{\partial q_{N_i}^k}{\partial q_{N_i}^k} - t p_k = 0 \quad k = 1, \dots, m$$

$$t \left(p_i \frac{\partial q_{N_i}^k}{\partial q_{N_i}^k} - p_k \right) = 0 \quad k = 1, \dots, m$$

أو أن

$$p_i \frac{\partial q_{N_i}^k}{\partial q_{N_i}^k} - p_k = 0 \quad k = 1, \dots, m \quad \text{وبما أن } t \neq 0 \text{ فإن}$$

ويمكن وضع شروط الدرجة الأولى التي تحصلنا منها على فائض الطلب في إطار شبيهه
بالإطار (٢٣-٩) وبما أن شروط الدرجة الثانية تظل غير متغيرة وقد ذكرنا أن فائض
الطلبات سوف لا يتأثر بالتغير النسبي في جميع الأسعار .

Market Equilibrium

توازن السوق :

ويمكن إجمالاً دوال فائض الطلب للمستهلكين وأصحاب الوحدات الانتاجية لكلا
النوعين من السلع فيكون إجمالى فائض الطلب لائى عامل هو مجموع فائض الطلبات
للمستهلكين الـ n في (٢٢-٩) وللصناعات الـ $(m-s)$ على حساب الداخل (٢٥-٩) .

$$(٢٧-٩) \quad E_i = \sum_{j=1}^s E_{N_j}(p_1, \dots, p_m) + \sum_{k=s+1}^m E_k(p_1, \dots, p_m, N_k) \quad j = 1, \dots, s$$

أما إجمالى فائض طلب سلعة h فإنه يكون مجموع فائض طلبات الـ n مستهلك (٢٢-٩)
والـ $(m-s)$ صناعة على حساب الداخل (٢٥-٩) ونتجى هذه الدواخل (٢٦-٩) :

$$E_i = \sum_{j=1}^s E_{N_j}(p_1, \dots, p_m) + \sum_{k=s+1}^m E_k(p_1, \dots, p_m, N_k)$$

$$(٢٨-٩) \quad + E_i(p_1, \dots, p_m, N_i) \quad j = s+1, \dots, m$$

ويمكن تبسيط إجمالي فائض الطلب في (٢٧-٩) و (٢٨-٩) كالآتي :

$$E_j = E_j(p_1, \dots, p_m, N_1, \dots, N_m) \quad j = 1, \dots, m$$

ان فائض الطلب لكل سلعة يكون بدلالة الـ m سعر وعدد الوحدات ضمن الـ $(m-s)$ الصناعات المنتجة .

لقد افترضنا أنه يمكن تحديد سعر التوازن على المدى القصير للـ m سوق المعتمدة في منزلة من الـ $(m-1)$ سوق الأخرى وذلك بوضع إجمالي فائض الطلب للسلع تحت الاعتبار صافيا لصفر ويمكن معادلة على المدى القصير عدد الوحدات وكذلك الـ $(m-1)$ سعر للسلع الأخرى وكذلك عدد الوحدات ضمن الـ $(m-s-1)$ صناعة الأخرى، كمؤشرات أما التهمة (المنفعة) والانتاج ، ودوال فائض الطلب فاننا نعرّفها لفترة زمنية أطول في تعاليل المدى البعيد .

وبالإضافة فان عدد الوحدات ضمن الصناعة تعتبر متغيرا في تحديد التوازن على المدى الطويل لسوق السلع . ففائض الطلب والربح يوضع صافيا لصفر ومن ثم نحصل المعادلتين اللتانجتين للحصول على الربح وعدد الوحدات فأسعار التوازن على المدى القصير والطويل تكون غير سالبة وتؤخذ كميات استهلاك وانتاج ضمن المنطقة المعرف فيها دوال فائض الطلب .

Wulran' Law

قانون فالراس

بوضع ربح الوحدة h في الصناعة j بدلالة فائض الطلبات واعادة ترتيب الحدود :

$$(29-9) \quad p_j E_{hj} + \sum_{i=1}^m p_i E_{hi} + \pi_{hj} = 0$$

وتساوي صافى قيمة فائض طلبات الوحدة h بالسلب ربحها . وجمع (٢٠-٩) لجميع المستهلكين وجمع (٢٩-٩) لجميع المنتجين نتحصل على النتيجة :

$$\sum_{j=1}^m p_j E_j = 0$$

ولهذا فان قانون يتحقق كطابقة identity . لاى مجموعة أسعار في نظام العايقسة والانتاج ووجود أرباح موجه لا يؤثر على هذه النتيجة مجموع الأرباح تظهر على شكل حد سالب في إجمالي (٢٠-٩) وكحد موجب في إجمالي (٢٩-٩) .

Multimarket Equilibrium

توازن الأسواق المتعددة .

يتطلب توازن الأسواق المتعددة بأن يكون كل سوق خاليا cleared وأن يكون الربح مساويا لصفر في كل صناعة (١) .

$$\begin{aligned} E_j(p_1, \dots, p_m, N_{s+1}, \dots, N_m) &= 0 & j &= 1, \dots, m \\ \pi_j(p_1, \dots, p_m) &= 0 & j &= s+1, \dots, m \end{aligned} \quad (30-9)$$

حيث أن π_j هي ربح وحدة انتاجية معطاة للصناعة j وللمرة الثانية يتسبب قانسون فالراس في النتيجة التي تجعل اعتماد وظيفي بين فائض الطلبات ولا يمكن حل (30-9) لمستويات السعر المبحث .

وتعرف للمرة الثانية التوازن عن طريق الأسعار النسبية لأن طريق الأسعار المبحث وبما أن فائض متطلبات كل مستهلك ومنتج تكون متجانسة من الدرجة صفر في الأسعار فإن اجمالي فائض المتطلبات يكون متجانسا من الدرجة صفر في الأسعار . فأرسل كل صاحب وحدة انتاجية تكون متجانسة من الدرجة الأولى في الأسعار . فلو ضاغطنا الأسعار فإن مستويات منتجات ودواخل الوحدة الانتاجية سوف تظل بدون تغير ، ولكن مجموع إيرادات ومجموع تكلفته ومن ثم ربحه سوف يتضاعف ولكن لو أن توازنا على المدى الطويل قد تحقق لمجموعة من الأسعار فإن النظام سوف يظل في توازن حتى لو تغيرت جميع الأسعار بنفس النسبة . فضاغة جميع الأسعار سوف يترك فائض الطلبات مساويا لصفر . ولكن إيرادات وتكلفة الوحدة الانتاجية سوف يتضاعف غير أن مستويات الربح ستظل مساوية لصفر ، وسوف لا يكون هناك حافزا لأي وحدة انتاجية جديدة لدخول الصناعة .

ويمكن خفض عدد المتغيرات في (30-9) بواحد وذلك بقسمة m سعر بحث بسعر السلعة المختارة عشوائيا فلو أن Q_1 هي السلعة المختارة فإنه يمكن إعادة كتابة (30-9) على النحو التالي :

$$\begin{aligned} E_j\left(1, \frac{p_2}{p_1}, \dots, \frac{p_m}{p_1}, N_{s+1}, \dots, N_m\right) &= 0 & j &= 1, \dots, m \\ \pi_j\left(1, \frac{p_2}{p_1}, \dots, \frac{p_m}{p_1}\right) &= 0 & j &= s+1, \dots, m \end{aligned} \quad (31-9)$$

ولقد افترضنا أن هذا النظام يحتوى على $(2m-s-1)$ من المعادلات المستقلة

(١) لقد حذفنا معادلات الربح وافترضنا أن عدد الوحدات المنتجة قد حدد مسبقا لحالة تعادل توازن الأسواق المتعددة على المدى القصير .

والتي يمكن حلها لقيم التوازن لـ $(m-1)$ نسبة مقايضة بالنسبة Q_1 وكذلك لـ $(m-s)$ وحدة انتاجية وهذه القيم التوازنية للمتغيرات تكون جميعا غير سالبة .

وحالما تحدد نسب المقايضة في حالة التوازن وكذلك عدد الوحدات فإنه يمكن حساب فائض الطلبات لكل مستهلك ومالك بتمويض قيمها في دوال فائض الطلبات المفردة فأى حل توازن على المدى اللبيل سوف يحقق الشروط التالية :

- (١) أن كل مستهلك سوف يحاول الحصول على الحد الأعلى من المتعة .
- (٢) وأن كل مالك سوف يعمل على الحصول على الحد الأدنى من الربح .
- (٣) وأن كل سوق سوف يكون خاليا .
- (٤) وأن كل مالك سوف يكسب صفرا من الربح .

وسوف تكون قيم توازن مستويات الانتاج والاستهلاك الفردية ضمن المناطق المعروفة فيها دوال فائض الطلب الفردية .

٩ ٤ وحدة المقايضة والنقود : THE NUMÉRAIRE AND MONEY

لقد أنشأنا توازن الاسواق المتعددة لاقتصاديات من نوع المقايضة التي لا توجد فيها نقود متداولة حيث أن سلعا ومعاملا بودلت من أجل سلع وعوامل أخرى ، وتمت عمليات المبادلة هذه بوصف نسب المقايضة بالكامل ولقد قمنا بحل مثل هذه الأنظمة لـ $(m-1)$ نسبة مقايضة وذلك بالنسبة الى (أو بالرجوع الى) سلعة أختيرت بطريقه عشوائية ، تسمى عامة بوحدة المقايضة (أو المبادلة) numéraire فأى مجموعة أسعار بحيث تؤدي الى نسب المقايضة التوازنية تكون حلا توازنيا فلو وجد مثل هذا الحل ، فإنه سوف يوجد صعدا لاحصولة .

ان من الممكن تقديم عددا من أنواع مختلفة من النقود في اطار نظام توازن عام . فمن الممكن اختيار سلعة ما كمعيار للقيمة ومن ثم نخدم كنقود بحيث ان جميع الأسعار سوف يعبر عنها في حدود وحداتها ويمكن أيضا انشاء "النقود كوحدة حساب مفردة بحيث نستخدم كمعيار قيمة ولكنها غير قابلة للتداول ويمكن في بعض الظروف تقديم النقود الورقية المتداولة .

وحدة المقايضة : The Numéraire

ان لكل m سلعة يوحد m^2 نسبة مقايضة اذا أخذنا سلعتين في وقت واحد

$p_j/p_k (j, k=1, \dots, m)$ فمن هذه m توحيد متطلبات تنص على أن نسبة المقايضة لسلعة j على نفسها سوف تساوى الوحدة $\leftarrow p_j/p_k = 1 \quad j = k$ أما m^2 نسبة مقايضة فانها غير مستقلة. فإذا اعتبرنا المتطابقة $(m-1)$ نسبة مقايضة بحيث أن Q_1 تخدم كوحدة مقايضة فإن $(m-1)$ نسب مقايضة والمطلوبات الأخرى يمكن اشتقاقها من هذه :

$$(٢٢-٩) \quad \frac{p_k}{p_1} = \frac{p_k}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_1} \quad j, k = 1, \dots, m$$

تخيل أن Q_1 تمثل كمشرا، و Q_2 تمثل البرتقال، و Q_3 تمثل الطماح وأن البرتقالين تكون مقابل كمشرا واحدة $(p_2/p_1 = 0.5)$ وأن طماحه تكون مقابل كمشرين $(p_3/p_1 = 2)$ وبلاستفادة من (٢٢-٩) فإن أربعة برتقالات سوف تكون مقابل طماحه واحدة $p_3/p_2 = 4$. وسوف تعطى مجموعة نسب المقايضة كاملة بطريقة مباشرة أو غير مباشرة وذلك من طريق ال (١-٣) نسبة مقايضة وكذلك المتطابقة لوحدة المقايضة.

ويمكن تغيير وحدة المقايضة من Q_1 الى Q_2 وذلك بقسمة نسب المقايضة والمتطابقه للسلعة Q_1 بالمقدار p_2/p_1 :

$$\frac{1}{p_2/p_1} \left(1, \frac{p_2}{p_1}, \dots, \frac{p_k}{p_1}, \dots, \frac{p_m}{p_1} \right) = \left(\frac{p_1}{p_2}, \frac{p_2}{p_2}, \dots, 1, \dots, \frac{p_m}{p_2} \right)$$

نسب المقايضة سوف لا تتأثر بهذه التحويلة. فاختيار وحدة المقايضة تتم بطريقة عشوائية محضة.

ويمكن لوحدة المقايضة أن تخدم كمييار للقيمة فبوضع سعرها مطابقا للوحدة، فإن نسب المقايضة سوف تصبح $p_j/p_1 = p_j$ ولا تتأثر نسب المقايضة التوازنية بهذه التحويلة.

ويمكن التعبير من سعر التوازن لكل سلعة بعدد وحدات وحدة المقايضة التي تدفع عند المقايضة للحصول على وحدة واحدة من تلك السلعة. فسعر البرتقال يصبح نصف كمشرا لكل برتقاله، وسعر الطماح اثنين كمشرا لكل طماحه. فسعر الطماح يكون أربعة أضعاف سعر البرتقال، وأن طماحه واحد لا تزال مقابل أربعة برتقالات في حالة التوازن. فبذلك أصبحت وحدة المقايضة نقودا بالمفهوم أن وحداتها تخدم كمييار للقيمة ولكنها لا تخدم كعازن للقيمة لأنها تكون مرغوبة فقط كعادل انتاجي أو سلعة استهلاكية على نفس نط السلع الأخرى. فأى سلعة سوف تخدم كمييار قيمة بهذا المعنى.

فوضع الأسعار باستخدام سلعة ما مثل الكمشرا ليس من العارسة الشائعة فالأسعار توضع عادة باستخدام وحدات نقدية مثل الريال. فيمكن دمج نقود المحاسبة An accounting money ضمن إطار نظام توازن عام. ليس هناك سبب يمنع من جعل سم وحدة المقايضة ساويه للوحدة. فقد يمكن وصفها مساويه لـ $1/2, \sqrt{2}, 25$ مليون وهذا

سوف لا يؤثر على نسب المقايضة التوازنية فيمكن تقدير نقود الحسابه وذلك بوضع سعر وحدة المقايضة (أو أى سلعة أخرى) مساوية لعدد محدد من الوحدات النقدية . وبعد ذلك يمكن اشتقاق الأسعار النقدية للسلع الأخرى ، فلو أن Q_1 هي وحدة المقايضة وأن P_1 وضعت تساوى β من الريالات ، فإن السعر الريالى للسلعة Q_k (β_k) هو :

$$\beta_k = \beta \frac{Q_1}{P_1} \quad k = 2, \dots, m$$

فلو أن سعر الكثرة وضع مساويا لريالين فإن سعر الهرقالة سوف يكون ريالاً واحداً وأن سعر النقاعة سوف يكون أربعة ريالات . ففي هذه الحالة نخدم النقود فقط كوحدة مجردة للحساب ولكنها لا توجد بالمعنى الحسى ، فالسلع لا تزال تتبادل بسلع أخرى . فلا أحد يحتفظ بالنقود ، ولا أحد يرفض فى الحفاظ على النقود . فننتسود الحسابه يخدم كعميار وليس كمخزن للقيمة ^(١) .

ان من المريح فى بعض الأوقات تطبيق الأسعار normalize prices وذلك بتعريف وحدة حساب مثل $\sum_{i=1}^m P_i = 1$. ففي هذه الحالة سوف يكون من الأفضل تكوين مركب من جميع العوامل والسلع ، وليس سلعة واحدة ، ليخدم كقاعدة تقييم . فالتصريف المركب يتجنب المشاكل التى تنتج فى حالة أن لو كانت وحدة المقايضة المختارة مسبقاً (سراً) كانت عاملاً أو سلعة (سلعة حرة (سلعة بدون مقابل) free good راجع الجزء ١٠-١

Monetary Equilibrium

التوازن النقدى :

ان نقود السلع Commodity money ونقود الحسابه accounting money تكون مخططة تماماً من نقود المداوله circulating money التى نخدم كمخزن للقيمة فاقصاديو القرن التاسع عشر من الاقتصاديين قد قسموا الاقتصاد الى قطاعيه وذلك بالنسبة لتحديد سعر التوازن : القطاع الحقيقى real sector والذى تتحدد فيه نسب المقايضة والقطاع النقدى monetary sector والذى تتحدد فيه أسعار النقود البحتة absolute money prices وذلك من طريق كمية النقود الموجوده فالقطاع الحقيقى تد وضعته فى الأجزاء من (١-٩) الى (٣-٩) . وواجهنا الان هواغافه القطاع النقدى للتحاليل الحاليه . ومن أجل التبسيط فإن التحاليل سوف تشمل حالة المقايضه البحته بالرغم من أنها وبسهولة يمكن توسيعها لتفعلية الانتاج والمقايضه .

(١) أن افتراض أن النقود سوف نخدم كوحدة حساب سوف يكون ضيقاً فى التحاليل المستهلك والمالك . فيمكن التعبير عن دخل المستهلك بوحدة نقدية ، ولكنه سوف يصرف جميع دخله ولا يرفض فى الاحتفاظ بأى نقود وذلك الوحدة يرفض فى الحصول على الحد الأعلى من الربح النقدى ولكنه لا يرفض فى الحصول على الحد الأدنى من الربح النقدى ولكنه لا يرفض فى الاحتفاظ بالنقود فإذا كسب ربحاً موجباً فإنه سوف يصرفه بدوره كمستهلك .

افترض الآن أن المستهلكين الـ m يمتلكون أيضا كمية من النقود الورقية نرسلها بالرمز السفلي $(m+1)$: $(q_{m+1}^1, \dots, q_{m+1}^m)$ فهذه النقود الورقية سوف تخدم كمخزن للقيمة ولكنها لا تدخل ضمن إطار دوال المتعة (المنفعة) ونعبر فائز طلب المستهلك i للنقود الورقية على أساس أنه الكمية التي يرغب في الحفاظ عليها ناقصا ما يمتلكه مبدئيا:

$$E_{m+1} = q_{m+1}^1 - q_{m+1}^0 \quad (٢٣-٩)$$

ويكون فائز طلبه موجبا إذا أضاف إلى الكمية التي يمتلكها من البدايه ويكون سالبا إذا خفف من الكمية فيجب على ذلك أداة تعريف شرط ميزانية المستهلك (٢٩-٩) يشمل على النقود:

$$\sum_{j=1}^{m+1} p_j E_j = 0 \quad (٢٤-٩)$$

حيث أن p_1 يمثل سعر السلعة i أما سعر النقود p_{m+1} فإنه يساوي الوحدة حسب التعريف فالمستهلك يستطيع استبدال النقود مكان السلع أو السلع مكان النقود.

فلو كان فائز طلب المستهلك للنقود موجبا فإن قيمة السلع التي يبيعها ستكون قيمة السلع التي يشتريها وهذا يكون مبادلا سلع من أجل النقود.

وبما أن النقود لا تدخل ضمن دالة متعته فإن فائز طلبه للنقود لا يمكن تقيسه بقواعد الحصول على الحد الأقصى من المتعة. فمن المعتاد الافتراض بأن المستهلك يجد من المريح له الاحتفاظ بالنقود من أجل تسهيل صفقات الحصول على السلع افترض أن المستهلك يرغب في الاحتفاظ بكمية من النقود تكون عبارة عن نسبة محددة من القيمة النقدية لما يمتلكه من السلع بأدنى الأمر:

$$q_{m+1}^0 = \alpha_i \sum_{j=1}^m p_j q_j^0 \quad (٢٥-٩)$$

حيث أن ثابت α وبتعويض (٢٥-٩) في (٢٣-٩):

$$E_{m+1} = \alpha_i \sum_{j=1}^m p_j q_j^0 - q_{m+1}^0 \quad (٢٦-٩)$$

ونتحصل على إجمالي فائز طلبه للنقود بتجميع (٢٦-٩) لجميع المستهلكين m :

$$E_{m+1} = \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_j q_j^0 - \sum_{i=1}^n q_{m+1}^0 = E_{m+1}(p_1, \dots, p_m) \quad (٢٧-٩)$$

افترض أن $\alpha_i = \alpha$ لكل $i = 1, \dots, n$ وهذا سوف لا يؤدي إلى فقد أي شيء مهم فلو أن ما يمتلكه مبدئيا من السلع والنقود كانت ثابتة فإن فائز الطلب للنقود سوف يكسبون بدلالة أسعار السلع الـ m .

ونحدد دوال فائز الطلب للسلع m بطريقة الحصول على الحد الأقصى من المتعة

(المنفعة) لكل مستهلك تحت شرط العزائية بما في ذلك النقود وحل شروط الدرجة الأولى من أجل الحصول على دوال فائض الطلب المنفردة ثم التجميع لجميع المستهلكين ويكون هناك توازن تام إذا كان فائض الطلب لكل سلعة i ونقود تساوي صفراً :

$$(38-9) \quad E_j(p_1, \dots, p_m) = 0 \quad j = 1, \dots, m+1$$

وهذه المعادلة تعطي نظاماً مكوناً من $(m+1)$ من المعادلات التي تحتوي على m متغير وهي أسعار السلع - نبهنا أن فائض الطلب ليس بالضرورة أن الاعتدال الوظيفي موجود ضمن دوال فائض الطلب $(m+1)$ فإذا كانت أسواق السلع m في توازن فإن سوق النقود لابد وأن يكون في توازن أيضاً بمعنى أن المستهلكين ككل ليس لديهم الرغبة في التبادل بين النقود والسلع فكمية النقود التي يرغب المستهلك في الحفاظ عليها هي الكمية الموجودة ولقد افترضنا أن $(38-9)$ تحتوي على m من المعادلات المستقلة التي يمكن حلها لأسعار النقود في حالة التوازن وذلك للسلع m .

أن فائض طلبات السلع والنقود ليس متجانساً من الدرجة صفر في أسعار السلع فلو أن جميع الأسعار زادت بالمعامل $t > 0$ فإن فائض الطلب للنقود $(39-9)$ سيصبح :

$$(39-9) \quad E_{m+1} = \alpha \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_j q_{ij}^1 - \sum_{j=1}^m q_{j,m+1}^1$$

ويكون الاشتقاق الجزئي للمعادلة $(39-9)$ بالنسبة للمعامل t هي :

$$\frac{\partial E_{m+1}}{\partial t} = \alpha \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_j q_{ij}^1 > 0$$

فأي زيادة نسبية في أسعار السلع سوف يزيد من فائض الطلب على النقود فلو كان النظام في توازن قبل زيادة الأسعار فإن المستهلكين سوف يرفضون في استبدال السلع بالنقود وذلك من أجل معادلة الكمية النقدية بالقيمة النقدية لها يحطوكم من سلع عند البداية ولكن لن يوجد فائض طلب سالب للسلع بالمقابل . فأي تغير نسبي في سعر السلعة المتوازنة سوف يخرج النظام ككل من حالة التوازن .

أن فائض الطلب للسلع والنقود يكون متجانساً من الدرجة صفر في أسعار السلع وفي كميات النقود التي بدأ بها . ويصبح فائض الطلب للنقود كالتالي :

$$E_{m+1} = \alpha \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_j q_{ij}^1 - \sum_{j=1}^m q_{j,m+1}^1$$

واشتقاقها يكون :

$$\frac{\partial E_{m+1}}{\partial t} = \alpha \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_j q_{ij}^1 - \sum_{j=1}^m q_{j,m+1}^1$$

وهذا يساوي صفراً إذا كان سوق النقود في توازن قبل تغير الأسعار وظل كمية النقود

لكل مستهلك في العلاقة المطلوبة مع قيمة ما عنده من السلع وبهذا فإنه سوف لا يرغب في مبادلة السلع بالنقد أو النقود بالسلع .

أن من الممكن إثبات أن أي تغير في كمية النقود لكل مستهلك بالكمية ϵ سوف ينتج عنه تغير في سعر النقود لكل سلعة بنفس كمية ϵ ولكنه سوف يترك القطاع الحقيقي بدون تأثير فلما كان هناك توازن ومن ثم حدث زيادة في كمية النقود لكل مستهلك بالعامل ϵ فإن كل مستهلك سوف تكون لديه الرضاة في إبدال السلع بالنقد وكنيجة لذلك فإن أسعار السلع سوف تزداد حتى لا تزداد كميات النقود الموجودة من الكميات التي في حوزة المستهلكين .

وسوف يعود التوازن عند ما تزداد قيم جميع السلع الموجودة بالعامل ϵ :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_j q_{ij} = \epsilon \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_j q_{ij} \quad (40-9)$$

حيث أن p_j هي سعر السلعة j بعد وجود التوازن فالزيادات النسبية في جميع أسعار السلع : $p_j = \epsilon p_j$ ($j = 1, \dots, m$)

سوف يحقق (40-9) ولكن (40-9) سوف تتحقق بأي مجموعة أسعار أخرى اعتبر مجموعة تغيرات غير نسبية في السعر بحيث تحقق (40-9) فسوف ينتج هذا أن $p_h = \epsilon p_h$ وأن $p_k = \epsilon p_k$ حيث أن $\epsilon > 1$ لبعض قيم h و k وصبح نسب المقايضة بين Q_h و Q_k كالآتي : $p_h/p_k > p_h/p_k$

فسعر Q_h ارتفع نسبة إلى سعر Q_k وسوف يرغب المستهلكون في إبدال Q_k بالسلعة Q_h فلو كان النظام في توازن عند نسبة المقايضة الأولى فإن نسبة المقايضة الجديدة سوف ينتج عنها إلى إجمالي موجب لفائز الطلب للسلعة Q_h وينتج عنها أيضا إجمالي سالب لفائز الطلب على Q_k ويكون إجمالي فائز الطلبات لجميع السلع مساويا لصفر إذا كان فقط إذا كان $p_h/p_k = p_h/p_k$ for $h, k = 1, \dots, m$

وهذا موافق (ومتشبا) مع) للتوازن النقدي إذا كان فقط إذا كان : $p_j = \epsilon p_j$ ($j = 1, \dots, m$) فتقسيم تحديد توازن السعر قد اكتمل الآن ويكون نسب المقايضة التوازنية قد تحددت بدوال المتعة للمستهلك وكذلك القيم الحقيقية لمسا يمكنه أولا وتقرر أسعار النقود بكمية النقود .

ومن المحتمل والممكن تقديم النقود الورقية المتداولة ضمن إطار نظام التوازن العام الساكن static الغير حركي ولكن بصورة اصطناعية artificial فالمعادلة 39-9 تنظم نوعا من السلوك المنطقي رغم أنه غير رياضي ، الغير متشبا مع عملية الحصول على

الحد الأعلى من المنفعة (المتعة) فالمستهلك يرغب في الحفاظ على كمية من النقود لا يستفيد منها بأى منفعة أو متعة غير أنه يصرفها على السلع التي يستفيد منها ويحقق بها متعة ومنفعة أن من الصعب وجود دوافع للحفاظ على النقود في النظام الغير مركب الذي ليس له أى طاقه بالوقت السابق أو اللاحق . فصاحب النقود لا توجد الا في النظام المركب فقط الذي يكون فيه السلوك متعبا عبر الزمن .

النقود في دالة المتعة (المنفعة) Money in the Utility Function

ان وضع النقود بطريقة مباشرة في دالة المنفعة سوف يعطينا هد بلا للمعادلة ٣٥-٩ والتصيل هو أن كميات النقود تعطى متعة (منفعة) وذلك بتسهيل عملية المبادلة .
يمكن كتابة شروط الدرجة الأولى للمستهلك / كالتالى :

$$\frac{U_j}{U_{m+1}} = p_j \quad j = 1, \dots, m$$

$$(٤١-٩) \quad \sum_{j=1}^m p_j (q_j - q_j^0) + (q_{m+1} - q_{m+1}^0) = 0$$

حيث أن q_{m+1} تمثل النقود ولكن بسعر الوحدة فأى زيادة في السعر مع ثبات كمية النقود الأولى سوف ينتج عنه مبادلة السلع من أجل النقود .

نفترض أن أسعار جميع السلع والنقود التي يمتلكها المستهلك باءى^٥ ذى بد^٥ تسد تغيرت بنسبة $\epsilon > 0$ فنصبح شروط الدرجة الأولى :

$$\frac{U_j}{U_{m+1}} = \epsilon p_j \quad j = 1, \dots, m$$

$$(٤٢-٩) \quad \sum_{j=1}^m \epsilon p_j (q_j - q_j^0) + (q_{m+1} - \epsilon q_{m+1}^0) = 0$$

فيمكن فصل الاقتصاد الى قطاعين حقيقى ونقدى هذا اذا كانت القيم للمتغير q_j تحقق (٤١-٩) وأن ϵ مضروب في q_{m+1} التي تحقق (٤١-٩) سوف تحقق (٤٢-٩) . وبالمثل يمكن القيام بعملية الفصل اذا كانت دوال فائض الطلب للسلع والنقود متجانسه من الدرجة صفر ومن الدرجة الأولى بالتوالى وذلك بالنسبة لـ أسعار السلع وما يمتلكه من نقود فأى تغير فيها يمتلكه من نقود بنفس النسبة لجميع المستهلكين سوف ينتج عنه تغيرات في كميات النقود المعروفة وفي أسعار السلع بنفس النسبة وسوف يترك مستويات استهلاك السلع المعروفة من غير تغيير .

ان عملية الفصل غير ممكنه مائة ولكن هناك بعض الحالات التي يكون فيها الفصل ممكنا

فلو أن RCS الخاص بالمعادلة (٩-٤١) والمعادلة (٩-٤٢) تغيرا بالنسبة للتقود المحفوظة ، فإن عملية الفصل ستكون ممكنة . ففى مثل هذه الحالة فإن كميات السلع التى تحقق (٩-٤١) سوف تحقق أيضا (٩-٤٢) مع تغيير فى كمية التقود المحفوظة بالنسبة z . ومثل ذلك دالة المنفعة التى تستخدم دائما :

$$U_i = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_m^{\alpha_m} q_{m+1}^{\alpha_{m+1}}$$

حيث أن RCS الخاص بها سوف يكون متناسبا مع كمية التقود المحفوظة :

$$\frac{U_i}{U_{i+1}} = \frac{q_{m+1}}{q_i} \quad i = 1, \dots, m$$

ويمكن للقارىء من التحقق بأن دوال فائض الطلب تعطى التفاضل المناسب . وسوف نتحقق النتائج للمستهلك بالنسبة لاجمالى فائض الطلب اذا كان كل RCS للمستهلك متناسبا الى كمية التقود التى يحتفظ بها . وتغير كمية التقود التى يمتلكها مبدئيا بنفس النسبة .

SUMMARY

٩ - ٥ ملخص ماسبق

يسمح تحليلا، توازن الاسواق المتعددة بتعيين مجموعة متوافقة من الاسعار لكل السلعة . وفى تمام التبادل البحت، يفتح الافراد بمنزلاتهم، من السلع . ويكون كل فرد حرفان يشتري او يبيع السلع باسعار سائدة ومعرضه لتقود ميزانيه ، والتى تصطبى ان قيمة مبيعاته يجب ان تتساوى مع قيمة مشترواته . ويمكن اشتقاق دالة الطلب الزائد للفرد من شروط الدرجة الاولى لتعظيم الفائدة . ونحصل على الدالة الكلية بجمع الدوال المستقلة لكل سلعة . ويكون مجموع الزيادة الكلية للطلب مضروبا فى الاسعار مساويا تماما للصفر . وينتج هذا من قيود ميزانية الافراد ومعرفه بقانون والراس . ويكون دوال كل الافراد ، وبالنظر الى الدالة الكلية ، متجانسه ومن الدرجة صفر فى الاسعار . ويحدد سلوك المستهلك بنسب التبادل اكثر منه بالاسعار الحالية . ويطلب توازن الاسواق المتعددة ان تكون زيادة الطلب لكل سلعة مساوية للصفر . ويكون m من زيادات الطلب مرتبطه داليا كنتيجة لقانون والراس ، ويمكن التعبير عن حل الاتسازان بدلالة $(m-1)$ من نسب التبادل للسلع بالنسبة لوحدة حايضه اعتباره نختارها .

ويقدم الانتاج فى المرحلة الثانية من التحليل . ونفترض ان منح المستهلكين تكون من العوامل الاولية التى يبيعونها عادة للمقاولين لكن يكونوا قادرين على شراء السلع الخدمه . ويستقبل المستهلك اجزا " قدرة من الارباح ويخسر المستحق بواسطة وحدات الانتاج . ويشترى دوال الطلب الزائد للافراد للسلع والمعامل من شروط ذات الدرجة الاولى لتعظيم الربح او (الفائدة) . ويستعمل كل قاول كل من العوامل

والسلع كدخول لإنتاج سلعة واحدة ، وحصل القاول على دوال الطلب الزائد لدخله بأحلال قيم المدخولات في دالة إنتاجه . وتكون دوال الطلب الزائد للقاول متجانسة أيضا وذات الدرجة صفري السعر . وحصل على الدوال الكلية للطلب الزائد لكل عامل ولكل سلعة بجمع الدوال المستقلة لكل المستهلكين ولكل القاولين . ويكون قانون والراس قائما أيضا للدوال الكلية . ونقدم بالفرض متماثل . تتضح الزيادة الكلية للطلب دوال في الاسعار وعدد وحدات الانتاج في كل صناعة .

يمكن تعيين نسبه لتبادل من كل زوج من السلع من نسب التبادل بالنسبه لوحدة القايضة . ويمكن ان تعمل وحدة القايضة كتقود من ناحية القيمة القياسية . فيمكن وضع قيمتها كوحدة ونعبر عن كل الاسعار الاخرى بدلالة هذه الوحدة . ومن ناحية اخرى يمكن معادلة الاسعار بوضع مجموعها مساويا للوحدة . ويمكن استخدام التقود الحسابية التجريدية كقيمة قياسية . ويمكن تقدير الأوراق المالية المتداولة ، وسوف نحدد قيمتها اسامارا مبالغ في نظام تبادل يمتد اذا ما افترضنا ان المستهلكين سوف يحتفظون برصيد من المال مساو لنصيبهم من قيمة ارباحهم في بيع السلع . ولن نتحقق هذه النتيجة فانه اذا ما ادخلت التقود مباشرة في دالة الفائدة . وسوف نتحقق في الحالة الخاصة التي تكون فيها قيمة RCS للمال لكل وحدة من التبادل السلعي مقاسه بالنسبه لمسا يحتفظ به المستهلك من مال .

EXERCISES

9-1 Consider a two-person, two-commodity, pure-exchange, competitive economy. The consumers' utility functions are $U_1 = q_{11}q_{12} + 12q_{11} + 3q_{12}$ and $U_2 = q_{21}q_{22} + 8q_{21} + 9q_{22}$. Consumer 1 has initial endowments of 8 and 30 units of Q_1 and Q_2 respectively; II has endowments of 10 units of each commodity. Determine excess demand functions for the two consumers. Determine an equilibrium price ratio for this economy.

9-2 Construct offer curves as mathematical functions from the first-order conditions for the two consumers described in Exercise 9-1. Show that the equilibrium derived in Exercise 9-1 satisfies both offer curves.

9-3 Derive excess demand functions for the inputs and output of a representative firm with the production function $q_k = (q_{k1})^\alpha (q_{k2})^\beta$ where $\alpha, \beta > 0$ and $\alpha + \beta < 1$.

9-4 Consider a two-person, two-commodity, pure-exchange economy with paper money. The utility functions are $U_1 = q_{11}q_{12}^2$ and $U_2 = q_{21}q_{22}^2$. Consumer I has initial endowments of 30 units of Q_1 , 5 units of Q_2 , and 43 units of money; II has respective endowments of 20, 10, and 2. Each of the consumers desires to hold a money stock equal to one-fifth of the value of her initial commodity endowment. Determine equilibrium money prices for Q_1 and Q_2 . Show that the equilibrium prices would triple if the initial money stocks of I and II were increased to 129 and 6 respectively.

9-5 Reformulate the monetary analysis centering upon (9-35) in terms of a composite commodity and money.

SELECTED REFERENCES

- Allen, R. G. D.: *Mathematical Economics* (London: Macmillan, 1956). Multimarket equilibrium is covered in chap. 10. The necessary mathematical concepts beyond the calculus are developed in the text.
- Arrow, K. J., and F. H. Hahn: *General Competitive Analysis* (San Francisco: Holden-Day, 1971).^a Advanced mathematics is used to provide a comprehensive account of multimarket equilibrium.
- Kuenne, Robert E.: *The Theory of General Economic Equilibrium* (Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1963). A detailed treatise using fairly simple mathematics.
- Quirk, James, and Rubin Saposnik: *Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics* (New York: McGraw-Hill, 1968). Basic concepts are covered in the first two chapters. Simplified set-theoretic mathematics is used.
- Varian, Hal P.: *Microeconomics* (New York: Norton, 1978). Chap. 6 covers general equilibrium theory. Simplified modern mathematics is used.
- Walras, Léon: *Elements of Pure Economics*, trans. by William Jaffé (Homewood, Ill.: Irwin, 1954). The original statement of multimarket equilibrium theory.

الفصل العاشر

مواضيع لي توازن الأسواق المتعددة

TOPICS IN MULTIMARKET EQUILIBRIUM

لقد افترضنا في الباب التاسع وجود توازن مناسب للأسواق المتعددة ولكن هذا الافتراض للتسهيل حيث ان مجرد تكون نظام اسواق متعددة لا يعطى اى ضمانات لوجود حل توازنى . فبعض الانظمة لا يكون لها حل رياضى . ولكن البعض الاخر يكون لها . . حيث ان وجود الحل الرياضى غير كافى . فالاقتصاد يضع حدود على القيم المقبولة للتفسيرات . فالاسعار يجب ان تعطى بالاهداف الحقيقية الغير سالبة ^(١) . وبالاضافى فان مستويات استهلاك كل مستهلك ومستويات الدواخل والخارج لكل وحدة انتاجية يجب ان يكون غير سالبا فالحل الرياضى الذى يحتوى على مستويات استهلاك سالبة لا يعطى اى معنى اقتصادى وهذا على سبيل المثال :

يحتوى الجزء (١-١٠) على نقاش حول وجود توازن للأسواق المتعددة ثم توسع النقاش من شروط الثبات (استقراراً) الحركى والغير حركى لمعطى انظمة الاسواق المتعددة فى الجزء (٢-١٠) اما الجزء (٣-١٠) فانه يناقش افراد التوازن uniqueness of equilibrium ويحتوى الجزء الاخير (٤-١٠) على نظام الدواخل والخارج input-output للأسواق المتعددة وكذلك على دوال انتاجها الخطية .

(١) فإذا كان سعر السلعة سالبا ، فان قوة الشراء سوف تتحول من البائع الى المشتري بدلا من المشتري الى البائع . فالاسعار السالبة لا تكون دائما فائضة المعنى او غير معقولة . فمفهوم المستهلك على ما يسمى بالسلعة القديم *discommodity* مثل القوائم سوف ينخفض من مستوى سلعته وسوف يكون راجعا نفس الدفع لالائها . ولقد ازلنا احتمال معقولة الاسعار السالبة بتركيز الانتباه على السلعة المشيلة (القرينة) للسلعة المدم . فالمستهلك يفترض فيه انه سوف يشتري خدمات ازالة القوائم بدلا من بيع القوائم . ونعتبر ان حال جمع القوائم يكون موجبا وساوى في قيمة المطلقه للسعر السالب للقوائم .

١٠ - ١ وجود (قيام) التوازن EXISTENCE OF EQUILIBRIUM

يمكن اعتبار التساؤل حول قيام (وجود) حل مقبول من وجهتين مختلفتين فقد يرغب شخص ما في تحديد ما اذا (او لم يكن) هناك نظام اسواق متعددة محدد مطبق عاليا وله حل توازني . وقد يرغب شخص آخر على وجه اكثر عمومية وشمولا في اثبات نظرية وجود existence theorem تنص على وجود (قيام) حلول توازنية لجميع أنظمة الاسواق المتعددة والتي تحقق عددا من الافتراضات العامة .

يبدأ الفصل هذا بمناقشة وجود مجموعات محددة من دوال فائض الطلب . ومن ثم فوحة الانتباه الى المشكلة الأكثر عموما وهي وجود نظام تبادل وانتاج من نوع المسدى القصير والذي قد دناها في الفصل (٩ - ٣) أولا ، وضعنا محظورات على دوال الانتاج والمنفعة المفردة والتي تضمن وجود (قيام) دوال فائض طلب اجمالي مناسبة . وبعد هذا نقدم الطرق الفنية الرياضية التي ترتكز عليها نظرية النقطة الثابتة لبروود . وهذه النظرية Brouwer's fixed-point theorem تستخدم بعد ذلك لاثبات وجود توازن الاسواق المتعددة لجميع الأنظمة التي تحتوي على دوال الانتاج والمنفعة التي تتشبه مع الانضباطات المخصوص عليها . واخيرا وضعنا الاطار العام بالخطوط العريضة لبعض نظريات الوجود المتقدمة والمبنية على محظورات أكثر عموما .

حلول لبعض الأنظمة المحددة : Solutions for Particular Systems

يوجد حل من الدرجة الاولى ومعلنى لـ N' معادلة تفاضلية المحتوية على N متغير هذا اذا كانت مصفوفة جاكوب Jacobian لم تضمحل في حوار صغير (راجع الفصل 2-أ) فالنظام المحتوى على m معادلة والذي حصلنا عليه بوضع فائض الطلبات مساويا لصفر لا يمكن حله للقيم المطلقة لـ m سعر . بما ان اجمالي شروط العيزانية تتحقق دائما فان فائض الطلبات يكون معتد اعلى الدوال وتضمحل مصفوفة جاكوب الخاصة بها تطبيقيا . فعدم وجود حل محلى وحيد للاسعار المطلقة (البحت) يكون له معنا من الناحية الاقتصادية الا ان فائض الطلبات متجانسه من الدرجة صفر في جميع الاسعار . فبوضع $p_1 = 1$ وحذف معادلة فائض الطلب للسلمة Q_1 فان النظام سوف يخفص الى $(m-1)$ معادلة في $(m-1)$ سعر متغير فحتى الان ، افترضنا ان هذه المعادلات تكون مستقلة وانه يوجد حل من الدرجة الاولى univalent solution للنظام المنخفض وهذا الافتراض ليس بالحقائق ضروريا فاذا اعتبرنا النظام المنخفض والمكون من ثلاثة سلع الاى :

$$E_2 = -2p_2 - 4p_3 + 10 = 0$$

$$E_1 = -3p_2 - 6p_3 + 15 = 0$$

فإن مصفوفة جاكوب لهذا النظام سوف تضمحل تطبيقيا ولا يمكن حله لقيم وحده للسعرين p_2 و p_3 وتكون دوال فائز الطلب للسلمتين Q_1 و Q_2 غير مستقلة ويكون الاعتماد الدالي في هذه الحالة هو $\bar{E}_1 = 1.5E_2$ فالمجتمع ككل يطلب ويعرض دائما السلمتين Q_1 و Q_2 ولكن بنسبة ثابتة فأي مجموعة من القيم للسعرين p_2 و p_3 تحقق $p_2 = 5 - 2p_3$ سوف ينتج عنه توازن للأسواق المتعددة • والامثلة على هذا تكون $p_2 = 1$, $p_3 = 2$ وكذلك $p_2 = 3$, $p_3 = 1$ ففي هذه الحالة ينص اختبار جاكوب على أنه لا يوجد حل محلي من الدرجة الأولى ولكنه لا يعطى أى مساعدة في التحديد بأن هناك حلول أخرى موجودة بالفعل •

فالنظام الذى ينطبق عليه اختبار جاكوب يكون له حلول رياضية محلية وحيدة ولكن قد يحتوى بعض هذه الحلول على أسعار سالبة أو يتطلب مستويات إنتاج واستهلاك سالبة لبعض المشاركين في السوق ، ولا يكون بالطبع مقبولا لتوازن لأسواق متعددة فكل نظام عددي لأسواق متعددة يجب أن يعامل على انفراد أولا ، نطبق شـسـرط جاكوب بعدم الاضمحلال لتحديد ما إذا وجد حل رياضي محلي وحيد • فإذا وجد واحدا فيجب واحدا فيجب المجهولة لحل النظام واختيار حل (أو حلول) له من وجهة نظر قبول أو عدم قبول هذه الحلول من الوجهة الاقتصادية • فلوان مصفوفة جاكوب اضمحلت فيجب تطبيق ما يمكن تطبيقه بأى طريقة تظهر مناسبة في الظروف الراهنة لتحديد ما إذا وجدت حلول توازنه أم لا •

Brouwer's Fixed-Point Theorem

نظرية النقطة الثابتة لبرور

إن طريقة الحل المقترحة لأنظمة معينة لا تساعد كثيرا في اعتبارات وجود الحلول لأنظمة الأسواق المحددة التي لم تطبق عليها ولا للأنظمة التي تحتوى دوال فائز الطلب فيها على التواءات kinks يكون الاشتقاق عندها غير معرفا • ففي هذه الحالات يكون من الضروري اثبات نظرية الوجود والتي تنص على أن جميع أنظمة الأسواق المتعددة المحققة للافتراضات المنصوص عليها سوف يكون لها حلول توازنه وتعتمد اغلب اثباتات الوجود على نظام أو آخر من النظريات الرياضية تسمى نظريات النقطة الثابتة فنظرية برور هي إحدى هذه النظريات الرياضية والتي هي أقلها صعوبة والمستخدمه في الاقتصاد وتناقش فيما يلي الطريقة الرياضية المبنية عليها هذه النظرية •

إن القاعدة التي تقوم بتطبيق نقطة بنقطة في الفضاء البعدى النوني أو النونسي

او مجموعة القواعد التي تصب نقطة في الفضاء البعدى النوائى ينقله اخرى في نفس الفضاء . أما اذا افترضنا ان (x_1, x_2) تمثل نقطة في الفضاء البعدى التريبعى ، وأن (x'_1, x'_2) تمثل النقطة المطابقة لها . فالتقاربتين $x'_1 = x_1 + x_2$ ، $x'_2 = x_1^2 x_2$ ، يعطيان مثلا للمطابقة mapping في الفضاء البعدى التريبعى two-dimensional space . فليكن وضع x'_1 و x'_2 بدلالة x_1 ، x_2 ويمكن كتابة المطابقة في الفضاء البعدى النوائى ماه كالآلى :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad i = 1, \dots, n$$

او يكتبها بطريقة أكثر خفيا : $x' = F(x)$ حيث أن $x = (x_1, \dots, x_n)$ وهذا مشابها للطريقة التي تمثل لها بالدوال ما عدا ان x و x' هنا يمثلان نقطتين بأحداثيات نونية بدلا من أعدادا منفردة فالنقطة x' تسمى صورة image النقطة x وتكون المطابقة "متصلة" اذا كانت كل دالة من الدوال $f_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) التي تكونها متصلة ايها .

نفذ تصرف المطابقة لبعض المجموعات الجزئية للنقط subset of points في فضاءها الأحادى coordinate space نمثلا للمطابقة $F(x)$ قد تعرف فقط للنقاط الواقعة على الدائرة التي يكون مركزها عند نقطة الأصل ونصف قطرها يساوى الوحدة ، بمعنى أنها للنقاط التي تكون إحداثياتها تحقق $x_1^2 + x_2^2 = 1$ وتكون المطابقة "ذاتية" into itself اذا كانت نقاط المطابقة تقع ايها في مجموعة النقاط التي عرفت لها المطابقة فالدوال التالية تعطى مثلا لمطابقة مجموعة من النقاط الواقعة على الدائرة التي نصف قطرها الواحدة على ذاتها : (1)

$$x'_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad x'_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

تعرف مجموعة النقاط بأنها "محدبة" convex اذا كانت كل نقطة على قطعة الخط المستقيم الواصل بين أى نقطتين في المجموعة تنتمى الى نفس المجموعة ، فمجموعة النقاط المكونة من محيط الدائرة لا يكون محدبا لأن قطعة الخط المستقيم الواصل بين نقطتين محددتين في المجموعة تحتوى على نقاط داخل الدائرة وهذه النقاط ليست في المجموعة المعتمدة . أما مجموعة النقاط المكونة من محيط ود داخل الدائرة فأنها تكون محدبة .

ونعرف مجموعة النقاط في الفضاء البعدى النوائى بأنها "محددة من أعلى" bounded from above اذا وحدت كمية متجهة vector بأعداد نونية محددة $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ بحيث أن $x_i \leq x_i^*$ لجميع قيم $x = (x_1, \dots, x_n)$ في المجموعة وتعرف المجموعة بأنها

(1) فلأول $F(x)$ كانت معرفة لجميع النقط في الفضاء البعدى التريبعى فإن المطابقة سوف تحول الفضاء البعدى التريبعى الى الدائرة ذات نصف القطر المساوى للوحدة ولا تكون مطابقة "ذاتية" .

"محدودة من أسفل" *bounded from below* إذا وجدت مجموعة ارقام ثوابه محدودة x^* بحيث أن $x \geq x^*$ لجميع قيم x في المجموعة فالمجموعة المحددة *bounded set* تكون محدودة من أعلى ومن أسفل . مجموعة النقاط المكونة لمحيط الدائرة تكون محدودة ولكن مجموعة النقاط المكونة للريح العوجب في الفضاء الاحداثي غير محدودة .

وتعرف مجموعة النقاط بأنها "مغلقة" *closed* وذلك عندما تكون كل نقطة مسن نقاط المتتاليه اللامتناهيه المقاربه *convergent infinite sequence* أيضا في المجموعة وتكون نقطة النهاية *limit point* لهذه المتتاليه أيضا في المجموعة ^(١) لمجموعة النقاط المعرفه بـ $0 < x < 1$ ليست مغلقة لان كل نقطه في المتتاليه اللامتناهيه $1/n, 1/2, 1/3, \dots$ تكون في المجموعة ، ولكن نهاية المتتاليه ، هي صفر ، ليست في المجموعة . ولكن المجموعة $0 \leq x \leq 1$ تكون مغلقة .

تتس نظرية النقطة الثابتة لبروير على ان للحايطه المتصله للمجموعة المغلقة والمحدودة والمعدله الذاتية نقطة ثابتة بمعنى أنه إذا كانت $F(x)$ هي الحايطه فانه يوجد نقطة x^* في المجموعة نعرف عليها الحايطه بحيث $x^* = F(x^*)$ فعلى الاقل نطاق نقطة واحدة على نفسها (ذاتية الصابق) اعتبر الصابق $F(x)$ الموضح على الشكل (١-١) كشال للصابق (الحايطه) يكون معروفا في الفترة $0 \leq x \leq 1$ والتي تكون مغلقة ومحدودة ومحددة المجموعة على الخط الحقيقي *real line* . وكذلك فان الصابق يكون متصلا أيضا ولذا فانه يجب ان يكون هناك نقطة واحدة على الاقل بحيث أن الرسم البياني لـ $F(x)$ يتقاطع مع خط 45. المار بنقطة الأصل . فنقطة A في الشكل تكون مثل هذا التقاطع بالخاصيه التاليه $x^* = F(x^*)$.

والآن نقدم أمثالا توضيحيا للوجود *existence* باستخدام نظرية النقطة الثابتة لبروير وذلك لنظام الاسواق المتعددة من نوعية العدى القصير والذي طورناه في الفصل (٣-٩) ففي هذا الإطار ، تعنى "بالدى القصير" عدد الوحدات الانتاجيه في كل صنعه قد تحدد مسبقا وأن الأرباح لكل وحده أنتاجيه لوحدها لا يحتاج أن يكون مساويا لصفر . فالأمثايات يأتي على مرحلتين :

- أولا : أمثايات وجود دوال فائض الطلب الاجمالية بخواص مناسبه .
- ثانيا : أمثايات وجود اسعار توازن تحقق هذه الدوال .

(١) لقد اعطينا في الفصل (٧-٥) تعريفا لمجموعة النقاط المغلقة مختلفا عن هذا التعريف ولكنه مطابق له .

الحد الأعلى من المنفعة (المتعة) فالمستهلك يرغب في الحفاظ على كمية من النقود لا يستفيد منها بأي منفعة أو متعة غير أنه يصرفها على السلع التي يستفيد منها ويحقق بها متعة ومنفعة أن من الصعب وجود دوافع للحفاظ على النقود في النظام الفيرموزي الذي ليس له أى طاقته بالوقت السابق أو اللاحق • فصاحب النقود لا توجد إلا في النظام المرموزي فقط الذي يكون فيه السلوك مقيدا عبر الزمن •

النقود في دالة المتعة (المنفعة) Money in the Utility Function

ان وضع النقود بطريقة مباشرة في دالة المنفعة سوف يعطينا بدلا للمعادلة ٩-٢٥ والتفصيل هو أن كميات النقود تعطى متعة (منفعة) وذلك بتسهيل عملية المعادلة • فيمكن كتابة شروط الدرجة الأولى للمستهلك / كالآتي :

$$\frac{U_j}{U_{m+1}} = p_j \quad j = 1, \dots, m$$

$$(٩-٢١) \quad \sum_{j=1}^m p_j (q_j - q_j^0) + (q_{m+1} - q_{m+1}^0) = 0$$

حيث أن q_{m+1} تمثل النقود ولكن بسعر الوحدة فأى زيادة في السعر مع ثبات كمية النقود الأولى سوف ينتج عنه مبادلة السلع من أجل النقود •

نفترض أن أسعار جميع السلع والنقود التي يمتلكها المستهلك بأى " ذى بد " قد تغيرت بنسبة $t > 0$ فنصبح شروط الدرجة الأولى :

$$\frac{U_j}{U_{m+1}} = t p_j \quad j = 1, \dots, m$$

$$(٩-٢٢) \quad \sum_{j=1}^m t p_j (q_j - q_j^0) + (q_{m+1} - t q_{m+1}^0) = 0$$

فيمكن فصل الاقتصاد الى قطاعين حقيقي ونقدي هذا اذا كانت القيم للمخبر q_j تحقق (٩-٢١) وأن t مضروب في q_{m+1} التي تحقق (٩-٢١) سوف تحقق (٩-٢٢) • وبالمثل يمكن القيام بعملية الفصل اذا كانت دوال فائز الطلب للسلع والنقود متجانسة من الدرجة صفر ومن الدرجة الأولى بالتوالى وذلك بالنسبة لأسعار السلع وبما يمتلك من نقود فأى تغير فيها يمتلك من نقود بنفس النسبة لجميع المستهلكين سوف ينتج عنه تغيرات في كميات النقود المرغوبة وفي أسعار السلع بنفس النسبة وسوف يترك مستويات استهلاك السلع المرغوبة من غير تغيير •

ان عملية الفصل غير ممكنة عادة ولكن هناك بعض الحالات التي يكون فيها الفصل ممكنا

فلو أن RCS الخاص بالمعادلة (٩-١) والمعادلة (٩-٢) صغيرا بالنسبة للتقود المحفوظة ، فإن عملية الفصل ستكون ممكنة . ففى مثل هذه الحالة فإن كميات السلع التى تحقق (٩-١) سوف تحقق أيضا (٩-٢) مع تغيير فى كمية التقود المحفوظة بالنسبة z . ومثل ذلك دالة الطفلة التى تستخدم دائما :

$$U_i = q_{1i} q_{2i} \dots q_{ni} q_{m+1i}$$

حيث أن RCS الخاص بها سوف يكون متناسبا مع كمية التقود المحفوظة :

$$\frac{U_i}{U_{i+1}} = \frac{q_{m+1i}}{q_{m+1i+1}} \quad i = 1, \dots, m$$

ويمكن للقارئ من التحقق بأن دوال فائض الطلب تعطى التباين المناسب . وسوف نتحقق النتائج للمستهلك بالنسبة لاجمالى فائض الطلب اذا كان كل RCS للمستهلك متناسبا الى كمية التقود التى يحتفظ بها . وتغير كمية التقود التى يملكها مبدأ بنفس النسبة .

SUMMARY

٩ - ملخص ماسبق

يسمح تحليل توازن الأسواق المتعددة بتعيين مجموعة متوافقة من الاسعار لكل السلع . وفى تمام التبادل البحت، يضع الافراد بمنزلة من السلع . ويكون كسل فرد حرف ان يشتري او يبيع السلع باسعار سائدة ومعرضه لقيود الميزانية ، والتى تنبئ على ان قيمة صيغته يجب ان تتساوى مع قيمة مشتروا . ويمكن اشتقاق دالة الطلب الرائد للفرد من شروط الدرجة الاولى لتعظيم الفائدة . ونحصل على الدالة الكلية بجمع الدوال المستقلة لكل سلعة . ويكون مجموع الزيادة الكلية للطلب مضربا فى الاسعار مساويا تماما للصر . وينتج هذا من قيود ميزانية الافراد . يعرف بقانون والرأس . ويكون دوال كل الافراد ، وبالتالى الدالة الكلية ، متجانسة ومن الدرجة صفر فى الاسعار . ويتحدد سلوك المستهلك بنسب التبادل اكثر منه بالاسعار المطلق . ويطلب تساوي الأسواق المتعددة ان تكون زيادة الطلب لكل سلعة مساوية للصر . ويكون m من زيادات الطلب مرتبطه داليا كنتيجة لقانون والرأس . ويمكن التعبير عن حل التوازن بدلالة $(m-1)$ من نسب التبادل للسلع بالنسبة لوحدة قابضه اختارها .

ويقدم الانتاج فى المرحلة الثانية من التحليل . ونفترض ان منح المستهلكين تتكون من العوامل الاولى التى يبيعونها مادة للعاقلين لكى يكونوا قادرين على شراء السلع المنتجة . ويستقبل المستهلك اجزا مقدرة من الارباح ويخسر المستحق بواسطة وحدات الانتاج . وتشتر دوال الطلب الرائد لافراد السلع والعوامل من شروط ذات الدرجة الاولى لتعظيم الربح او (الفائدة) . ويستعمل كل عاقل كل من الموااسل

بحيث أن سلعة أولية k_j ($j = 1, \dots, s$) سوف تتركب من السلع المستهلكة بحيث أن السلعة المنتجة k_j ($j = s+1, \dots, m$) سوف تتركب من السلع المستهلكة Q_j الذي يمكن تأمينه إذا جندت جميع السلع الأولية التي يمتلكها الاقتصاد لإنتاج Q_j .

والآن نركب مجموعة دوال فائض طلب غير حقيقية (زائفة) $pseudo$ بأنفسـمـرا نحن المستهلك i سوف يحصل على الحد الأقصى من المنفعة تحت شرط ميزانيته والمطلبات الإضافية الأخرى أن $E_j \leq k_j$ ($j = 1, \dots, m$) وسنعال هذه الدوال هو مجموعة الاسعار الطبيعية لى $(1, \dots, m)$ وهذه الدوال الغير حقيقية مثل الدوال التقليديـه $(1, \dots, m)$ لجميع نقاط الاسعار التى تحقق :

$$E_j(p_1, \dots, p_m) \leq k_j \quad j = 1, \dots, m$$

ولكن هذه اللامتناهية (المتباينات) لا تتحقق لجميع النقاط مجموعة الاسعار الطبيعية . فواحدة أو أكثر من هذه المتباينات سوف لا تتحقق إذا كان واحدا أو أكثر من الاسعار إما صفرا أو صغير بدرجة كافية لتوليد فائض طلبات أكبر من الحد الأعلى المطابق .

افترض أن n من الحدود العليا تكون من المتباينات بدون علامة التساوى (متباينة منضبطة strict equalities ثم اعد ترقيم السلع بحيث أن $E_j = k_j$ ($j = 1, \dots, n$) نموض بهذه المتباينات ثم تكون دالة لا قتران :

$$Z_i = U_i(k_1, \dots, k_n, E_{n+1}, \dots, E_m) - \mu \left(\sum_{j=1}^n p_j k_j + \sum_{j=n+1}^m p_j E_j - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{k_k} \theta_{kl} w_{kl} \right)$$

ضع الاشتقاق الجزئية $(m - n + 1)$ لهذه الدالة مساوية لصفر :

$$\frac{\partial Z_i}{\partial E_j} = U_j - \mu p_j = 0 \quad j = n+1, \dots, m$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \mu} = - \left(\sum_{j=1}^n p_j k_j + \sum_{j=n+1}^m p_j E_j - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{k_k} \theta_{kl} w_{kl} \right) = 0$$

حيث أن $U_j = \partial U / \partial E_j$ وأن صفرية جاكوب لهذا النظام هى كالتالى :

$$J = \begin{vmatrix} U_{n+1,n+1} & \dots & U_{n+1,m} & -p_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{m,n+1} & \dots & U_{m,m} & -p_m \\ -p_{n+1} & \dots & -p_m & 0 \end{vmatrix}$$

حيث أن $U_{jj} = \partial^2 U / \partial E_j^2$ ويكون $p_j > 0$ ($j = n+1, \dots, m$) فإن شرط شبه-الضمرب المنضب لدالة المنفعة سوف يضمن أن القيم الصفري الرئيسية للصفرية J وهم يمثلون مجموعة جزئية من n وسوف يتبادلوا فى الاشارات وهذا فان دوال فائض الطلب المحددة

موجوده على افتراض ان n لفائض الطلبات تصاوي حدودهم العليا . وهذه السدوال المحددة هي دوال فائض الطلب الزائفة لجميع نقاط السعر والتي من اجلها لا تكون القيم التي تولدها لـ $(m - n)$ فائض طلبات غير محظورة اكبر من حدودهم العليا .

ان دوال فائض الطلب التقليديـه (١-١٠) تغطي الحالة $n = 0$ وهذا المؤشر n قد يفترض قيم من صفر الى $(m - 1)$ فالافتراضات التي تغطي دالة التغطية وتكون جميع n لا تظم الحالة التي تكون فيها الحدود العليا ذات فعالية ، بمعنى ان $n = m$ فيوجد $n!/(m - n)!$ من المصاحب (١) المحتطه للحدود العليا m والتي تكون فيها الحدود العليا n ذات فعالية . فيكون اجمالي عدد المجموعات دوال فائض الطلب المحددة (L) لجميع المصاحب المحتطه هي :

$$L = \sum_{n=1}^m \frac{m!}{(m-n)!n!} = 2^m - 1$$

فالرقم L قد يكون كبير جدا ولكن له نهاية ومحدد . ويمثل دوال فائض الطلب المحددة الزائفة للمستهلك i كالآتي :

$$E_i = E_i(p_1, \dots, p_m) \quad i = 1, \dots, m \quad (2-10)$$

وتتكون من المجموعات L لدوال فائض الطلب المحددة . اما الدوال الزائفة فانها لا تعطى من مجموعة منفردة من المعادلات المنفردة m كما كان متبعاً في معظم الحالات حتى الان . فهم يأتين من المجموعات L لكل واحد من المعادلات المنفردة m وكذلك من القواعد التي تحدد اي من المجموعات يكون مناسباً لكل نقطة سعر . ويمكن الاشارة بالطرق المقترحة ان دوال فائض الطلب الزائفة :

(١) لها مجموعة اسعار مطلية (٢-١٠) تكون هي مجالها .

(٢) انها ذات قيمة منفردة بمعنى انه اذا كان هناك اكثر من مجموعة محققة من دوال فائض الطلب لنقطة سعر ، فان كل واحد من هذه المجموعات المحققة سوف يعطى قيم متطابقة لـ E_i عند تلك النقطة .

(٣) وانها متصلة ولكن ليس لها اشتقاقات جزئية من الدرجة الاولى والثانية وذلك على وجه العموم . وما ان المجموعات L لدوال فائض الطلب المحددة تحقق شرط ميزانية المستهلك فان الدوال الزائفة سوف تحققها هي ايضاً .

ولكن هنا هذه الدوال المزيفة يمثل طلباً صعباً حتى ولو لاداء صغيرة نسبياً من السلع

(١) ان الرقم $n!$ يقرأ على n يتكون من ناتج ضرب الاعداد الصحيحة واحد الى n .
 وبالتعريف فان $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.
 ٠! = ١

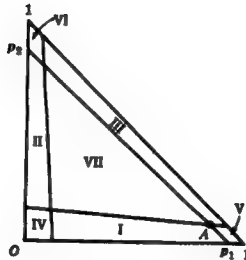
ولحسن الحظ • فإن بناء هذه الدوال الزائفة ليس بالضروري فيمكن ان نعرف انها عوحد وان نعرف خواصها ومميزاتها »

ان تجزئة السعر البسيط price simplex لدوال فائض الطلب الزائفة تكون موضحة على الشكل (١٠ - ٢) فالسعر البسيط يكون ممثلا بالمثث في الفضاء $p_1 p_2$ وتكون قيمة p_3 معطاه نمطا بالمطابقة identity $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ اما نقطة الاصل فهي $(0, 0, 1)$ ويكون الوتر هو المحل الهندسي للنقاط التي يكون عندها $p_3 = 0$ وتكون الثلاثة اسعار موجهة للنقاط في داخل المثلث •

فاذا كان هناك ثلاثة سلع فانه يوجد سبعة $(2^3 - 1)$ مجموعات من دوال فائض الطلب المحددة • وتسم الخطوط قرب المحاور axes والوتر البسيط الى سبعة مساحات مطابقة للسبعة مجموعات وتكون الحدود الفعالة لهذه المساحات السبعة هي كالتالي :

الحدود الفعالة المساحات

I	k_2
II	k_1
III	k_3
IV	k_1, k_2
V	k_2, k_3
VI	k_1, k_3
VII	لا شيء *



شكل (١٠ - ٢)

ويمكن اتصال الدوال الزائفة بالحدود التي تغطي أي مجموعة منها أو أكثر فائض طلبات معادل فنقطة A عثل حاله شاذه extreme case ونادرة حيث ان المجموعات المطابقة VII, V, III, I. تغطي نفس مستويات فائض الطلب • ولكن الحدود لا اعتناج لان ، تكون خطيه كما هو موضعا على الشكل (٢-١٠) (راجع تعرين ١٠-٦) •

اما طريقة بناء دوال فائض الطلب للوحده الانتاجيه فان يشبه للطريقة التي استخدمت في حالة المستهلك ، فصاحب المال في الوحده A في الصناعة i يستخدم السلع n كد داخل لانتاج السلعة i فهو يبيع منتجاته ويشترى دواخله في اسواق متنافسه وباسعار غير سالبه وتعرف دالة انتاجه للدواخل الغير سالبه ولستويات الانتاج ، ونفترض انها معدة بالانضباط •

وان انتاجها الحدي يكون موجبا • ونمثل لمستوى انتاج الوحده A في الصناعة i بالرمز q_i كما هو في السابق ، ونمثل لكمية السلعة k التي تستخدم كداخل بالرمز q_k •

ونطبق الافتراض الداخلي التالي : $q_k = 0$ اذا كانت $q_i = 0$ لبعض k ويكون $q_k > 0$ اذا كانت $q_i > 0$ لجميع k باضافة $\lim q_k/q_i = +\infty$ وذلك كلما اقتربت q_i من الصفر (بمعنى ان $q_i \rightarrow 0$) وان $\lim q_k/q_i = 0$ كلما اقتربت q_i من الانهاية الموجبه $q_i \rightarrow +\infty$ وتضمن المحظورات الستى وضعت على دالة الانتاج تحقيق شروط الدرجة الاولى والثانية لجميع النقاط داخل البسيط simplex بمعنى انه لجميع الاسعار الموجبه ، وكذلك تضمن وجود دوال فائض الطلب التقليديه لهذا المجال على القطر :

$$E_k = E_k(p_1, \dots, p_m) \quad k = 1, \dots, m \quad (2-10)$$

$$\bar{E}_i = \bar{E}_i(p_1, \dots, p_m)$$

وتتطلب هذه المحظورات ايضا مدى لـ $E_k > 0$ ($k = 1, \dots, m$) وكذلك لـ $\bar{E}_i < 0$

ان الدوال التقليديه (٢-١٠) لا تضمن بطريق مباشر الاسعار صفر • فالدوال الزائفة لفائض الطلب قد مرتت للمحتجين على افتراض انهم سوف يحصلون على الحد الاطى من الربح تحت المحظورات الاضافيه التاليه :

$$E_k = q_k \leq k, \quad (n = 1, \dots, m)$$

ولم يوضع أي حد مباشر على مستوى انتاجه • وافترض ان مستويات الدواخل والانتاج تكون مساويه لصفر اذا كان سعر الناتج يساوي صفر :

$$p_i = 0 \text{ هـ اذا كان } q_i = q_1 = \dots = q_m = 0$$

يمكن تعريف دوال فائض الطلب المحدده لكل مجموعه محتطه للحدود العليا القمالة وذلك بتعويض $q_k = k$ المناسب في معادلة ربح الوحده المختطه وتعديده القيم

المطلبي بدلالة اسعار مستحقات الداخل المتبقية وبدلالة مستوى الانتاج ونرمز لدوال فائض الطلب الممنه للوحده f ، الصناعة k كالآتي :

$$(٥-١٠) \quad E_{fk} = E_{fk}(p_1, \dots, p_m) \quad k = 1, \dots, m$$

$$E_k = E_k(p_1, \dots, p_m)$$

وتتكون هذه الدوال المحددة وطى نسط حالة المستهلك ، فانه يمكن اثبات ان :

(١) مجموعة الاسعار المطبقة تمثل مجال الدوال الزائفة .

(٢) وانها ذات قيمة منفردة .

(٣) وانها متصله .

ويمكن باستخدام الطرق المتقدمة اثبات ان الربح الاقصى للوحدة الانتاجية يكون موجبا اذا كان سعر الناتج موجبا ويكون ربحه صفرا اذا كان سعر الناتج صفرا وتظهر اهمية هذه من شقين . اولاً ، معنى انه ليس هناك من وحده تنتج بربح سالب . ثانياً ، معنى ان كل مستهلك سوف يكون لديه دخلا موجبا ان كان اى من الاسعار موجبا فكل مستهلك يكون لديه كمية موجبه من كل سلعة اوليه وسوف يكون لديه دخل موجب اذا كان سعر اى سلعة اوليه موجبا . فلوان جميع اسعار السلع الاوليه صفرا ، فسان المستهلك سوف يكون لديه دخلا من الازواح اذا كان اى واحد من اسعار الناتج موجبا . وهذا ناتجا من الافتراض الذى ينص على انه لكل مستهلك نصيب من الربح من طى الاقل واحدة من الوحدات الانتاجيه فى كل صناعه .

ويمكن الحصول على دوال فائض الطلب الاجمالى التقليدي للمجال

$$p_k > 0 (k = 1, \dots, m), \quad \text{وهى :}$$

$$(٦-١٠) \quad E_j = E_j(p_1, \dots, p_m) \quad j = 1, \dots, m$$

وذلك بتجميع الدوال التقليديه لكل مستهلك ومنتج والمطاه بالمعادلة (١-١٠) و

(١-١٠) طى التوالى . ويمكن ايضا الحصول على دوال فائض الطلب الاجماليه الزائفة

والتي تكون مجموعة الاسعار المطبقة مجالها وهى :

$$(٧-١٠) \quad E_j = E_j(p_1, \dots, p_m) \quad j = 1, \dots, m$$

وذلك من الدوال الزائفة للمستهلكين والمنتجين المعطاه بالمعادلات فى (٢-١٠) و

(٥-١٠) طى التوالى .

فلكل ثقله سعر تعطى الدوال الزائفة الاجماليه مجموع فائض الطلبات الطى من الدوال المحددة المناسبه لكل مستهلك ومنتج ويصح اتصال كلا المجموعتين من الدوال من اتصال الدوال المنفردة المطابقة لها . وتحقق كل مجموعة من مجموعات الدوال الاجماليه قانون فالراس ومن الخواص المبته للدوال الاجماليه الزائفة من وجهة نظر وجودها هو ان E

يكون موجبا ومحدد اذا كانت $p_j = 0$.

وجود اسعار توازن ^(١): Existence of Equilibrium Prices

يوجد عمدا توازن للاسواق المتعددة اذا كان هناك مجموعة واحدة على الاقل من

نقاط الاسعار المطلوبة بحيث ان :

نقاط الاسعار المطلوبة بحيث ان $E_j = 0$ اذا كان $p_j > 0$ $E_j \leq 0$ اذا كان $p_j = 0$ ولتسهيل عملية الرموز ، نستخدم الرمز التالي ليدل على نقطة ما في مجموعة الاسعار المطلوبة $P = (p_1, \dots, p_m)$ مجموعة الاسعار المطلوبة تكون مغلقة ومحددة ومحدبة . فاذا كانت $m = 2$ فانه يكون خطا مستقيما من $(0,1)$ الى $(1,0)$ اذا كانت $m = 3$ فانه يكون سطحاً .

ونواصل اثبات الوجود بافتكار عطايق ذاتي mapping into itself مناسب لمجموعة الاسعار المطلوبة ، مظهرين انها تحتوي على نقطة ثابتة ، ثم موضحين ان هذه النقطة الثابتة تعرف توازن للاسواق المتعددة .

نعرف الدوال m بالتالي :

$$(1-10) \quad g_j(p) = \max \{p_j + E_j(p), 0.5p_j\} > 0 \quad j = 1, \dots, m$$

وبما انه من $(1-10)$ الاسعار لا يمكن ان تكون سالبة ، وبما ان الاسعار المعكوسة تتطلب فائض طلب موجب ، فانه يتبع من هذا ان جميع دوال $(1-10)$ يكون لها قيم موجبة . ضع :

$$(2-10) \quad h(p) = \sum_{j=1}^m g_j(p) > 0$$

بما ان $h(p)$ تكون دائما موجبة ، فان القسم بها يكون مسموحا به تعرف الان دوال جديدة عددها m كالآتي :

$$(3-10) \quad f_j(p) = \frac{g_j(p)}{h(p)} > 0 \quad j = 1, \dots, m$$

فهذه الدوال تعرف عطايق اسعار متصل . واتصال هذا العطايق يتبع من اتصال $(1-10)$ و $(2-10)$ وبما ان :

$$\sum_{j=1}^m f_j(p) = \frac{\sum_{j=1}^m g_j(p)}{h(p)} = 1$$

باستخدام $(1-10)$ فان صور النقاط تحقق تعاريف مجموعة الاسعار المطلوبة ، وان $(1-10)$ عطايق هذه المجموعة على نفسها (عطايقا ذاتيا) ويضع من نظرية النقطة الثابتة لبرويران مجموعة الاسعار المطلوبة تحتوي على نقطة واحدة على الاقل وهي p^* بحيث ان :

$$(11-10) \quad p_j^* = f_j(p^*) = \frac{g_j(p^*)}{h(p^*)} > 0 \quad j = 1, \dots, m$$

ان جميع عناصر p^* تكون موجبه لان (11-10) صارة من حالة خاصة من (10-10) ويتبقى ان نشهد ان جميع فائض الطلبات تساوى صفر عند النقطة المعروفة بالمعادله (10-10) قبل ان نستنتج ان مثل هذه النقطة يمثل توازن اسواق متعددة .

ان كل $g_j(p^*)$ يكون على الاقل بكم $0.5p_j^*$ فلوان كل واحدة من $g_j(p^*)$ تساوى $0.5p_j^*$ فان مجموع $h(p^*)$ سوف يساوى 0.5 كما اعتناه من طريق (10-10) و (10-10) فلوان اى من $g_j(p^*)$ غشوق $0.5p_j^*$ فان $h(p^*)$ سوف غشوق 0.5 فاذا كانت جميع $g_j(p^*) = 0.5p_j^*$ فانه يتبع من (10-10) ان جميع $E_j(p^*) < 0$ وهذا يتطلب ان $\sum_{j=1}^m p_j^* E_j(p^*) < 0$

والذى يتعارض مع قانون فالراس . وهذا افانسه ليس من الحقيقه بكان ان : $g_j(p^*) = 0.5p_j^*$ لجميع j افترض انه صحيح لبعض j فانه اذا مــــن

$$(11-10) \quad p_j^* = \frac{g_j(p^*)}{h(p^*)} = \frac{0.5p_j^*}{h(p^*)} < p_j^*$$

بما ان $h(p^*) > 0.5$ ولكن هذا ايضا يمثل تعارضا . فاذا يتبع من (10-10) ومن (11-10) ان :

$$(12-10) \quad p_j^* = \frac{p_j^* + E_j(p^*)}{h(p^*)} \quad j = 1, \dots, m.$$

فهضرب طرفى المعادله j فى (12-10) بالمقدار $E_j(p^*)$ ثم اضافة المعادله m الناتجه :

$$\sum_{j=1}^m p_j^* E_j(p^*) = \frac{\sum_{j=1}^m p_j^* E_j(p^*) + \sum_{j=1}^m [E_j(p^*)]^2}{h(p^*)}.$$

ويتبع من قانون فالراس ان الجانب الايسر والحد الاول فى المقام على الجانب الايمن يكون مساويا لصفر . ولهذا فان : $\sum_{j=1}^m [E_j(p^*)]^2 = 0$

وبما ان حاصل جمع مربعين يساوى صفرا فقط اذا كان كل حد يساوى صفرا . فلان $E_j(p^*) = 0$ لجميع j وان النقطة الثابته p^* تكون مجموعة اسعار توازن لاسواق متعددة . وبما ان جميع اسعار التوازن تكون موجبه فان (10-10) تعطى اجمالى فائض الطلبات ، وان (10-10) و (11-10) تعطى فائض الطلبات المنفرد (1) . ويكون

(1) لقد مرنا k بان تكون بدرجة كبيرة جدا لتكون متوافقة مع ما يملكه الاقتصاد والنتجه هى ان ليس هناك ولا واحد من فائض الطلب المحدد فعال فى التوازن . فاسعار التوازن تقع فى مساحات مثل المساحة VII على الشكل (10-2) .

مستوى الاستهلاك لكل سلعة من قبل كل مستهلك موجبا ومحدد • وتكون كذلك مستويات الدواخل والمنتجات لكل منتج موجبه ومحدده •

ولقد بذل مجهود جبار في تصريف فائض الطلبات الزائفة للأسعار الصغرى ليكشف فقط ان المحظورات التي وضعت على دوال الانتاج والمنفعة الفردية تولد دائما اسعار توازن موجبه • ولكن لولا اننا لم نضيف حالة الاسعار الصغرى فانه لم يكن من الممكن تعريف تطابق لمجموعة الاسعار الطبيعية المغلقة (١-٢) ، وان نظرية النقطة الثابتة لبرور لا يمكن تطبيقها •

Advanced Existence Proofs

إثباتات متقدمة للوجود :

لقد اثبتنا الوجود لاقتصاد تنافس تكون فيه دوال الانتاج ودوال المنفعة المنفردة متصلة ويكون لها اشتقاقات جزئية متواصلة من الدرجة الاولى والثانية وانها تخضع لمحظورات منصوص عليها • وهذا الاثبات مثل غيره من اثباتات الوجود اعتمد على اساسه على شروط الكفاية sufficiency وليس على شروط الضرورة necessity فكل الانظمة التي تحقق المحظورات يحون لها نقاط توازن ولكن يوجد هناك بعض الانظمة التي لها نقاط توازن لا تحقق هذه المحظورات بعدد كبير من المؤلفين وظف الرياضيات المتقدمة لصياغة اثباتات الوجود والمنية على محظورات مائة ضعيفة (١) •

ان من احد اثباتات الاكثر كمالا والاقل خطرا تلك التي اسسها المؤلف Gerard Debreu وسوف نلخصها هنا بطريقة تقريبية والتحاليل تكون بدلالة مجموعات النقاط بدلا من الدوال • ولاشبات الوجود استفاد دوبرو من نظرية النقطة الثابتة لكاكوتاني Kakutani والتي تعمم نظرية برور من تطابق نقطة على نقطة الى تطابق نقطة على مجموعة • ولقد عرف مجموعة الاستهلاك للمستهلك بانها حيلة جميع النقاط الممكنة لمستهويات استهلاك السلعة (ارقام غير سالبة) وكذلك للسلطات المبدئية (ارقام غير موجبه) ولقد افترض ان كل مجموعة استهلاك للمستهلك تكون :

- (١) مغلقة ومحدده ، ومحددة من اسفل •
- (٢) ان لا تحتوي على نقطة تشعب •
- (٣) وانها تحتوي على مجموعة اقل من (بدون المساواة) ما يمتلكه المستهلك مبدئيا •

(٢) راجع كتاب Rubin Saposnik, James Quirk

Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare
Economics (New York: McGraw-Hill, 1968), chap. 3.
Theory of Value (New York: Wiley, 1959).

بهنوان :

وتعتمد الافتراضات من ما يفضل المستهلك على الرتب $rank$ ولا تحتاج مجموعة الاستهلاك العظمى للمستهلك من ان تكون فردية .

يسمح للوحدة الانتاجية من انتاج اكثر من سلعة واحدة ، ونصف الناتج بارقام موجبه والد داخل بارقام سالبه . وتفترض ان كل وحدة قد تظل عاطلة (بدون عمل) فيستخدمه اى داخل اما افتراضات دييرو المتبقية من الانتاج فانها تغطي الاقتصاد وككل بدلا من الوحدات الفردية . ونعرف مجموعة الانتاج الاجاليه على انها جميع الخليط المحتمل للد داخل والنواتج للاقتصاد ككل وتفترض ان مجموعة الانتاج الاجاليه تكون مغلقه ومحدبه ولهذا فان زيادة الغله (او زيادة العائدات $increasing$ returns غير ممكنه للاقتصاد ، ولكنها تكون ممكنه للوحدات المنفردة . وتسمح بالتصرف الحر لد داخل $Free disposal$ وتفترض ان الانتاج غير قابل للعملية العكسيه اى ان الد داخل لا يمكن انتاجها باستخدام النواتج فجميع الاقتصاديات التافسيه والتي تحقق افتراضات دييرو يكون لها واحد واكثر من نقاط التوازن .

STABILITY OF EQUILIBRIUM

١٠ - ثبات (استقرار) التوازن

فحالما ثبت وجود التوازن ، قد يسأل البعض تحت اى شروط سوف يعود النظام لنقطة التوازن بعد حدوث اضطرابات وكذلك تحت اى شروط سوف يكون للنظام نقطه توازن واحده فقط . ويمكن التصريح باقوال معقوله عن استقرار ووحده النظام وذلك للنظمه التي تمثل للافتراضات العامه والمعصره فى الفصل السابق . مع انه يمكن القول قليلا عن الانظمه التي تمثل للافتراضات الضعيفه نسبيا باثبات الوجود لدييرو . وحيث ان تحاليل الاستقرار تعدنا بالخطوط العرضية لتحاليل الوحده $uniqueness$ فاننا نبدء اولا بالاستقرار .

لقد اهتمنا فى الفصل (١٦) تاثيرات الاضطرابات فى احد الاسواق الاخرى وذلك تشبها مع افتراضات تحاليل التوازن الجزئيه اما تحاليل التوازن العامة فانها تاخذ نفس الاعتبار طبيعيه تداخل جميع الاسواق . ففائض الطلب لاى سلعة يكون بدلالة اسعار جميع السلع ، وكذلك اى اضطراب فى احد الاسواق سوف يحل بالتوازن فى اسواق اخرى . فاستقرار احد الاسواق سوف يعتمد على التمددلات التي تحدث بعد حصول الاضطرابات فى الاسواق الاخرى فالشروط الحركيه والغير حركيه $static$ and $dynamic$ للاستقرار فى احد الاسواق سوف يوسع ليشمل نظام الاسواق المتعدد فى الفصل الحالى . وتسمى الشروط الغير حركيه عادة بشروط هكس $Hicksian$ تشريفا للرجل الذى اسمها . ونستخدم نفس هذا الفصل ايضا للافتراضات السلوكيه لغالراز (راجع الفصل ١٦) .

الاستقرار الغير حركي :

Static Stability

دع Q_1 تستخدم كوحدة المقايضة ثم نضع سعرها مطابقا تماما للوحدة نفسها شرط الاستقرار لنظام السوق الثنائي يكون هو نفس الشرط لنظام السوق المفرد . فيوجد معادلة واحدة فقط مستقلة ويوجد ايضا سعرا متغيرا واحدا فقط $E_1 = E_1(p_2)$ وكذلك $E_2 = E_2(p_2)$ وسوف يتحقق شرط الميزانية الاجمالي دائما قانون فالراس $E_1 + p_2 E_2 = 0$ فارخا شرط توازن Q_2 بحيث ان $E_2 \neq 0$ يتطلب بالضرورة ارضا شرط التوازن للسلمة Q_1 بحيث ان :

$$dE_1/dp_2 + p_2 dE_2/dp_2 = 0 \text{ وعلى هذا فالاشتقاقين } dE_1/dp_2 \text{ و } dE_2/dp_2$$

و dE_2/dp_2 يجب ان يكونا بإشارتين مختلفتين ماعدا في الحالة البديهية والتي تكون فيها كلا الاشتقاقين صفرا ويكون التوازن مستقرا حسب افتراض فالراس الغير حركي اذا كانت $(dE_1/dp_2 > 0)$ (او ما يكافؤه) اذا كانت $dE_2/dp_2 < 0$ فاذا اعيد التوازن في سوق Q_2 فان التوازن سوف يعود اليها في سوق وحدة المقايضة Q_1 اي انه اذا كانت $E_2 = 0$ فان E_1 يجب ان تساوي صفرا ايضا وتظهر المشاكل الخاصة باستقرار الاسواق المتعددة فقط للأنظمة التي تحتوي على سوقين . واكثر من الاسواق المتداخلة. فلوان $dE_2/dp_1 \neq 0$ فان اي ازاحة للتوازن سوق Q_1 سوف يتسبب في ازاحة التوازن في سوق Q_2 ويطلب استقرار فالراس للسوق المنعزل بان يكون $dE_1/dp_1 < 0$ حيث ان dE_2/dp_1 تكون اشتقاق جزئي وان جميع الاسعار الاخرى يفترض فيها ان تظل بدون تغيير . ويجب الاستغناء من الاشتقاق الكامل dE/dp_1 وذلك فممن تحاليل الاسواق المتعددة وقد تمسب قيمتها تحت عدد من الافتراضات البديلة الخاصة بالتعديلات في الاسواق الاخرى فاحد الاحتمالات هو ان نفترض ان التوازن قد يعود في جميع الاسواق ماعدا في سوق Q_1 وسوق وحدة المقايضة .^(١) فقد توجد تشكيلات مختلفة لمعطيات التعديلات في الاسعار ماعدا في حالة عدم العرونة الكاملة حيث ان ليس سوقا من الاسواق الاخرى $(m-2)$ قابلا للتعديل وكذلك حالة العرونة الكاملة حيث ان جميع الاسواق تكون قابلة للتعديل . فقد نتخيل مائة وجود نظام يحتوي على اسعار جامدة "rigid prices" M لا تتغير عن قيم التوازن المبدئية خلال الفترة المعتبرة حيث ان M قد تكون اي عدد من واحد الى $(m-1)$ وسوف يكون سعر وحدة المقايضة جامدا دائما نتيجة لهذا التصريف .

ان من اشد الشروط التوازن صرامة ودقة لسوق Q_j ($j \neq 1$) يتطلب بان يكون

(١) وبما ان اجمالي شرط الميزانية يتحقق دائما ، فان $p_2 E_1 + E_2 = 0$ اذا كانت Q_1 هي وحدة المقايضة . وتعطى انتهاك حرية شرط التوازن لوحدة المقايضة . والركود الضروري للسماح لثلاث الطلب على Q_1 من ان يكون بقيم غير صفريه .

وبالقسمه على dp_i نحصل على الشرط الاول للاستقرار التام لسوق Q_i :

$$\frac{dE_i}{dp_i} = b_{ij} < 0 \quad (10-15)$$

ان شرط (10-15) يكون مطابقا لطلب الاستقرار للسوق المنعزله . اما الاستقرار التام فانه يتطلب ان تتحقق (10-15) لجميع $j = 2, \dots, m$ وعلى هذا فان الشرط الاول للاستقرار التام يتطلب الاستقرار المنعزل لكل سوق في النظام .

والان اعتبر الحالة التي تزحزحت فيها التوازن في سوق Q_i وان p_h قد تعدلت وان جميع الاسعار الاخرى تكون جادة ويتميز $dE_h = 0$ و $dp_h = 0$ $k \neq j, h$ في (10-14) نصبح المعادلتان لـ Q_i و Q_h كالآتي :

$$dE_j = b_{ji} dp_i + b_{jh} dp_h$$

$$0 = b_{hi} dp_i + b_{hh} dp_h$$

وباستخدام قاعدة كرامر Cramer's rule لايجاد قيمة dp_i :

$$dp_i = \frac{\begin{vmatrix} dE_j & b_{jh} \\ 0 & b_{hh} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{ji} & b_{jh} \\ b_{hi} & b_{hh} \end{vmatrix}} = dE_j \frac{b_{hh}}{\begin{vmatrix} b_{ji} & b_{jh} \\ b_{hi} & b_{hh} \end{vmatrix}}$$

وبالقسمه بالحد الثابت على اليمين وبالقسمه ايضا بـ dp_i فيصبح الشرط الثاني للاستقرار التام لسوق Q_i كالآتي :

$$\frac{dE_i}{dp_i} = \frac{\begin{vmatrix} b_{ji} & b_{jh} \\ b_{hi} & b_{hh} \end{vmatrix}}{b_{hh}} < 0 \quad (10-16)$$

ويطلب الاستقرار التام لسوق Q_h امام مقام (10-16) يكون سالبا ولذا فان الاستقرار التام للنظام ككل يتطلب بان يكون مقام (10-16) موجبا .

واخيرا اعتبر الحالة التي يكون التوازن فيها قد زحزح في سوق Q_i وان p_i و p_h قد تعدلا وان الاسعار (4-m) جادة ويتميز $dE_h = dE_i = 0$ وكذلك $dp_h = 0$ للاستقرار الاخرى (4-m) في (10-8) نصبح المعادلات المناسبة كالآتي :

$$dE_i = b_{ji} dp_i + b_{jh} dp_h + b_{ii} dp_i$$

$$0 = b_{hi} dp_i + b_{hh} dp_h + b_{hi} dp_i$$

$$0 = b_{ji} dp_i + b_{jh} dp_h + b_{ii} dp_i$$

وباستخدام قاعدة كرامر للحل لقيم dp_i :

$$dp_i = \frac{\begin{vmatrix} dE_i & b_{jh} & b_{ii} \\ 0 & b_{hi} & b_{hi} \\ 0 & b_{ji} & b_{ii} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{ji} & b_{jh} & b_{ii} \\ b_{hi} & b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ji} & b_{jh} & b_{ii} \end{vmatrix}}$$

وبذلك منوط النظام بالمعومد الاول ثم الحل لقيم dE/dp_i فيصبح الشرط الثالث للاستقرار التام في سوق Q_1 :

$$(17-10) \quad \frac{dE_1}{dp_1} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} < 0$$

وبوضع $k = i, j = k$ في المطلب (16-10) فان الاستقرار الكامل لسوق Q_1 سوف يتطلب بان يكون (نظام) (17-10) موجبا ولذا فان الاستقرار التام للنظام ككل يتطلب بان يكون بسيط (17-10) سالبا .

اما النظام ككل فان الاستقرار التام يتطلب بان تكون مرتبه order متعددة جاكوب المصفوفة Jacobian determinants هي $[1,2,3,...,(m-1)]$

$$b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \dots$$

بحيث انما تكون عادليه اشاراتيا؛ ساهم موجب لجمع قيم $b_{11}, b_{12}, b_{13}, \dots$ وتعتبر شروط الاستقرار التام اشد من انما ضروريه لامتيازات اعطيه انظمة الاسواق المتعددة . فلوان النظام لم يحتوى على اسعار جادة ، فان القيمة النسبية الوحيد لـ dE/dp_i يتم حسابها على افتراض ان الاسواق الاخرى $(m-2)$ سوف تتعدل . وباعا عن نظام الحساب المشار اليه سابقا فان سوق Q_1 سوف يكون مستقرا اذا كان :

$$(18-10) \quad \frac{dE_1}{dp_1} = \frac{\partial}{\partial p_1} < 0$$

حيث ان ∂ تمثل متعددة جاكوب للنظام المتكامل المعنى بالمعادلة (19-10) وان ∂_{22} تمثل عامل cofactor b_{22} اما مفهوم هيكز فان النظام ككل يكون في حالة استقرار غير تام *imperfectly stable* (اذا تحقق شرط في (18-10) لجميع السلع ماددا وحيدة الحافظه) . وانه لمن العشوق ان فلاحذا ان الاستقرار الغير تام لا يتطلب بالضرورة الاستقرار المنزول لكل سوق .

مثال : اظهر دوال فاندر الطلب التاليه للأنظمة المكونه من ثلاث سلع :

$$\begin{array}{ll} (1) E_1 = -2p_1 + 3p_2 - 5 & E_1 = 4p_2 - 8p_3 + 16 \\ (2) E_2 = 2p_1 - 3p_2 + 5 & E_2 = -4p_2 + 4p_3 - 4 \\ (3) E_3 = 2p_1 + 3p_2 - 13 & E_3 = 4p_2 - 8p_3 + 16 \end{array}$$

بحيث ان سعري التوازن لكل الأنظمة الثلاث هما $p_1 = 3, p_2 = 2$ فنظام (1) يحقق جميع شروط الاستقرار الكامل :

$$\frac{dE_2}{dp_2} = \frac{\partial E_2}{\partial p_2} = -2 < 0 \quad \frac{dE_2}{dp_2} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}}{-8} = -0.5 < 0$$

$$\frac{dE_1}{dp_3} = \frac{\partial E_1}{\partial p_3} = -8 < 0 \quad \frac{dE_1}{dp_3} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}}{-2} = -2 < 0$$

أما نظام (٢) فقد فشل في تحقيق شروط الاستقرار الكامل ، ولكنه يحقق شروط الاستقرار الضيق كامل :

$$\frac{dE_2}{dp_2} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}}{4} = -1 < 0 \quad \frac{dE_2}{dp_3} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}}{2} = -2 < 0$$

وهو يكون سوى Q_2 و Q_3 غير مستقرين عندما نعتبرهما في حالة انحراف ، ولكن النظام ككل يعتبر مستقرًا إذا تعدل كلا السعرين . ونظام (٣) فشل في تحقيق الشروط سواء كان للاستقرار الكامل أو الضيق كامل .

Dynamic Stability

الاستقرار الحركي

أن شروط الاستقرار الحركي لنظام الأسواق المتعددة التي تكون فيها عملية التعديل مستمرة تمثل تعميما لشروط الاستقرار الحركي لسوق فردي بحيث تكون فيه عملية التعديل متواصلة كما وضحنا في الفصل (١٦ - ١) فلقد استعرضنا مجموعات قوانين تغير الأسعار بكل وضوح ، ثم قمنا ببعض مرات (مسارات paths) الزمن للأسعار وذلك بعد حدوث الاضطرابات مباشرة . وقد نقدم هنا أنواع منطقة لمعاملات التعديل الحركية وذلك لوصف سلوك المشاركين في الأنظمة تحت الاعتبار وهو ما فان توازن الأسواق المتعددة سيكون مستقرًا حركيًا إذا كان كل سعر يقترب من مستوى توازنه عبر الزمن وذلك بعد حدوث اضطرابات بسيطة مباشرة ، بمعنى أنه إذا كان :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_j = p_j \quad j = 2, \dots, m$$

حيث أن p_j تمثل سعر Q_j عند الزمن t وأن p_j تمثل السعر التوازني للسلعة Q_j .

لفترض الآن أن السلعة الأولى من الـ m سلعة تكون هي وحدة المقاييس فتكون معادلات التعديل الحركي كالآتي :

$$\frac{dp_j}{dt} = k_j E_j(p_2, \dots, p_m) \quad j = 2, \dots, m \quad (14-10)$$

حيث أن $k_j > 0$ تمثل سرعة تعديل المعامل لفترض أن الوحدات قد عرفت بحيث أن جميع k_j تكون متساوية للوحدة .

تفاضل التام لدالة فائز الطلب الـ j نحصل على :

$$dE_j = \sum_{i=2}^m \frac{\partial E_j}{\partial p_i} dp_i \quad j=2, \dots, m$$

ويمكن الحصول على ما يشابه تعريب (٢٢-٦) للسوق الفرد بإبدال التفاضلين dE_j بالانحرافات deviations من قيمى التوازن $E_j - E_j^0$ و $p_i - p_i^0$:

$$(٢٢-١٠) \quad E_j = \sum_{i=2}^m \frac{\partial E_j}{\partial p_i} (p_i - p_i^0) \quad j=2, \dots, m$$

لان $E_j^0 = 0$ وبالتصنيف من (٢٠-١٠) فى (١٩-١٠) ،

$$(٢١-١٠) \quad \frac{dE_j}{dt} = b_{j2}p_2 + \dots + b_{jm}p_m + c_j \quad j=2, \dots, m$$

حيث ان c_j يمثل القويات التى تعتمد على قيم التوازن للاسعار ولقد تأكدت خواص الاستقرار المعلى للمعادلة (١٩-١٠) من اختبار ونمى الحل لهذا النظام المكون المعادلات التفاضليه الخطيه الاعيه ويكون حل (٢١-١٠) على النمط التالى (١)
(راجع الفصل ٨-٦) .

$$(٢٢-١٠) \quad p_j = a_{j2}e^{\lambda_1 t} + \dots + a_{jm}e^{\lambda_m t} + p_j^0 \quad j=2, \dots, m$$

حيث ان a_j يمثل العوامل التى تعتمد على الشروط الاوليّه ، وان λ تمثل الجذور الـ $(m-1)$ لمتعددة الحدود polynomial المعطاه φ :

$$(٢٣-١٠) \quad \begin{vmatrix} b_{22} - \lambda & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m2} & \dots & b_{mm} - \lambda \end{vmatrix} = \beta_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0 = 0$$

وسوف تقرب مرات الوقت من قيمم التوازنيه p_2 اذا كان كل واحد من $(m-1)$ جزر roots للمعادلة (٢٣-١٠) سالبا او ان له جزئا حقيقيا سالبا . وعلى العموم فان استقرار هيكر ليس بضروريا ولا كافيا للاستقرار الحركى فى حالة التعديل المستمر المتواصل ولقد استخدمت رياضيات متقدمه لاشيات النظريات من الشروط التى يجب ان تتوفر فى (١٩-١٠) لتكون مستقره وكذلك الشروط التى يكون تحتها استقرار هيكر مطابقا للاستقرار الحركى (١) ونص واحد النظريات الهامه على ان يكون النظام مستقرا معليا .
ويكون ايضا مستقرا حسب هيكر اذا كانت جميع السلع بدائل اجااليه منضبته
منضبته strict gross substitutes أى ان $b_{ij} < 0$ لجميع i وان $b_{ij} > 0$ لجميع $i \neq j$.

وسوف نثبت فيما يلى هذه النظرية فى حالة وجود ثلاث سلع . تتطلب استقرار هيكر بان :

$$(٢٤-١٠) \quad b_{22} < 0 \quad b_{33} < 0 \quad b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} > 0$$

(١) ان نمط (٢٢-١٠) يتطلب تعدد بلا علقينا اذا عطاى اهان او أكثر من الجزر ولكن شرط الاستقرار المعلى يظل بدون تغيير .

وتتبع المتباينتين الأولين من (٢٤-١٠) من خاصية بدائل الجبلة
gross substitutability يتفاضل شرط الميزانية الاجمالي تفاضلا كاملا

$$dE_1 + p_1 dE_2 + E_2 dp_2 + p_1 dE_3 + E_3 dp_3 = 0$$

الآن ، د ع $dp_3 = 0$ ومن ثم د ع $dp_2 = 0$:

$$b_{11} + p_1 b_{21} + E_2 + p_1 b_{31} = 0$$

$$b_{13} + p_1 b_{23} + p_3 b_{33} + E_3 = 0$$

نعمد التوازن تكون $E_2 = E_3 = 0$:

$$p_1 b_{21} + p_1 b_{31} = -b_{11} < 0$$

$$p_1 b_{23} + p_1 b_{33} = -b_{13} < 0$$

$$-p_1 b_{21} > p_1 b_{31} \text{ و } -p_1 b_{23} > p_1 b_{33} \text{ وكذلك}$$

وبما ان طرفى هذه المتباينات الايمن موجب بالافتراض فان الحدود الاربعة جميعا تكون
موجبه وان حاصل ضربهم هو :

$$p_1 p_3 b_{22} b_{33} > p_1 p_2 b_{23} b_{32}$$

وهذا يكون المتباينه الثالثه من (٢٤-١٠) ولذا فان خاصية بدائل الجبلة تؤول السى
استقرار هيكر .

فى حالة وجود الثلاثه سلع تكون متعددة الحدود للمعادلة (٢٤-١٠) كالتالى :

$$\lambda^2 + \beta_1 \lambda + \beta_0 = \lambda^2 - (b_{21} + b_{31})\lambda + (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) = 0$$

وبما ان β_1 و β_0 موجبتان ، فان الجزيئين يكونا سالبين اذا كانا حقيقيين او ان
يكون لهما اجزا' حقيقيه سالبه اذا كانت من الاعداد المركبه complex ونعرف النظام
بانه مستقرا استقرارا شاملا *globally stable* اذا استطاع ان يعود لوضع التوازن بعد
حدوث اضطراب سوا كان بسيط ام لا . ومن الممكن توسيع تحليل الاستقرار الشامل
للتوازن الوحيد وذلك باستخدام دالة لياپونوف *Liapunov function* (راجع الفصل
٦-١) ليشمل انظمه الاسواق المتعدده ونعرف دالة لياپونوف $V(t)$ بانها مربع مسافه
الاسعار من قيمهم التوازنيه :

$$(٢٥-١٠) \quad V(t) = \sum_{i=1}^n (p_i - p_{i*})^2$$

وهذه الدالة تنطق الخواص التاليه لصفرا اذا كانت جميع الاسعار عند قيمهم التوازنيه
وتكون موجب اذا كانت احد الاسعار او اكثر غير موجبا فيكون النظام فى استقرار شامل
اذا كان : $dV(t)/dt < 0$ وذلك عندما تكون $p_1 \neq p_{i*}$ لبعض i .
ونوضح الصمائل باعجاب النظرية التاليه : اى انظمه يملك توازن وحيد ويحقق بديهية
الفضل الموضوح *revealed preference* فى الاجمالي فانه يكون مستقرا استقرارا شاملا

وبتفاضل (٢٥-١٠) وبتمويض $E_j = dp/dt$ من (١٩-١٠) تم تطبيق قانون فالراس

$$(٢٦-١٠) \quad \frac{dV(t)}{dt} = 2 \sum_{j=1}^n (p_j - p_k) \frac{dp_j}{dt} = 2 \sum_{j=1}^n (p_j - p_k) E_j = -2 \sum_{j=1}^n p_k E_j$$

وباستخدام فائز الطلبات نجد ان البديهيه الضعيفه Weak axiom تنص على:

$$(٢٧-١٠) \quad \sum_{j=1}^n p_k E_k < \sum_{j=1}^n p_k E_j$$

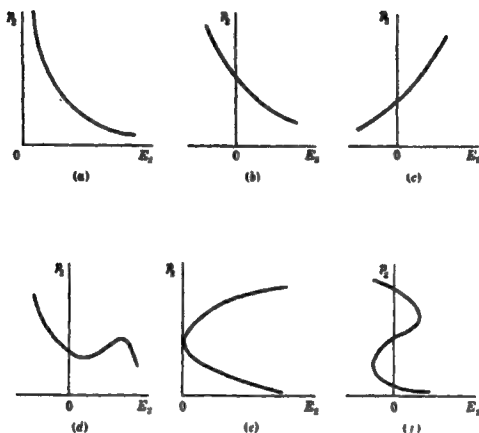
$$\sum_{j=1}^n p_j E_k \leq \sum_{j=1}^n p_j E_j$$

حيث ان p_i تمثل الاسعار بشرط ان $p_i \neq p_k$ لواحد او اكثر من j وان E_j تمثل فائز الطلبات المطابقة لهذه الاسعار . فاذا نظرنا الى الطرف الايسر من التعبير الاول في (٢٧-١٠) نجد انه يساوى صفر لان $E_k = 0$ لجميع j وان الطرف الايمن يساوى صفرًا بتطبيق فالراس ولهذا فان المساواة تتحقق للتعبير الاول ، ويكون التعبير الثاني صحيحًا فالجانب الايسر من التعبير الثاني في (٢٧-١٠) ايضا يساوى صفر وعلى هذا فان $\sum_{j=1}^n p_j E_j > 0$ وان مشتقه derivative (٢٦-١٠) تكون سالبه لذا فان النظام سوف يكون في استقرار شامل .

١٠ - ٣ وحدانية التوازن : UNIQUENESS OF EQUILIBRIUM

ان معظم اثباتات الوجود تنص على ان لانيطة الاسواق المتعددة نقطة واحدة او اكثر من نقط التوازن بينما تنص اثباتات الوحدييه على المجموعات الجزئية للانيطة التي تحقق اثباتات الوجود يكون لها نقاط توازن وحيدة . ومن الممكن توسيع اغلب هذه الملاحظات عن وحدانية السوق المفردة في الفصل (٦-١) لتشمل انظمة الاسواق المتعددة . وصحيا اذا كانت المشتقة الكامله dE/dp_j ($j = 2, \dots, m$) لاتغير اشارتها ولا تساوى صفرًا لى قيمة من قيم p_i فانه لا يمكن وجود اكثر من نقطه توازن واحيدة فقط . وهذا شرط كفايه وليس شرط يوضح الشكل (٣-١٠) حالات مختلفة ومنومعه لانيطه ذات السلعتين .

ففي الشكل (١٣-١٠) تكون $dE_j/dp_2 < 0$ في كل مكان ولكن لا يوجد نقطه توازن واعتبار الوحدييه هنا ليس له اى معنى . وهذه الحالة تركز الاهتمام على انسه يجب ان يكون هناك اثبات وجود قبل اثبات وحدانية ايا في الشكل (١٣-١٠) فان $dE_j/dp_2 < 0$ في كل مكان ، وتوجد نقطه توازن وحيدة وتكون مستقرة استقرارا شاملا وفي الشكل (١٣-١٠ج) نجد ان $dE_j/dp_2 > 0$ في كل مكان وتوجد نقطه توازن وحيدة ولكنها غير مستقرة وحالات مثل هذا تكون محدودة البحث فيها لانها غير مستقرة امسا



شكل (١٠-٣)

التي امان الموضحان في الشكلين (د) و(هـ) فان لهما نقطتي توازن وحيدة ، ولكنهما لا يحققان الشرط $dE/dp < 0$ اما في الشكل (١٠-٣ و) فان الشرط لا ينطبق وتوجد نقاط متعددة للتوازن .

ويتطلب استقرار هيكر (راجع المعادلات من (١٠-١٥) الى (١٠-١٨)) بان يكون $dE/dp_1 < 0$ لجميع i في جوار نقطة التوازن فالنظام الذي يحقق شروط هيكرز للاستقرار في كل مكان يكون له توازن وحيد . ولهذا وحيدا ولهذا فان اثبات الوحديته يجب ان يسبق اثبات استقرار هيكرز في كل مكان ولقد اثبتنا في جزء من الفصل السابق ان خاصية الهدائل الاجماليه لنظام ذو ثلاثة سلع يتطلب استقرار هيكرز في كل مكان، وطيه فان خاصية الهدائل الاجماليه لنظام الثلاثة سلع يتطلب وجود نقطة توازن وحيدة وهذه النظرية يمكن تعميمها لتشمل m من السلع .

فلو ان البدئية الخفيفة (١٠-٢٧) تحققت لفأثقت الطلبات الاجمالي فان الوحديته سوف تتبع بديهيا ويكون اثبات بطريقة المتناقضة contradiction افترض انه توجد نقطتي

توازن ثم قيم (٢٧-١٠) لهذه التقاطعين فالعلاقة الاولى من (٢٧-١٠) تتحقق لان $E_H = E_I = 0$ ولنفس السبب فان كلا الحدين في العلاقة الثانية من (٢٧-١٠) يكونا مساويين لصفر ثم تصبح $0 < 0$ وهذه هي المناقضة .

١٠ - ٤ نموذج المدخلات والمخرجات THE INPUT-OUTPUT MODEL

ان نموذج المدخلات والمخرجات ، ويسمى بعض الاحيان بنموذج ليونتيف-نيسميه ليهت W. W. Leontief يدنا بتحليل للاسواق المتعدده يتركز على الناحيه التجريبيه الاخباريه . وتختلف افتراضاته الاساسيه من الافتراضات حتى الان . فلقد حذف د وال الطبقة وعلقت طلبات المستهلك كمحاجه من الخارج بدون اعتبارا واضحا لتوازن المستهلكين على انفراد ^(١) وتكون هنا الصناعات بدلا من الوحدة الانتاجية هي وحدة الانتاج فكل صناعه تستعمل نشاطا انتاجيا خطيا فخر الانتاج output واحد فخر . فكل المخرجات المنتجه والعوامل الغير منتجه تخدم كد داخل inputs وهذه الافتراضات تسمح بتحديد نقاط التوازن من حلول المعادلات الخطيه الاتيه . وتتعدد المؤشرات لهذه المعادلات بالطريقه التجريبيه والاخباريه .

تحديد المخرجات : Output Determination

افترض قيام اقتصاد له عدد m من السلع المنتجه وعدد n من العوامل الغير منتجيه ويعطى نشاط الانتاج الخطى (راجع الفصل ٦-٥) للصناعة i ($i = 1, \dots, m$) كميات ادنى لقوى الداخلين الضروري لضمان وحدة واحدة من السلعة i ($i = 1, \dots, m$) $a_{ij} \geq 0$ وذلك للسد داخل المنتجه و $b_{ij} \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) للعوامل فيكون المخرج للصناعه i q_i قد امتص بالاستخدامات الصناعات المتداخله وباستخدامات الاستهلاك النهائيه y_i :

$$q_i = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \dots + a_{im}q_m + y_i \quad i = 1, \dots, m$$

وتحرك متغيرات الخواارج الى الجانب الايسر ، فان معادلات تناسب الدواخل والخواارج قد تكتب كالتالى :

(١) ان نظام الدواخل والخواارج المفتوح يحتوى على قطاع خارجى واحد او اكثر وهذه القطاعات تكون داخلية في النظام المغلق فمعظم التحاليل مركزة على الانظمة المفتوحة ، والوصف في هذا الكتاب يكون مركز طيبا ايضا فالتقارير المهمه بخصوص النظام المغلق طيه ان يراجع :

$$(٣١-١٠) \quad \gamma_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} \beta_{ij} = 0 \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix} \quad \text{حيث ان :}$$

وتتبع عدم سلبية γ_i من عدم سلبية b_{ij} و β_{ij} ويعطى المعامل γ_i كمية العامل i والضرورية لانتاج الكميات من السلع m التى تعد الوحدة النهائية للاستهلاك من السلمة i بطريقة مباشرة وغير مباشرة .

Decomposability

قابلية التحلل أو التقسيم :

يكون نظام الداخلى والخارج قابلا للتقسيم اذا احتوى على واحد او اكثر من المجموعات الذاتية self-sufficient المكونه من اقل من m من الصناعات لكل واحد من هذه المجموعات الذاتية فالصناعات الموجودة ضمن اى مجموعة ذاتية لا تتطلب دواخل من الصناعات خارج مجموعتها بمستويات الخواارج للصناعات خارج المجموعة الذاتية تكون مستقلة عن مستويات الخواارج والاستهلاك النهائى للصناعات ضمن المجموعة . ويحتوى نظام الخمس صناعات التالى مجموعتان ذاتيتان :

$$(٣٢-١٠) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix}$$

حيث ان المعاملات المذكورة تكون موجبه فالصناعتين ١ و 2 تكونا مجموعتين ذاتيتين ويتحصلا على الداخلى فيما بينهما ، وليس من الثلاثة الصناعات الاخرى وسوف لا تتأثر مستويات الخواارج للصناعات 3, 4, 5 بمستويات الاستهلاك النهائى وخواارج الصناعتين ١ و 2 وتكون الصناعات 1, 2, 3, 4 مجموعة ذاتية اخرى لا تتطلب دواخل من الصناعة 5 فيكون مستوى خارج 5 مستقلا عن مستويات الخواارج والاستهلاك النهائى للصناعات 3, 4 وكذلك الصناعتين 1 و 2 .

يمكن لاي نظام دواخل وخواارج حله بطريقة التجزئه solved by parts فلو ان معاملات (٣٢-١٠) ادخلت ضمن معادلات (٢٨-١٠) فانه يمكن حل المعادلات الخاصة لقيم q_1 فقد يمكن حل المعادلاتين الثالثة والرابعة لقيمى q_1 و q_4 . والمثل اذا اعطينا q_1, q_4, q_5 فاننا قد نحل المعادلتين الاولىتين لقيمى q_1 و q_2 .

ومما فان المعامل β_{ij} فى (٢٩-١٠) سوف يكون مساويا لصفر اذا كان فقط اذا ،

كانت if and only if الصناعات i خارج نطاق المجموعة الذاتية التي تحتوي على الصناعات j وتكون صفوفها المتطلبات المباشرة وغير مباشرة والمباقي $(10-23)$ كالآتي :

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} & \beta_{15} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} & \beta_{25} \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \beta_{34} & \beta_{35} \\ 0 & 0 & \beta_{43} & \beta_{44} & \beta_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{55} \end{bmatrix}$$

حيث ان المعاملات المذكورة تكون موجبه فالنظام الغير قابل للتقسيم *indecomposable* لا يحتوي على مجموعات ذاتيه ولذا فان جميع β_{ij} تكون موجبه .

نعرف نظام الد داخل والخارج بأنه نظام قابل للتقسيم التام *completely decomposable* اذا دخلت كل صناعة ضمن مجموعة ذاتيه اقل من الصناعات m فعلى سبيل المثال :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

فالصناعتين 1 ، 2 تو من فقط د داخلها فيما بينها وكذلك 3 ، 4 تو من د داخلها فيما بينها ويمكن تحديد مستويات الخوارج لكل مجموعة بغض النظر عن مستويات الاستهلاك النهائية والخوارج للآخرين . فاذا كان النظام قابل للتقسيم التام ، فان $\beta_{ij} > 0$ و i, j في نفس المجموعة الذاتية وأن $\beta_{ij} = 0$ و i, j في مجموعات مختلفة .

Existence

الوجود :

ان مجرد تكوين نظام الد داخل والخارج لا يضمن ان يكون له حلا طالما بحيث ان $q_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) لجميع $y_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) ونقدم هنا مجموعتان متكافئتان ولكنهما مختلفتان ، ومن شروط الكفاية والضرورة لوجود حل عام . فشرط هوكنز-سايمن^(١) *Hawkins-Simon* تتطلب ان جميع الحدود الصغرى للمعامل للمعادلة (10-28) بأن :

(١) راجع :

$$(r_{i-1}) \cdot 1 - a_{11} > 0, \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & \dots & -a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & \dots & 1 - a_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

وتتطلب المعايير الأولى والثانية لها للمعادلة (١٠-٣٣) أن :

وحدات i سوف يطلب منه إنتاج وحدة واحدة من i فلا يمكن ضمان خواجه صاحبه همت هذه الظروف • وتطلب الشرط الاخير من (٢٢-١٠) بان تكون المحددة (٢٢-١٠) موجبه.

هناك مجموعة مكافئة لشروط الكفاية والضرورة لوجود حل عام والتي تركز على مجموعات لا نهائية للمعاملات الداخلة وهذه الشروط تتطلب وجود مجموعة من الأعداد $d_j > 0$ ($j = 1, \dots, m$) بحيث أن:

$$(r_{i-1}) \cdot \sum_{j=1}^n d_j a_j \leq d_j \quad j=1, \dots, n$$

يجب ان تتحقق المتباينة البعثة (بدون المساواة) لمجموعة واحدة او اكثر من المجموعات الذاتية للخصائص ⁽¹⁾ واما اذا كان النظام غير قابل للتقسيم ، فانه يجب ان تتحقق المتباينة البعثة لخاصة واحدة فقط .

Price and Income Determination

تحديد الدخل والسعر :

ويتطابق شرط التنافس والذي يساوي بين السعر ووحدة التكلفة لكل صناعة :

$$p_j = a_{1j}p_1 + \dots + a_{mj}p_m + b_{1j}r_1 + \dots + b_{nj}r_n, \quad j = 1, \dots, m$$

حيث ان : p_i ($i = 1, \dots, m$) وان : q_i ($i = 1, \dots, n$) هما أسعار السلع
والعوامل على التوالي • وبإعادة تنظيم الحدود :

$$\begin{aligned} & (1-a_{11})p_1 - a_{21}p_2 - \dots - a_{m1}p_m = v_1 \\ & -a_{12}p_1 + (1-a_{22})p_2 - \dots - a_{m2}p_m = v_2 \\ & \vdots \\ & -a_{1n}p_1 - a_{2n}p_2 - \dots + (1-a_{nn})p_n = v_n \end{aligned}$$

حیث آن :

$$(37-10) \quad v_j = b_{1j}x_1 + b_{2j}x_2 + \dots + b_{mj}x_m \quad j = 1, \dots, m$$

(١) راجع الاثبات الذي اعطاه :

Lionel McKenzie, "Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory," in K. J. Arrow, S. Karlin, and P. Suppes (eds.), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, 1959 (Stanford, Calif.: Stanford University Press, 1960), p. 50.

فالدخل بهوزن سعر السوق يساوى الدخل بهوزن تكلفة العامل أو نضعها بصيغة أخرى أن مدققات العامل factor سوف تستغل قيمة صافي الخارج •

حل لهذه المعادلة يجب ان يكون له نشاطا واحدا على الاقل لكل سلعة لانه قد حدد خارجا صافيا موجبا لكل واحدة منها وتنص احدى نظريات البرمجة الخطية الهامة (راجع الفصل ٧-٥) على ان الحد الاقصى للنظام المحتوى على m من الضوابط لا يحتاج ان يحتوى على اكثر من m من النشاطات عند المستويات الموجبة . فمن الممكن الاستنتاج بان هناك اكثر من واحد من أنظمة الدواخل والخارج القصوى .

أن نظام البرمجة الثنائي (المزدوج dual)^(١) للمعادلتين (١٠-٣٩) و (١٠-٤٠) يتكون من إيجاد قيم لـ $p_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) تمكن النظام من الحصول على الحد الاقصى من :

$$I = \sum_{i=1}^m p_i y_i \quad (١٠-٤١)$$

وذلك تحت الشروط التالية :

$$\begin{aligned} (1-a_{11})p_1 - a_{21}p_2 - \dots - a_{m1}p_m &\leq b_1 \\ -a_{11}p_1 + (1-a_{22})p_2 - \dots - a_{m2}p_m &\leq b_2 \\ \dots &\dots \\ -a_{1m}p_1 - a_{2m}p_2 - \dots + (1-a_{mm})p_m &\leq b_m \\ (1-a_{11}^*)p_1 - a_{21}^*p_2 - \dots - a_{m1}^*p_m &\leq b_1^* \\ \dots &\dots \\ -a_{1m}^*p_1 - a_{2m}^*p_2 - \dots + (1-a_{mm}^*)p_m &\leq b_m^* \end{aligned} \quad (١٠-٤٢)$$

فالمغثيرات الازد واجبه هي اسعار الـ m سلعة مقاسة بوحدة العوامل فيها مادة تنظيم الحدود يمكن لنا اعادة كتابة الشروط في (١٠-٤٢) على النمط التالي :

$$p_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}^* p_j + b_i^* \quad k = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

وهذا هو الشرط المألوف والذي ينص على ان وحدة الازد (بوحدة العوامل) تكون اقل من او تساوية لتكلفة الوحدة (بوحدة الدواخل) لكل واحدة من نشاطات الانتاج الخطية . وتضمن لنا نظرية الازد واجبه في (١٠-٤٢) بان شرط التنافس الذي يساوى بين السعر والتكلفة لكل نشاط معمول به عند المستوى الموجب في نظام الدواخل والخارج الاقصى ، وان (١٠-٤٦) يضمن المساواة بين القيم المعظمى للدخل بتكلفة العامل (١٠-٣٩) والدخل بقيمة السوق (١٠-٤١) .

(١) ان النظام البدائي (١٠-٣٩) و (١٠-٤٠) يكون على نفس نمط النظام الثنائي العام المعطى بالمعادلتين (٣٧-٣٧) و (٣٨-٣٨) وان النظام الثنائي (١٠-٤٠) و (١٠-٤٢) يكونا على نفس نمط النظام المبدئي العام والمعطى بـ (٣١-٣١) و (٣٢-٣٢) ان نظريات الازد واجبه للبرمجة الخطية تكون متماثلة symmetric وتحقق بغض النظر من تصنيف النظامين كبدائي وثنائي .

فقد يتم احتمال التعويض بقود الى اسئلة حول ثبات معاملات الداخلى والخوارج التجريبية فهل سوف تنظر المعاملات عند القيم الملاحظة سنويا بينما تتغير متطلبات الاستهلاك النهائية من قيمهم السنوية ؟ • وتجب نظرية التعويض لنماذج الداخلى والخوارج بالاجاب وعلى وجه التحديد فانها تنص على ان نظام الداخلى والخوارج هو النظام الامثل لجميع $y_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) اذا كان هو النظام الامثل لاي مجموعة محددة من مجموعات قيم y وتتبع هذه النظرية وبسهولة من خاصية المؤشرات لانظمة البرمجة الخطية : ان اى تغيير فى متطلبات اى نظام سوف يترك مجموعة النشاطات الموجودة ضمن حله الامثل بدون تغيير اذا ظلت مرثيه • وبما ان النظام الداخلى والخوارج الامثل حلا عاما فان مستويات خوارجه سوف تكون غير سالبه لجميع متطلبات الاستهلاك النهائي الغير سالبه ، بهذا نكون قد اثبتنا نظرية التعويض وسوف تتغير مستويات الخارج بتغيرات متطلبات الاستهلاك النهائي ، ولكن اسعار السلع لا تتأثر ويمكن تسمية نظرية التعويض بنظرية عدم التعويض فالتعويض يكون محتلا ولكنه لم يلاحظ اهدا فى اقتصاد العامل الواحد فقط فنظرية التعويض لا تتحقق للاقتصاد المحتوى على اكثر من عامل واحد •

SUMMARY

١ - ٥ ملخص ما سبق

لا يهدى الى حد تشكيل نظام متعدد الاسواق، فمانا بوجود حل ائزان • ويمكن اختيار نظام هديه محددة بصورة منفصلة لتحديد وجود الائزان • ونص وجوب الائزان على ان التام الذى تحقق عددا من القيود العامة تمثلك حلول ائزان • ثبت وجود دوال غالب زائد لنظام عصورى ثم استخدمت نظرية النقطة الثابتة لبرهنة لاثبات وجود مجموعه او اكثر من اسعار الائزان للنظام • وتعرضنا لاثبات الوجود الخاص بدبرو ، والذي يرتكز على افتراضات اضعف •

تمثل الشروط الاستاتيكية والديناميكى لاستقرار السوق تعميما لشروط والراس للمسوق المنفرد • يتطلب لاستقرار الاستاتيكي التام مابقا للمفهوم البهيكسى ان تكون المشتقات الكليه de/dp_j ($j = 2, \dots, m$) سالبه لكل التوافيق، الممكنة للاسعار الجامدة والمرنة بينما يتطلب الاستقرار الغير تام والناقص ان تكون المشتقات الكليه سالبه ، بفرض ان تكون الاسعار مرنة • يتطلب التحليل الديناميكى للاستقرار منطقا فضليا لقوانين مبسط لاسعار مع الزمن • ويكون النظام متعدد الاسواق مستقرا ديناميكيا اذا اقترنت الاسعار من قيم ائزانيا مع فضاء الزمن • ويكون النظام ذو وحدانية التوازن مستقرا اذا حقت دوال الطلب الزائد له بديهيته وبك، للافضلية العامة • ويكون الحل لنظام ما اوجد اذا ما وجد هذا الحل للنظام الذى يحقق الشروط البهيكسه للاستقرار التام باستقرار •

وتستوجب بديهية وباء ايضا الوحداتيه •

وتستخدم في نموذج الدواخل والخوارج لكل m من السلع نشاط انتاجي احسادي
 خطى • تعمل الخوارج المنتجه والعوامل الغير منتجه كدخول • يعطى الحل العام
 لنظام الدواخل والخوارج • خوارجه على صورة دوال لستويات الاستهلاك • ويكـون
 التناام قابلا للضغكان اذا ما احتوى على واحدة او اكثر من مجموعات الاكتفاء الذاتى ذات
 عدد من الصناعات اقل من m • يمكن اشتقاق الاسعار التنافسيه للسلع المنتجه من
 اسعار العوامل • ويمكن تعميم نموذج الدواخل والخوارج ليمسح لكثر من نشاط واحد
 للسلمه • وتنشئ نثرية الاحلال على انه من يحدث احلال للدخل في اقتصاد ذو انتاج
 متعدد النشاط اذا كان هناك ماعلا فقط غير منتج •

EXERCISES

10-1 Use a Jacobian test to determine whether solutions exist for the following three-commodity systems:

$$(a) E_2 = -8p_2 + 24p_3 + 6 = 0; E_3 = 10p_2 - 30p_3 + 8 = 0$$

$$(b) E_2 = -3p_2 - p_3p_1 + p_3 = 0; E_3 = p_2 - p_3p_1 - 3p_3 = 0$$

$$(c) E_2 = -4p_2 + 8p_3 + 4 = 0; E_3 = p_2^2 - 2p_2 - 4p_3p_1 + 4p_1 + 4p_3 + 1 = 0$$

10-2 Find equilibrium prices for the three-commodity system given by

$$E_2 = 2p_1^2 + 22p_2 - 13p_3p_1 - 64p_3 + 20p_1 + 48 = 0$$

$$E_3 = p_2 - 2p_1 + 2 = 0$$

10-3 Consider the system (10-14) with $b_i < 0$ ($i = 2, \dots, m$) and $b_i = 0$ for $i > j$. Show that the system possesses perfect Hicksian stability in this case.

10-4 Assuming continuous adjustment, do the solutions for Exercise 10-2 satisfy the conditions for dynamic local stability?

10-5 Consider a system with one primary good, Q_1 , and one produced good, Q_2 . Assume that each consumer has a positive initial endowment of the primary good, and a positive share of the profits of at least one firm. Assume that all individual utility functions are of the form $U_i = q_{i1}q_{i2}^\alpha$ ($i = 1, \dots, n$), and that the production function for a representative firm is of the form $q_{21} = (q_{11})^\alpha (q_{22})^\beta$ with $\alpha, \beta > 0$ and $\alpha + \beta < 1$. Show that this system meets the assumptions underlying the existence proof of Sec. 10-1.

10-6 Consider pseudo excess demand functions for a consumer in pure exchange with the utility function $U_i = q_{i1}q_{i2}^\alpha q_{i3}^\beta$ with $\alpha, \beta > 0$. Show that the boundaries similar to those shown in Fig. 10-2 are straight lines.

10-7 The a_{ij} coefficients for a three-industry, input-output system are

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Use the Hawkins-Simon conditions to determine whether this system has a general solution.

10-8 Use the column-sum conditions given by (10-34) to determine whether the input-output system of Exercise 10-7 has a general solution.

SELECTED REFERENCES

- Arrow, K. J., and F. H. Hahn: *General Competitive Analysis* (San Francisco: Holden-Day, 1971). Advanced mathematics is used. Existence, stability, and uniqueness are covered in chaps. 5, 11-12, and 9 respectively.
- Debreu, Gerard: *Theory of Value* (New York: Wiley, 1959). Advanced mathematics is used to prove the existence of competitive equilibrium.
- Hicks, J. R.: *Value and Capital* (2d ed., Oxford: Clarendon Press, 1946). Multimarket equilibrium is covered in chaps. IV-VIII. The mathematical development is contained in an appendix.
- Leontief, W. W.: *The Structure of American Economy, 1919-1939* (2d ed., New York: Oxford, 1951). A description of the input-output model by its originator.
- Metzler, Lloyd A.: "Stability of Multiple Markets: The Hicks Conditions," *Econometrica*, vol. 13 (October, 1945), pp. 277-292. An advanced mathematical discussion of the Hicksian and dynamic multimarket stability conditions.
- Miernyk, W. H.: *The Elements of Input-Output Analysis* (New York: Random House, 1965). An elementary nonmathematical description of empirical input-output systems.
- Nikaido, Hukukane: *Convex Structures and Economic Theory* (New York: Academic, 1968). Existence, stability, and uniqueness are covered in this volume for the mathematically sophisticated reader.
- Quirk, James, and Rubin Saposnik: *Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics* (New York: McGraw-Hill, 1968). Existence and stability are treated in chaps. 3 and 5 respectively. Mathematical concepts are simplified and developed in the text.
- Samuelson, Paul A.: *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). Dynamic multimarket stability is discussed in chap. IX.

الفصل الحادى عشر

اقتصاديات الرفاهية

WELFARE ECONOMICS

ان الغرض من اقتصاديات الرفاهية هو تقدير رغبة المجتمع فى الحالات الاقتصادية
الهديلة • فالحالة الاقتصادية هى عبارة عن ترتيب خاص للنشاطات والموارد الاقتصادية •

فكل حالة من هذه الحالات تتميز برصد كميات مختطفه من الموارد وتوزيع مختلف
للمكافئات على الانشطة الاقتصادية • فقد لا يستطيع الاقتصادى دائما من وصف طريقة
تتم من خلالها انتقال (او تحول) حالة اقتصادية الى حالة اخرى ولكن مقاييس السياسه
المتبعه سوف تكون متوفرة فى اغلب الاحيان لتغيير الحاله الراهنه • فمن المهم جدا ان
نصرف هنا اذا كان التغيير المتوقع مرغوب فيه ام لا • تخيل على سبيل المثال ان باعكان
الاقتصاد التوصل الى توازن للأسواق المتعدده عند مجموعتين مختلفتين من السلع
واسعار العوامل •

وبما ان رغبات المستهلكين والملاك متوافقه عند كلا التوازنين فان بمقدرة المجتمع ان
يختار بينهما وحتى ولو كان على اساس الرفاهية فقط فالقواعد التى تحل بها مثل هذه
المصاعب تكون ضمن مجال اقتصاديات الرفاهية •

ان رفاية المجتمع تعتمد على مستويات القناعة والرضى لجميع المستهلكين ⁽¹⁾ وذلك
بالمعنى العريض ولكن معظم الهدائل يجب ان تقيم باقتصاديات الرفاهية سوف يكون لها
اثر مرغوب على بعض الناس واثار غير مرغوبه على الآخرين وعلى ضوء هذا فان امام
الاقتصادى اختيارين • فقد يرفض المستهلك التعامل مع الحالات التى يؤدى فيها

(1) ان مثل هذه العبارات تكون صفيه على قواعد خلقية او تقييمات مقبوه ولا يمكن اثباتها
فمن المعقول ان نفترض بان فكرة رفاية المجتمع تتحدر من الفكرة الأكثر انضباطا
وهى فكرة الرفاهية الاقتصادية • فعلى سبيل المثال فقد يعتمد رفاية المجتمع على
ماهى السلعة المنتجة وعلى طريقة توزيعها بين الناس • وعلى الطريقة التى تضم بها
المجتمع سياسيا وإلى أى حد تتخذ القرارات الاجتماعية بالمعطيات المحلية السى
اخره فالتحليل الحاضرة سوف تركز على الرفاهية الاقتصادية •

التغير الاجتماعي المقترح على تحسين حالة الاظمية وتد هور حالة الباقيين ويقنع نفسه بتحليل الحالات التي تكون فيها الرفاهية مضمونة له . وقد يقرر كبدل عمل مقارنات شخصية interpersonal comparisons لمنفعة ومن ثم يحلل فصلا من الحالات بصفة موسعة .

ففي الحالة السابقة يكون فيها المستهلك مهتما بالتوزيع الأكثر كثافة للموارد ونفس الحالة الأخيرة يجب عليه ان يقوم بتقييمات واضحة . فقد يامل الانسان ان هذه التقييمات سوف تكون على ضيق المجتمع كقاعدة يعتمد عليها لان الاقتصادى لا يمتلك كثافة . اكثر من اى انسان اخر في القول بان اى حركة محددة اكثر رغبة اذا كان لها تأثيرات غير مرض منها من بعض اعضاء المجتمع .

ففي الفصل (١١-١) سوف نشق شروط باريتو Pareto للاقتصاد الكلى والفعال efficiency economic ولقد ناقشنا احتمالات تحقيق هذه الشروط تحت حالتي المنافسة المثلى perfect competition وحالة المنافسة الغير مثلى imperfect في الفصلين (١١-٢) و (١١-٣) اما الفصل (١١-٤) فانه يناقش مواضيع التأثيرات الخارجية على الاستهلاك والانتاج وكذلك نظريات السلع العامة public goods اما التوصل الى شروط باريتو من خلال الضرائب والتعويضات subsidies فانه مناقش في الفصل (١١-٥) ثم تعتبر شروط الرفاهية الاجتماعيه في الفصل (١١-٦) ونظريات الثانى في ترتيب الافضل second best تكون مقدمة في الفصل (١١-٧) .

PARETO OPTIMALITY

أفضلية باريتو : ١/١١

نصف عملية التخصيص (او التوزيع allocation) بمستويات الاستهلاك المحددة لكل مستهلك ومستويات الداخول والخارج المحددة لكل منتج فامثلية باريتو تعطينا تعريفا للكفاءة الاقتصادية لعملية التخصيص التي تخدم كاساس للمكثير من اقتصاديات الرفاهية فيكون التخصيص امثلا من وجهة نظر باريتو Pareto optimality او يكون كفو من وجهة نظر باريتو Pareto-efficient اذا لم يكن بالامكان اعادة تنظيم الانتاج والتوزيع (توزيع الدخل) لزيادة المنفعة لشخص واحد او اكثر بدون خفض المنفعة للآخرين وبالعكس يكون التخصيص غير مثالى من وجهة نظر باريتو Pareto-nonoptimal وذلك اذا زادت منفعة شخص ما بدون الحاق الضرر باى شخص اخر . وتسمى احد التخصيصات بظرف باريتو Pareto-superior على الاخرى اذا كانت المنفعة لشخص واحد او اكثر اعلى ولم تكن اقل لاي شخص ، وحتى اذا لم يكن التخصيص امثلا من وجهة نظر باريتو .

ان تعاليل افضلية باريتو تقترب كثيرا من التقييمات والمقارنات الشخصية لمستويات

المنفعة ونتيجة لذلك فإن التغيرات التي تحسن أوضاع البعض ولكن تسبب تدهورا في منفعة أولئك الآخرين الذين لا يقدرين على التقييم بالنسبة للكفاءة فقد تكون نتيجة الحركة هذه ناعمة أو لا تكون . فيقال ان الرفاهية اخذت في الازدياد (في التقاص) اذا تحسن وضع شخص واحد على الاقل (او تدهور) بدون تغيير في أوضاع الآخرين . فمن الواضح انه من غير الممكن ان تكون الحالة ايجابية الا اذا كانت جميع التحسينات من هذا النوع^(١) ان التجرد من اعتبارات توزيع الدخل يحد من عدد الاسئلة التي يجاب عليها باريتو . فعلى سبيل المثال فقد يكون لمجتمع ما تخصيص باطنية بأريته بحيث ان احد المستهلكين يحصل على ٩٩٪ من جميع السلع ، ولكن اغلب الناس لا يعتبرون هذا تخصيصا مرضى منه .

Pareto Optimality for Consumption

أفضلية باريتو للاستهلاك :

يكون توزيع السلع الاستهلاكية باطنية باريتو (متضمنا وقت الفراغ leisure والمعامل الاولى الاخرى الغير مستخدمة) اذا كانت اعادة تخصيص السلع التي تزيد المنفعة لشخص واحد او اكثر سوف ينتج عنها انخفاض في منفعة مستهلك واحد اخر على الاقل . وسوف نتحصل على افضلية باريتو اذا كانت منفعة كل مستهلك عند حدها الاقصى اذا اعطينا مستويات المنفعة لجميع المستهلكين الآخرين .

مثال :

للتوضيح افترض انه يوجد مستهلكين اثنين فقط نرمز لهما بالعدد (١) و (٢) في اسفل الحرف وكذلك يوجد سلعتين اثنتين فقط Q_1 و Q_2 وتكون دالتى المنفعة للمستهلكين $U_1(q_{11}, q_{12})$ و $U_2(q_{21}, q_{22})$ بحيث ان $q_{11} + q_{21} = q_1^*$ ثابت وان $q_{12} + q_{22} = q_2^*$ والان افترض ان المستهلك II يتمتع بمستوى القناة U^* constant فمن اجل الحصول على الحد الاعلى لمنفعة المستهلك I تحت شرط ميزانية ثم تكون الدالة :

$$U^* = U_1(q_{11}, q_{12}) + \lambda [U_2(q_2^* - q_{12}, q_1^* - q_{11}) - U^*]$$

حيث ان λ هي مضروب لاقرانج Lagrange multiplier ووضع اشتقاقات هذه الدالة لجزئيه مساويه لصفر :

(١) ان التحاليل الراهنة محدودة بالكفاءة الغير حركية وسوف لانهتم لنواحي رفاهية تخصيص الموارد عبر الزمن او مجرى الزمن للرفاهية او الرفاهية البدنية عبر الزمن للاقتصاد .

$$\frac{\partial U_1^*}{\partial q_{11}} = \frac{\partial U_1}{\partial q_{11}} - \lambda \frac{\partial U_2}{\partial q_{21}} = 0$$

$$\frac{\partial U_1^*}{\partial q_{12}} = \frac{\partial U_1}{\partial q_{12}} - \lambda \frac{\partial U_2}{\partial q_{22}} = 0$$

$$\frac{\partial U_1^*}{\partial \lambda} = U_2(q_1^* - q_{11}, q_2^* - q_{12}) - U_2^* = 0$$

(١١-١)

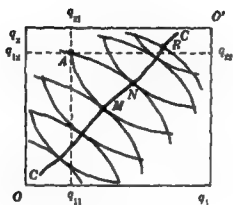
$$\frac{\partial U_1 / \partial q_{11}}{\partial U_1 / \partial q_{12}} = \frac{\partial U_2 / \partial q_{21}}{\partial U_2 / \partial q_{22}}$$

وذلك :

حيث ان الطرف الايسر من المعادلة (١١-١) يمثل RCS للمستهلك I. ويمثل الطرف الايمن RCS للمستهلك II ولتحقيق اظلية باريتو يجب ان يتساوى RCS للمستهلكين في حالة الاستهلاك . فاذا لم تتحقق (١١-١) فانه من الممكن اعادة توزيع السلع بطريقة تسمح بزيادة منفعة I بدون خفض منفعة II والمناقشة متشابهة في الحالة الاخرى . وينتج شرط (١١-١) من الحصول على الحد الاعلى لمنفعة II اذا اعطينا مستوا ثابتا لمنفعة I . ولهذا فاذا لم تتحقق (١١-١) فانه من الممكن ايضا زيادة منفعة II بدون خفض منفعة I ويمكن تعميم التحاليل الرياضية لحالة المستهلكين الاثنين بسهولة لتغطي اى عدد من المستهلكين .

ان من الممكن وضع النقاش التالي عن طريق استخدام صندوق ادج وورث Edgeworth box (راجع الفصل ٢-٩) وتمثل ابعاد المستطيل في الشكل (١١-١) مجموع الكميات المتوفرة من السلعتين Q_1 و Q_2 ضمن اطار اقتصادى نقايضى بحتا pure-exchange economy فإى نقطة داخل الصندوق تمثل توزيعا معيناً من السلع بين المستهلكين الاثنين .

مثال : اذا كانت طريقة توزيع السلعتين معطاة كما في النقطة A فان الكميات من Q_1 و Q_2 المستهلكة من قبل I يجب ان تقاس عن طريق احدائيات A مستخدمين في ذلك الركن الجنوبي الغربى O كقطة اصل ، اما الكميات المستهلكة من قبل II فانها تقاس باحدائيات النقطة A باستخدام الركن الشمالى الشرقى O كقطة أصل ولقد رسمت منحنيات السوا' للمستهلك I باستخدام O كقطة اصل ومنحنيات (خريطة 'map' السوا' للمستهلك II باستخدام O كقطة اصل ويكون RCS للمستهلكين متساوية حيث يحدث تقاس بين خريطة سوا' المستهلك I وخريطة سوا' المستهلك II فيكون العمل الهندسى locus لجميع هذه النقاط هو " منحنى الاغلاق contract curve CC' وتعطى المعادلة (١١-١) النقط (الشكل الرياضى لمنحنى الاغلاق وهو بدلالة



شكل (١١ - ١)

ان معدلات تعويض السلع غير متساو عند نقطة A ولكن من الممكن زيادة كميات
المنفعة لكلا المستهلكين بتغيير التوزيع الحالي . فلو ان الوضع النهائي (وذلك بعد
اعادة توزيع Q_1 و Q_2 كان بين M و N فان كلا المستهلكين سوف يكسب ، لان -
كلاهما سوف يكون على منحنيات سواء اولى من تلك عند نقطة A فلو ان المنفعة النهائية
كانت عند M او N فان احد المستهلكين سوف يكسب بدون اي تهوور في وضع
المستهلك الثاني فاذا وصلنا الى نقطة على منحنى الاتفاق ، فانه ليس من المحتمل
تحسين وضع كلا المستهلكين بدون حدوث تهوور في مكانة الاخر . فموجب شروط اطلبه
باريتو فان اي نقطة من M الى N سوف تكون اكثر تفضيلا من نقطة A ولكن عليهم
النظر البديل على منحنى الاتفاق سوف يحدث فيه مقارنة شخصية للمنافع وذلك لا يكون
ممكنا ضمن الاطار الحالي .

Pareto Optimality for Production

أمثلة باريتو للإنتاج :

اذا افترضنا ان المستهلكين غير متضمنين وان مستوى المنفعة لكل فرد مستقلا عن
الكميات المستهلكة من قبل الآخرين ، فان اي زيادة في كمية سلع اي مستهلك بدون
تقمان في كمية سلع اي مستهلك اخر سوف تؤدي الى زيادة في المنفعة لاحد
المستهلكين على الاقل بدون نقص في منفعة الآخرين . ولهذا فان أمثلة باريتو
للمنتجين تتطلب ان يكون مستوى الخارج output لكل سلعة مستهلك عند قيمته وذلك
اذا اطلبنا مستويات الخارج لجميع السلع المستهلكة الاخرى .

مثال :

افترض انه يوجد اثنين من المنتجين وانهم يستخدم ما اثنين من المدخل لانتاج
سلعتين باستخدام دالتى الانتاج :

$$q_1 = f_1(x_{11}, x_{12})$$

$$q_2 = f_2(x_{21}, x_{22})$$

حيث ان $x_{11} + x_{21} = x_1^0$ وان $x_{12} + x_{22} = x_2^0$ يمثلان كميات الداخلة المتوفرة وان q_1, q_2 يمثلان مستويات الخارج وبالحصول على الحد الاقصى من خارج السلعة I تحت الشرط بان يكون خارج السلعة II يكون على مستوى مقرر سابقا وهو q_2^0 ثم نكون الدالة التالية :

$$L = f_1(x_{11}, x_{12}) + \lambda [f_2(x_1^0 - x_{11}, x_2^0 - x_{12}) - q_2^0]$$

ثم نضع اشتقاقاتها الجزئية مساوية لصفر :

$$\frac{\partial L}{\partial x_{11}} = \frac{\partial f_1}{\partial x_{11}} - \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_{21}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{12}} = \frac{\partial f_1}{\partial x_{12}} - \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_{22}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = f_2(x_1^0 - x_{11}, x_2^0 - x_{12}) - q_2^0 = 0$$

(٢-١١)

$$\frac{\partial f_1 / \partial x_{11}}{\partial f_1 / \partial x_{12}} = \frac{\partial f_2 / \partial x_{21}}{\partial f_2 / \partial x_{22}}$$

ونجد ان

ان الجانب الايسر من (٢-١١) يمثل RTS للمستهلك I من اجل X_1, X_2 ونجد ان الجانب الايمن يمثل RTS للمستهلك II من اجل X_1, X_2 ويجب ان تتساوى RTS للمنتجين لتحقيق امثلة باريتو في الانتاج . فلوان (٢-١١) لم تتحقق فانه من الممكن زيادة انتاج احدى السلع بدون انخفاض في انتاج الاخر ، وكما يمكن للتقاضي احياء ، فانه من المحتمل زيادة انتاج كلا السلعتين .

Pareto Optimality in General

امثلة باريتو على وجه العموم

ان شروط باريتو المشتقة في الفصلين السابقين بالنسبة للمستهلكين والمنتجين يمكن تعميمها وتوسيعها لتشمل اعتبارات للاقتصاد ككل اعتبر الان وجود اقتصاد مكون من عدد m من المستهلكين وعدد N من المنتجين وعدد n من العوامل الاولى ، وعدد s من السلع المنتجة . وللتبسيط افترض ان كل مستهلك يستهلك جميع السلع المنتجة ، وان كل منتج يستخدم جميع العوامل الاولى وينتج جميع السلع فتصبح دوال المنفعة للمستهلكين كما يلي :

$$(٢-١١) \quad U_i = U_i(q_1^i, \dots, q_s^i, x_1^i - x_1^0, \dots, x_n^i - x_n^0) \quad i = 1, \dots, m$$

حيث ان q_k^* (هى الكمية المستهلكة من Q_k) والذى استهلكها المستهلك i وان x_i^* هى الكمية الثابتة ، مما يمتلكه مدنيا من العامل الاولى j وان x_j^* هى الكمية المعروضة من المستهلك i للمنتجين وان $x_i^* - x_j^*$ هى الكمية التى يستهلكها • ونعطى هنا دوال الانتاج فى الشكل الضمنى implicit :

$$(٤-١١) F_h(q_{h1}, \dots, q_{hm}, x_{h1}, \dots, x_{hm}) = 0 \quad h = 1, \dots, N$$

حيث ان q_{hk} هى الخارج للسلمة Q_k بواسطة الوحدة الانتاجية h وان x_{hj} هى الكمية من X_j التى يستخدمها • فتكون الكميات الاجالية للمعامل الاولى التى يعرضها المستهلكون مساوية للكميات الاجالية المستخدمة من المنتجين •

$$(٥-١١) \sum_{j=1}^m x_j^* = \sum_{h=1}^N x_{hj} \quad j = 1, \dots, m$$

وتكون كذلك اجالى مستويات الاستهلاك من السلع المنتجة مساويا لاجالى مستويات خارجها :

$$(٦-١١) \sum_{j=1}^m q_k^* = \sum_{h=1}^N q_{hk} \quad k = 1, \dots, s$$

وسوف نصل الى امثلية باريتو اذا كانت منفعة كل مستهلك عند حدها الاقصى وذلك اذا اعطينا مستويات المنفعة للمستهلكين الاخرين تحت الشروط (٤-١١) و (٥-١١) و (٦-١١) اعتبر الان الحصول على الحد الاعلى من منفعة المستهلك i تحت هذه الشروط ثم كون دالة لاقرانج :

$$Z = U_i(q_{i1}, \dots, x_{in}^* - x_{in}^*) + \sum_{j=2}^m \lambda_j [U_j(q_{j1}, \dots, x_{jn}^* - x_{jn}^*) - U_j^*] \\ + \sum_{h=1}^N \theta_h F_h(q_{h1}, \dots, x_{hm}) + \sum_{j=1}^m \delta_j \left(\sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{h=1}^N x_{hj} \right) + \sum_{k=1}^s \sigma_k \left(\sum_{i=1}^m q_{ik}^* - \sum_{h=1}^N q_{hk} \right)$$

حيث ان $\sigma_k, \delta_j, \theta_h, \lambda_i$ هم مضروبات لاقرانج • وبوضع الاشتقاقات الجزئية للدالة Z مساوية لصفر :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial q_{i1}^*} &= \frac{\partial U_i}{\partial q_{i1}^*} - \sigma_1 = 0 & \frac{\partial Z}{\partial x_{in}^*} &= -\frac{\partial U_i}{\partial (x_{in}^* - x_{in}^*)} + \delta_1 = 0 \\ (٧-١١) \quad \frac{\partial Z}{\partial q_k^*} &= \lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial q_k^*} - \sigma_k = 0 & \frac{\partial Z}{\partial x_j^*} &= -\lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial (x_j^* - x_j^*)} + \delta_j = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial q_{hk}} &= \theta_h \frac{\partial F_h}{\partial q_{hk}} + \sigma_k = 0 & \frac{\partial Z}{\partial x_{hj}} &= \theta_h \frac{\partial F_h}{\partial x_{hj}} - \delta_j = 0 \end{aligned}$$

حيث ان $j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, s, h = 1, \dots, N, i = 2, \dots, m$ نضع الاشتقاقات الجزئية بالنسبة لمضروبات لاقرانج مساوية لصفر بمعنى ان الشروط قد تحققت • يمكن وضع الشروط الاصلية باريتو فى النمط المعتاد • فنحل (٧-١١) من اجل σ_k / σ_1 :

$$\frac{\sigma_j}{\sigma_k} = \frac{\partial U_j / \partial q_k^j}{\partial U_j / \partial q_k^j} = \dots = \frac{\partial U_m / \partial q_k^m}{\partial U_m / \partial q_k^m} = \frac{\partial F_j / \partial q_k^j}{\partial F_j / \partial q_k^j} = \dots = \frac{\partial F_m / \partial q_k^m}{\partial F_m / \partial q_k^m} \quad (٨-١١)$$

$j, k = 1, \dots, s$

وتتم شروط (٨-١١) على ان RCS لجميع المستهلكين وان RPT لجميع المنتجين يجب ان يتساوا لكل زوج من السلع المنتجة . تخيل ان (٨-١١) لم تتحقق لـ Q_j و Q_k بحيث ان $RCS = 1$ لبعض المستهلكين وان $RPT = 2$ لبعض المنتجين وان ثلاثة وحدات من Q_j يمكن تحويلها الى وحدتين من Q_k وذلك بالحرك على منحني تحويل المنتج transformation curve فلوان المستهلك يستغنى عن ثلاثة وحدات من Q_j (بدون تغيير في مواقف المستهلكين الاخرين) فانه سوف يطلب وحدة واحدة فقط من Q_k وذلك بالتبادل والمقايسة من اجل ان يظل على نفس منحنى السواء ويتحاشى الانقاص من المنفعة وسوف يزداد فعلا مستوى القناعة والرضا لهذا المستهلك وذلك ببقائه بتحويل ثلاثة وحدات من Q_j الى وحدتين من Q_k ولكن مثل هذا التحسن كان من غير الممكن اذا كان RCS يساوى RPT ...

ويحل (٧-١١) من اجل δ_j / δ_k :

$$\frac{\delta_j}{\delta_k} = \frac{\partial U_j / \partial (x_{jk}^j - x_{jk}^i)}{\partial U_j / \partial (x_{jk}^j - x_{jk}^i)} = \dots = \frac{\partial U_m / \partial (x_{jk}^m - x_{jk}^i)}{\partial U_m / \partial (x_{jk}^m - x_{jk}^i)} = \frac{\partial F_j / \partial x_{jk}^j}{\partial F_j / \partial x_{jk}^j} = \dots = \frac{\partial F_m / \partial x_{jk}^m}{\partial F_m / \partial x_{jk}^m} \quad (٩-١١)$$

$j, k = 1, \dots, n$

وتتم الشروط (٩-١١) على ان يجب مساواة RCS لجميع المستهلكين مع RTS لجميع المنتجين وذلك لكل زوج من السلع الاولى . فلوان هذا الشرط لم يتحقق لبعض المستهلكين وبعض المنتجين فانه من الممكن زيادة منفعة المستهلك بطريق المبادله بين المستهلك والمنتج .

واخيرا يحل (٧-١١) لتيم δ_j / δ_k .

$$\frac{\delta_j}{\sigma_k} = \frac{\partial U_j / \partial (x_{jk}^j - x_{jk}^i)}{\partial U_j / \partial q_k^j} = \dots = \frac{\partial U_m / \partial (x_{jk}^m - x_{jk}^i)}{\partial U_m / \partial q_k^m} = - \frac{\partial F_j / \partial x_{jk}^j}{\partial F_j / \partial q_k^j} = \dots = - \frac{\partial F_m / \partial x_{jk}^m}{\partial F_m / \partial q_k^m} \quad (١٠-١١)$$

$j = 1, \dots, n$
 $k = 1, \dots, s$

وتتم شروط (١٠-١١) على مساواة RCS للمستهلك بين العوامل والسلع مع معدلات المنتج المقابلة لتحويل العوامل الى سلع (ان MP الخاص بهم)^(١) فلنسمون (١٠-١١) لم تتحقق لبعض المستهلكين والمنتجين فان منفعة المستهلك سوف تزداد وذلك بالتخلي عن بعض العوامل مقابل كمية اكبر من السلع او بعض السلع مقابل كمية اكبر من العوامل .

وتوصف حالة امطية باريتو بالشروط الحدية (١١-٨) و (١١-٩) و (١١-١٠) ،
بالاضافة الى الشرط الاضافي الذي ينص على انه من غير المحتمل زيادة المنفعة
لمستهلك واحد او اكثر بدون التقليل من المنفعة للآخرين وذلك بعدم مواصلة انتاج سلعة
واحدة او اكثر وتفترض هنا ان الشرط الاخير يتحقق دائما فتكون امطية باريتو قد عرفت
بدلالة المعدلات التفاضلية للتعويض بين العوامل والسلع بدون الاشارة الى اسماء
السوق اما مفروقات لا قرائع q_j ($j = 1, \dots, n$) و σ_k ($k = 1, \dots, s$) فانها تكون بمثابة
اسعار كفاية efficiency prices ولا تتحقق امطية باريتو اذا عدل جميع المستهلكين
والمنتجين معدلات تعويضهم الى نسب هذه الاسعار (اسعار الكفاية) فاي مجموعة من
اسعار السوق للعوامل والسلع مثل $p_j = \alpha q_j$ ($j = 1, \dots, n$) وكذلك $p_k = \alpha \sigma_k$ ($k = 1, \dots, s$)
حيث ان $\alpha > 0$ سوف تخدم كاسعار كفاية وتؤدي الى حالة امطية باريتو .
ان من الشيء المعترف في اقتصاديات الرفاهية ان نسال ما اذا كانت بعض اسعار السوق
المعينة تكون اسعار كفاية او ما يعادل ذلك ان نسال ما اذا كانت هناك بعض الاشكال
الخاصة بتنظيم السوق سوف تعود الى امطية باريتو .

١١ - ٢ فعالية وكفاءة المنافسة الكاملة :

THE EFFICIENCY OF PERFECT COMPETITION

ان المستهلكين يقومون بشراء السلع وبيع العوامل الاولى بينما تقوم الوحدات
الانتاجية ببيع السلع وشراء العوامل الاولى . ففي المنافسة الكاملة يواجه المستهلكون
والوحدات الانتاجية نفس مجموعة اسعار السلع والعوامل ولا يستطيع مستهلك او وحدة
انتاجية ان تؤثر على هذه من خلال تصرفاتهم فلوان المستهلكين كانوا ممن يحاولون
الحصول على الحد الاعلى لمنفعتهم فان كل واحد منهم سوف يساوي RCS الخاص به
لكل زوج من السلع بنسبة السعر المقابل :

$$RCS_{ij} = \frac{p_j}{p_k} \quad (11-11)$$

حيث ان i, k يمكن ان تشير الى السلع او العوامل الاولى . فاذا كانت الوحدات
الانتاجية ممن يحاولون الحصول على الحد الاعلى من الربح ، فانهم سوف يساوي RPT
و RTS و MP بنسب الاسعار المقابلة :

$$RPT_{ij} = \frac{p_j}{p_k} \quad (12-11)$$

فاذا كان كلا i و k يشيران الى السلع ، فان :

$$RTS_{ij} = \frac{p_j}{p_k} \quad (13-11)$$

فاذا كان كلا i و k يشيران الى العوامل وان :

(١٤-١١)

$$MP_R = \frac{P_L}{P_R}$$

إذا كانت i تشير إلى سلعة ما وكانت k تشير إلى عامل من العوامل ومقارنته (١١-١١) إلى (١٤-١١) بى (١١-١١) و (١١-١١) و (١٠-١١) يتضح لنا ان شروط امضية باريو قد تحققت فى حالة المناصفة الكاملة .

نقرر المناصفة السابق ذكرها ان المناصفة الكاملة تكون كافية sufficient لاطمية باريو . ويوضح ما على انها ضرورية كذلك افترض ان الشروط (١١-١١) إلى (١٠-١١) تتحقق ، وان المعادلات (١١-١١) و (١٢-١١) و (١٤-١١) يمكن كتابتها منده ببعضها كالتالى :

$$(١٥-١١) \quad RPT_M = \frac{\text{التكلفة الحدية لـ } Q_i \cdot \text{بدلالة } X_i}{\text{التكلفة الحدية لـ } Q_k \cdot \text{بدلالة } X_k} = \frac{P_i/MP_i}{P_k/MP_k} = \frac{P_i}{P_k} = RCS_M$$

حيث ان i و k يشيران إلى السلع وان i تشير إلى العامل . فلوان الاسعار لم تكن مساوية للتكاليف الحدية ، (١٥-١١) سوف تتحقق ، فقط اذا كانت الاسعار متناسبة مع التكاليف الحدية أى انه اذا كانت :

$$(١٦-١١) \quad P_i = \theta \frac{P_L}{MP_i} \quad P_k = \theta \frac{P_L}{MP_k}$$

: (١٦-١١) ترتيب :

$$(١٧-١١) \quad \frac{P_L}{P_i} = \frac{1}{\theta} MP_i \quad \frac{P_L}{P_k} = \frac{1}{\theta} MP_k$$

نطرى المعادلة (١٧-١١) اليسرى تساوى معدل التعويض للمستهلك بين Q_i او (Q_k) و X_i بينما الطرف الايمن يكون $1/\theta$ ضربا فى معدل التحويل للمنتج بين Q_i او (Q_k) و X_i . فشروط (١٥-١١) لم تتحقق لان معدلات التعويض والتحويل للمستهلكين والمنتجين لم تتساوا فالمستهلكين يقدموا الكمية القصوى من X_i (العمل) لذا فان التخصيم (التوزيع) لا يمكن ان يكون بامضية باريو .

ان المناصفة الكاملة تمثل رفاهية على حيث انها تحقق مطلوبات امضية باريو الا اذا كان واحدا او اكثر من الافتراضات المشار اليها سابقا فى هذا الفصل لم تتحقق . فشروط الدرجة الثانية يجب ان تتحقق لجميع المستهلكين والمنتجين . فلوانهم لم يتحققوا لواحد او اكثر من المستهلكين او المنتجين فان مساواة معدلات التعويض والتحويل سوف لا تضمن الاطمية .

فالحقيقة ان النقطة التى يتساوى عندها معدلات التعويض والتحويل قد تكون نقطة "تساؤم" pessimum بدلا من نقطة مثلى . ويكون الحل الاكمل عندها ممثلا بحل ركضى

Corner solutions راجع الشكل (٢-٤) فقد تتحقق امضية بارينو تحت المنافسة الكاملة اذا تنم واحدا او اكثر من المستهلكين . فالمنفعة الحدية الزائدة للمستهلك المتنم تساوى صفرا لكل سلعة وان معدلات تعويضها تكون غير معروفة فقد نحول السلع من هذا المستهلك المتنم الى المستهلك الاخر بدون تخفيض المنفعة وبدون زيادة فسي منفعة الاخرين . اما حالات بارينو الغير ملى Pareto nonoptimality تحت المنافسة الكاملة اذا كان هناك مؤثرات خارجية على الاستهلاك او الانتاج فانها مشروحه فسي الفصل (١١-٤) .

هناك حالات تكون فيها المنافسة الكاملة مطابقة لامضية بارينو ولكن بعض التساوى الحديه لا تتحقق . فقد تنتج حلول ركنيه حتى ولو كانت جميع دوال المنفعة والانتاج بالشكل المناسب ، بشرط ان تكون RCS للمستهلكين دائما اكبر من (او اصغر من) RPT المقابله للمنتجين فاحد السلع سوف لا يكون منتجا ويجب ان نصف امضية بارينو لهذه السلع تحت الاعتبار بدلالة النهايات الحديه .

١١ - ٣ فعالية (كفاءة) المنافسة الغير كاملة :

THE EFFICIENCY OF IMPERFECT COMPETITION

ان الاحتكار واحتكار القلة واحتكار الشراء والاشكال الاخرى للمنافسة الغير كاملة مع بعض الاستثناءات ، سوف تؤدى الى توزيعات بارينو غير امضية للموارد فالشروط الحديه التى تحققت تحت المنافسة الغير كاملة سوف لا تحقق شروط امضية بارينو المعطاة بالمعدلات (١١-٨) و (١١-٩) و (١١-١٠) .

ولسوف نستخدم هنا طريقة التوازن الجزئى partial-equilibrium للحكم على فعاليه (كفاءة) قطاعات معينه فى الاقتصاد لقد افترضنا ان الشروط من (١١-١٦) التى (١٤-١١) تكون محققة من جميع قطاعات الاقتصاد وغير التى تحت الاعتبار . وكنتهجه لذلك فان ذلك القطاع سوف ينظر اليه عما اذا حقق هذه الشروط ام لم يحققها . فحسب طريقة الاسواق المتعددة المستخدم فى الفصل (١١-١) فان الشروط الامضية بارينو قد اشترقت بدون الاشارة الى اسعار السوق . اما هنا فان الاسعار الخارجية قد افترض انها بالتوزيع بطريقة فعالة فالحالات التى لا يحققها هذا الافتراض سوف تناقش فى الفصل (١١-٧) .

Imperfect Competition in Consumption : المنافسة الغير كاملة فى الاستهلاك :

سوف يكون هناك منافسه غير كاملة اذا لم يستطع واحدا من المستهلكين او اكثر شراء سلعة ما او بيع عامل ما بالقدر الذى يرغب فى شرائه او بيعه بدون ان يؤثر تأثيرا ملحوظا

على اسعار السلع والعوامل .

مثال :

افترض انه يوجد اثنين من المستهلكين وطايل واحد factor وسلمعين وان دالتي المنفعة كما يلي :

$$U_1 = U_1(q_{11}, q_{12}, x_1^1 - x_1) \quad U_2 = U_2(q_{21}, q_{22}, x_2^1 - x_2)$$

حيث ان x_1^1 تمثل ما يمتلكه المستهلك 1 مبدئيا من العامل ، وان x_1 تمثل كمية العامل الذي يعرضه المستهلك 1 ، وان q_{12} تمثل استهلاك السلعة 2 مع سعر مرز Q_1 معتدا على اجمالي الكمية المطلوبة $p_1 = g(q_1)$ حيث ان $q_1 = q_{11} + q_{21}$ وان $g'(q_1) > 0$ وان شرطى ميزانيه المستهلكين هما :

$$rx_1 - g(q_1)q_{11} - p_2q_{12} = 0$$

$$rx_2 - g(q_1)q_{21} - p_2q_{22} = 0$$

فكل واحد من المستهلكين يحاول ان يحصل على الحد الاعلى من منفعة تحت شرط ميزانية مكونا الدالتين :

$$L_1 = U_1(q_{11}, q_{12}, x_1^1 - x_1) + \lambda_1 [rx_1 - g(q_1)q_{11} - p_2q_{12}]$$

$$L_2 = U_2(q_{21}, q_{22}, x_2^1 - x_2) + \lambda_2 [rx_2 - g(q_1)q_{21} - p_2q_{22}]$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئية مساوية لصفر :

$$\frac{\partial U_1}{\partial q_{11}} - \lambda_1 [p_1 + q_{11}g'(q_1)] = 0$$

$$(1A-11) \quad \frac{\partial U_1}{\partial q_{12}} - \lambda_1 p_2 = 0 \quad - \frac{\partial U_1}{\partial (x_1^1 - x_1)} + \lambda_1 r = 0 \quad i = 1, 2$$

$$rx_i - g(q_1)q_{i1} - p_2q_{i2} = 0$$

$$\frac{\partial U_i / \partial q_{i1}}{\partial U_i / \partial q_{i2}} = \frac{p_1 + q_{i1}g'(q_1)}{p_2} \quad \frac{\partial U_i / \partial q_{i1}}{\partial U_i / \partial (x_i^1 - x_i)} = \frac{p_1 + q_{i1}g'(q_1)}{r} \quad i = 1, 2 \quad \text{وكذلك :}$$

ففي هذه الحالة يعصرف المستهلكين الاثنان كمحتكرى شرا" (راجع الفصل ٨-٢) ويمكن RCS التوازنى الخاص بهما والمعطى بالمعادلة (1A-11) التكاليفتين الحديتين للحصول على كميات اغانيه من Q_1 بدلا من p_1 .

فلوان $q_{11} \neq q_{21}$ فان التكاليف الحدية لـ Q_1 تختلف من مستهلك لآخر وكذلك RCS الخاص بهما ، ولا يكون توزيع Q_1 بين المستهلكين باطنية باريتو . ولكن اذا كانت $q_{11} = q_{21}$ فان RCS لهما سوف يكونا متساويين ، ولكنهما سوف يختلفان من RPT ومن MP للمستهجين للذين عادلهم بحسب الاسعار .

المنافسة الغير كاملة في أسواق البيع :

Imperfect Competition in Commodity Markets

من اجل تبسيط المسألة ، نفرض انه توجد سلعة واحدة فقط Q بسعر p و يوجد ايضا مالا factor واحدا فقط X بسعر r فشرط امطية باريتو (١١-١٠) سوف تتحقق اذا ساوى المنتجين بين MP الخاص بهم اذا ساوى المستهلكين RCS الخاص بهم بنسب سعر السلعة للعامل :

$$MP = \frac{r}{p} = RCS \quad (11-19)$$

فلو اننا افترضنا ان المستهلكين سوف يحققوا (١١-١٩) فان امطية باريتو سوف تتحقق لو ان المنتجين ساووا السعر بالتكلفة الحدية MC :

$$p = \frac{r}{MP} = MC \quad (11-20)$$

فلو ان واحدا او اكثر من المنتجين فشل في تحقيق (١١-٢٠) فان التوزيع الناتج سوف لا يكون بامطية باريتو . فساواة السعر بالتكلفة الحدية يمثل حدا عابدا في حالة المنافسة الكاملة ولكنه حدا غير مادي في حالة المنافسة الغير كاملة .

في حالة المحتكر البسيط simple monopolist (راجع الفصل ٧-١) يكون الايراد الحدى MIR وهو اقل من السعر ، مساويا للتكلفة الحدية MC . وهذا يخلق توزيعا لا يمثل امطية باريتو اما المحتكر المميز بين زبائنه من حيث وضع سعرا مصغرا لكل مجموعة من زبائنه (تمييزا كاملا perfectly discriminating monopolist (راجع الفصل ٧-٢) فانه شأن من القادة التي تنص على ان المنافسة الغير كاملة لا تكون امطية باريتو . فهو سوف يساوى السعر الحدى بالتكلفة الحدية MC وسوف يتحقق شرط (١١-١٩) و (١١-٢٠) اذا فسرت p على انها تمثل التكلفة الحدية MC لكل من المنتجين والمستهلكين . ففي المنافسة الكاملة يستفيد كلا من المشتري والبائع من عملية المبادلة ، اما في حالة الاحتكار التمييزي التام فان الفائدة كلها سوف يمتصها البائع وسوف تكون توزيعات الدخل الناتجة من هذين النطين لتنظيم السوق مختلفة تماما ولكن كلاهما يمثل امطية باريتو فالمحتكر الذي يحصل على الحد الاطلى من ايراداته (راجع الفصل ٧-٣) سوف يحاول ان يحصل على الحد الاطلى من ايرادات جميعاء تحت الشرط الذي ينص على ان ربحه يساوى او يتفوق مستوا اذنه مقبول minimum acceptable profit فالربح الادنى القبول يكون مائة اقل من ربحه الامثل الاحتكاري ، وان مستوى الخارج output يكون مائة اقل من المستوى الذي قد يتحقق في حالة الاحتكار البسيط . وسوف يحقق المحتكر الحاصل على الحد الاطلى من الايرادات الشرط

(٢٠-١١) إذا كان (١) ربحه الأدنى القبول مساويا للربح الذي اكتسبه من الخارج الذي يساوي عنده السعر مع MC ويكون MC في ازدياد ، (٢) أن MR يكون مفسر سالبها عند هذه النقطة وحيث أن ليس لديه الحافز لاختيار مثل هذه النقطة فإن حدوث كلا (١) و (٢) سوف يكون بمحض الصدفة . فعامة ، لا أحد يتوقع أن يحقق المحتكر الذي يحصل على الحد الأعلى من إيراداته الشروط الضرورية للحصول على ائمية باريتو .

كذلك احتكار القلة ، $oligopoly$ والاحتكار الثنائي $Duopoly$ لا ينتج عنه ائمية باريتو فشرط (٢٠-١١) لا يتحقق في جميع الحالات المذكورة في الفصل (١٨-١) ففي كل حالة يساوي واحدا أو أكثر من المستهلكين بين بعض انماط MR وبين MC وتتعلق نموا لتعاقيل على حالة المنافسة الاحتكارية في الفصل (٥-٢) .

المنافسة الغير كاملة في أسواق العوامل :

Imperfect Competition in Factor Markets

اعتبر وجود سوقا للمعامل حيث يتصرف فيه البائعون كمنافسين كاملين وسوف نتحقق شروط (١٠-١١) لائمية باريتو إذا ساوى كل مشتري للدخل $input$ قيمة MP الخاص به الى سعر العامل :

$$pMP = r \quad (١١-٢)$$

فلو فشل واحد أو أكثر من المشتري في تحقيق (١١-٢) فإن التوزيع الناتج — سوف لا يمثل ائمية باريتو فالشرط (١١-٢) يتحقق عادة في حالة المنافسة الكاملة ولا يتحقق في حالة المنافسة الغير كاملة بين المشتريين .

فمحتكر الشراء $monopolistic$ (راجع لفصل ٤-٧) يساوي بين قيمة MP وبين MC للعامل الذي يكون أكبر من سعره ، وبهذا يخلق توزيعا لا يحقق ائمية باريتو ولقد تركبنا للقاء " كثرين أن يكون تحليلا لمحتكر الشراء " المميز تماما موازيا للتحليل التي قدناها وأن يثبت أن التوزيع الناتج هو ائمية باريتو فجميع النظريات تقريبا لاحتكار الشراء احتكار القلة يدخل فيها مساواة قيمة MP لبعض أشكال \overline{MC} للداخل وبهذا لا يتحقق شرط (١١-٢) .

فعالية (كفاءة) الاحتكار الثنائي : The Efficiency of Bilateral Monopoly

إن الأسواق التي ناقشناها حتى الآن تحتوي على منافسة غير كاملة من جانب البائع ومنافسة كاملة من جانب المشتريين أو منافسة كاملة من جانب البائعين ومنافسة غير كاملة من جانب المشتريين فالتصبير " الاحتكار الثنائي يغطي بالمعنى الواسع الأسواق

التي تكون المنافسة غير كاملة من كلا الجانبين ، من جانب البائعين والمشتريين .

لقد غطينا حالة المشتري المحتكر وحالة البائع المحتكر في الفصل (٨-٥) فحتمية مثل هذه الاسواق تعتمد على قوة المساواة النسبية للمشتريين ولقد اُخذنا في الفصل (٨-٥) ان مستويات الدخل والخراج سوف تكون متطابقة identical بتركز على قد يتحصل عليها في حالة المنافسة الكاملة اذا حاول المحتكر والمحتكر المشتري الحصول على الحد الاقصى من ربحهما المشترك فتكون نتيجة ذلك توزيعا محققا افضلية باريتو اما طريقة توزيع ربحهم المشترك فانه غير مهم من وجهة نظر افضلية باريتو ، وبالرغم من انهما قد تكون مهمة بالنسبة لهما . ومن السهولة تصميم هذه النتيجة لتغطي الاسواق التي يكون فيها العدد الاجمالي للبائعين والمشتريين اكبر من اثنين على شرط انهما يحصلان على الحد الاقصى من ربحهما المشترك .

١١ - ٤ التأثيرات الخارجية في الاستهلاك والإنتاج :

EXTERNAL EFFECTS IN CONSUMPTION AND PRODUCTION

ان النتيجة التي تنص على ان المنافسة الكاملة تؤدي الى توزيعات افضلية باريتو تكون متوقفة على الافتراض بعدم وجود تأثيرات خارجية في الانتاج والاستهلاك ، اي ان مستوى المنفعة لا يتغير مع مستوى استهلاك الآخرين وان اجمالي التكلفة لكل مالك لا تعتمد على مستويات الخارج output للآخرين فقد لا تتحقق افضلية باريتو تحت شروط المنافسة الكاملة وذلك اذا وجدت تأثيرات خارجية في الاستهلاك والانتاج .

Interdependent Utility Functions : دوال المنفعة المتعددة على بعضها البعض :

افترض ان U_1 تحتوي منفعة احد المستهلكين يعتمد على استهلاك الآخر . فقد يبرز ذلك الاثار من منعة ورضا وقبول المستهلك 1 اذا ارفع مستوى استهلاك المستهلك 2 وقد يكون لمعامل "مجازاة الفميز" تأثيرا مغايرا للآثار .

مثال :

افترض انه يوجد اثنين من المستهلكين بحيث ان دالتى منفعتهما :

$$U_1 = U_1(q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22})$$

$$U_2 = U_2(q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22})$$

حيث ان $q_{11} + q_{21} = q_1^1$ و $q_{12} + q_{22} = q_2^1$ فمن اجل الحصول على الحد الاقصى من منفعة المستهلك 1 تحت شرط ان منفعة المستهلك 2 تكون عند مستوى معين

سبقاً ، ثابتاً $U_1^0 = U_1^0$ تكون الدالة التالية :

$$UP = U_1(q_{11}, q_{12}, q_1^1 - q_{11}, q_2^1 - q_{12}) + \lambda [U_2(q_{11}, q_{12}, q_1^1 - q_{11}, q_2^1 - q_{12}) - U_1^0]$$

يوضع الاشتقاقات الجزئية مساوية لصفر ، نحصل على :

$$\frac{\partial UP}{\partial q_{11}} = \frac{\partial U_1}{\partial q_{11}} - \frac{\partial U_1}{\partial q_{21}} + \lambda \left[\frac{\partial U_2}{\partial q_{11}} - \frac{\partial U_2}{\partial q_{21}} \right] = 0$$

$$\frac{\partial UP}{\partial q_{12}} = \frac{\partial U_1}{\partial q_{12}} - \frac{\partial U_1}{\partial q_{22}} + \lambda \left[\frac{\partial U_2}{\partial q_{12}} - \frac{\partial U_2}{\partial q_{22}} \right] = 0$$

$$\frac{\partial UP}{\partial \lambda} = U_2(q_{11}, q_{12}, q_1^1 - q_{11}, q_2^1 - q_{12}) - U_1^0 = 0$$

وبذلك نحصل على :

$$(٢٢-١١) \quad \frac{\partial U_1 / \partial q_{11} - \partial U_1 / \partial q_{21}}{\partial U_1 / \partial q_{12} - \partial U_1 / \partial q_{22}} = \frac{\partial U_2 / \partial q_{11} - \partial U_2 / \partial q_{21}}{\partial U_2 / \partial q_{12} - \partial U_2 / \partial q_{22}}$$

وهذه المعادلة (٢٢-١١) هي شرط أمطية باريتو والتي تختف عن (١١-١) التي تنص على RCS للمستهلك I يجب أن يساوي RCS للمستهلك II فالمعادلة الكاملة ينتج منها (١١-١) وليس (٢٢-١١) وما أن الاشتقاقات الجزئية لدالة المنفعة تكون بدلالة جميع المتغيرات فإن الوضع الأمثل لكل مستهلك يعتمد على مستوى استهلاك الآخر . فعلى سبيل المثال ، افترض أن التأثير الخارجي في حالة المستهلكين الاثنين هو : $\partial U_2 / \partial q_{11} < 0$

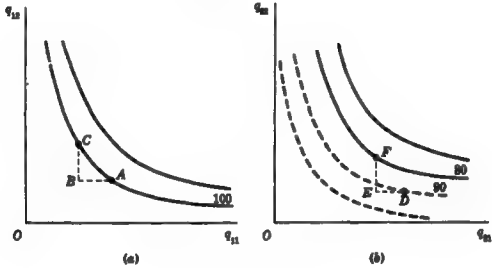
فيصبح معادلة (٢٢-١١) كالآتي :

$$\frac{\partial U_1 / \partial q_{11}}{\partial U_1 / \partial q_{12}} = \frac{\partial U_2 / \partial q_{11} - \partial U_2 / \partial q_{21}}{-\partial U_2 / \partial q_{22}}$$

ففيجب أن يكون RCS للمستهلك II (أكبر للتوزيع الأمثل مما يكون عليه في غياب التأثيرات الخارجية)

أن من الممكن إثبات أن الشرط (١١-١) لا يتطلب بالضرورة أمطية باريتو وذلك في حالة وجود تأثيرات خارجية وسوف نثبت هذا عن طريق الرسم البياني التالي :

فالشكل (١٧-١) و (١١-٢) يعطيان منحنيات السواء للمستهلك I والمستهلك II على التوالي . افترض أن الوضع العددي للمستهلك I يكون ممثلاً بنقطة A حيث أنه يستهلك مجموعة السلع المغطاة بها هذه النقطة وأن استهلاك II سوف يكون ممثلاً بالنقطة F . فهاتين النقطتين والتي يساوي عندهما RCS قد توصلنا إليهما



شكل (١١ - ٢)

بعملية الحصول على الحد الاعلى من المنفعة المفردة بغض النظر عن التأثيرات الخارجية المحتلة افترض ان I غير متأثر باستهلاك II وان مستوى منفعة II قد انخفض نتيجة لاستهلاك I كمية من Q_1 (وليس من Q_2) . ولقد رست منحنيات سوا II (المنحنيات الغير متقطعة) على افترض ان استهلاك I يكون معطى بالنقطة A . ففى موضعى التوازن المفرد لكل واحد منهما فان موضع المنفعة للمستهلك I يكون 100 وللمستهلك II يكون 80 . والان لفترض ان توزيع السلع قد تغير بحيث ان اجمالى الكميات المستهلكة لم يتغير وان I تحرك الى C وان II تحرك الى D . فنجد ان مستوى المنفعة للمستهلك I لم يتغير بهذا التوزيع ولكن انخفاض استهلاكه من السلعة Q_1 غير مستوى منفعة II لكل مجموعة سلع استهلاكت من قبل الاخير . فتكون منحنيات سوا II بعد التغيير فى استهلاك I معطاة بالمنحنيات المتقطعة فى الشكل (١١-٢) .

ولقد ازداد مستوى منفعة II الى 90 لان موضعه الجديد هو عند نقطة D فقد نستنتج ان مستوى منفعة III قد يزداد بدون تخفيض لمستوى منفعة I ولذا فان مساواة RCS لا تضمن اظنية باريتو .

Public Goods

السلع العامة :

يحدث نوعا مختلفا من التأثيرات الخارجية عندما تستهلك السلع جماعيا فكل فرد من افراد المجتمع سوف يكتسب فائدة ورعا من الناجع الاجمالى للسلعة العامة ولا يحدث انخفاضا فى فائدة ورعا اى فرد بها يكتسبه الاخر من الفائدة والرضا والاستمتاع بهذه

السلعة العامة ، ولا يمكن لشخص واحد ان يحتكر الاستطاعة بهذه السلعة له شخصيا كما هو الحال في حالة السلع العادية .

فشرطا نظمية باريتو المعطاة بالمعادلات في (١١-١) و (١١-٢) لا تتحقق بالسلع العامة ، لذا فانه من الضروري احداث شروط جديدة فلا نفقد شيئا هاما اذا افترضنا انه يوجد اثنين من المستهلكين ومنتج واحد ، وسلعة عادية واحدة وسلعة عامة واحدة ، وفاعل اولى واحد ، فنكون دالتى المستهلكين كالتالى :

$$U_i = U_i(q_{1i}, q_{2i}, x_i^1 - x_i) \quad i = 1, 2$$

حيث ان q_{1i} هي استهلاك السلعة العادية Q_1 من قبل المستهلك i و q_{2i} هي مجموع الخايج output للسلعة العامة Q_2 وان x_i^1 هي ما يمتلكه المستهلك i من العامل X وان x_i هي كمية العامل الاولى الذى تفكون دالة الانتاج الضمنية هي :

$$F(q_{1i}, q_{2i}, x) = 0$$

حيث ان $q_1 = q_{11} + q_{21}$ تمثل خارج Q_1 وان $x = x_1 + x_2$ تمثل كمية X التى استخدمت في الانتاج .

ونحصل على شروط نظمية باريتو بالحصول على الحد الاطلى من منفعة فالفرض ان منفعة في مستوا مقرا سابقا وان دالة الانتاج قد تحققت . ويتكون دالة لاقرانج :

$$Z = U_1(q_{11}, q_{21}, x_1^1 - x_1) + \lambda [U_2(q_{21}, q_{22}, x_2^1 - x_2) - U_1] + \theta F(q_{1i}, q_{2i}, x) + \delta (x_1 + x_2 - x) + \sigma (q_1 - q_{11} - q_{21})$$

حيث ان $\lambda, \theta, \delta, \sigma$ يمثلون مضروبات لاقرانج التى لم تحدد بعد . ونوضح الاشتقاق الجزئى للدالة Z مساوية لصفر :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial q_{11}} &= \frac{\partial U_1}{\partial q_{11}} - \sigma = 0 & \frac{\partial Z}{\partial x_1} &= -\frac{\partial U_1}{\partial (x_1^1 - x_1)} + \delta = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial q_{21}} &= \lambda \frac{\partial U_2}{\partial q_{21}} - \sigma = 0 & \frac{\partial Z}{\partial x_2} &= -\lambda \frac{\partial U_2}{\partial (x_2^1 - x_2)} + \delta = 0 \\ (٢٢-١١) \quad \frac{\partial Z}{\partial q_2} &= \frac{\partial U_1}{\partial q_2} + \lambda \frac{\partial U_2}{\partial q_2} + \theta \frac{\partial F}{\partial q_2} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial q_1} &= \theta \frac{\partial F}{\partial q_1} + \sigma = 0 & \frac{\partial Z}{\partial x} &= \theta \frac{\partial F}{\partial x} - \delta = 0 \end{aligned}$$

ونفرض ان الاشتقاق الجزئى بالنسبة لمضروبات لاقرانج سوف تكون مساوية لمضرباتها . ان المعادلة (١١-٢) بالنسبة للسلع العادية تنص على انه يجب مساواة RCS لكل

مستهلك p RPT المقابلة لكل منتج وتطلب (١١-٢٢) أن (١) :

$$(22-11) \quad \frac{\partial U_i / \partial q_2}{\partial U_i / \partial q_{11}} + \frac{\partial U_j / \partial q_2}{\partial U_j / \partial q_{21}} = \frac{\partial F / \partial q_2}{\partial F / \partial q_1}$$

أن مجموع RCS للسلعة Q_1 من أجل Q_2 للمستهلكين يجب أن يساوي RCS للسلعة Q_1 من أجل Q_2 في الإنتاج ولا يحتاج لمساواة RCS لكل مستهلك تغني أن للمستهلك I والمستهلك II القيم التالية لـ RCS ثلاثة وأعين للسلعة Q_1 لكل وحدة من Q_2 ولكن RPT. المنتج تكون أربعة وحدات من Q_1 لكل وحدة من Q_2 فنجد أن الشرط (١١-٢٢) لم يتحقق وأن توزيع Q_1 و Q_2 لا يمثل أنظمة باريتو. فلو أن I و II مثلنا من ثلاثة وحدات ووحدتين من Q_1 على التوالي، فإن المنتج يستطيع زيادة خارج Q_2 بأكثر من وحدة واحدة وذلك بزيادة مستحبات المفضلة لكل المستهلكين.

وتتطلب معادلات (١١-٢٢) أيضا أن :

$$(23-11) \quad \frac{\partial U_i / \partial q_2}{\partial U_i / \partial (x_1^i - x_1)} + \frac{\partial U_j / \partial q_2}{\partial U_j / \partial (x_2^j - x_2)} = - \frac{\partial F / \partial q_2}{\partial F / \partial x}$$

لمجموع الـ RCS للعامل X من أجل Q_2 يجب أن يساوي مقلوب الـ MP للعامل X في إنتاج Q_2 وأخيرا يحل (١١-٢٢) من أجل

$$(24-11) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{\partial U_i / \partial (x_1^i - x_1)}{\partial U_i / \partial q_{11}} = \frac{\partial U_j / \partial (x_2^j - x_2)}{\partial U_j / \partial q_{21}} = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial q_1}$$

فالـ RCS للعامل X من أجل Q_1 لكل مستهلك يجب أن يساوي الـ MP للعامل X في إنتاج Q_1 فالشرط (١١-٢٤) هو نفس الشرط (١١-٢٣).

فمن السهل تعميم تعاليل السلع العامة. فلو كان هناك أكثر من عامل أولى واحد فإن (١١-٢٤) سوف تكون سارية المفعول : أن الـ RCS لجميع المستهلكين يجب أن يساوي الـ RTS لجميع المنتجين لكل زوج من العوامل الأولية فلو وجد أكثر من سلعة عامة واحدة فإن (١١-٢٤) سوف تكون سارية المفعول : أن الـ RCS للمستهلكين يجب أن يساوي الـ RPT للمنتجين فلو كان هناك سلعتين عامتين فإن أجمالي الـ RCS الخاص بهما والذي يمكن صياغته كنسبة أجمالي الـ RCS لسلعة عامة اختبرت عشوائيا يجب أن يساوي الـ RPT الخاص بهما (راجع تمرين ١١-٤).

(١) وبالتحديد $\sigma = -\sigma(\partial F / \partial q_1)$ و $\lambda = \sigma(\partial U_i / \partial q_{11})$ في معادلة $\partial Z / \partial q_2$ وبالقسمة $\sigma = \partial U_i / \partial q_{11}$ ثم بإعادة تنظيم الحدود.

Lindahl Equilibrium

توازن لينداهل :

ان السلع العامة لا تتاع ولا تشتري في السوق مثل السلع الاخرى العادية ولا يستمتع
مستهلك ان يتحمل على كمية من السلعة العامة خاصة به وحده دون غيره ولكن يمكن
تصميم خطة ينتج عنها توازن فيما يشبه السوق "pseudo market" للسلعة العامة .

اعتبر اقتصادا مكونا من اثنين من المستهلكين ومنتج واحد ، وسلعة عادية واحدة
وسلعة عامة واحدة ، وبالمثل اولى واحد متوفرا بكمية ثابتة ولا ينتج عنه اى منفعة
للمستهلكين . فتكون دالتى المنفعة كالتالى :

$$(27-11) \quad U_1 = U_1(q_{11}, q_2) \quad U_2 = U_2(q_{21}, q_2)$$

حيث ان q_1 هي السلعة العادية وان q_2 هي السلعة العامة فتكون دالة الاننتاج :

$$(28-11) \quad F(q_1, q_2) - x^0 = 0$$

$$(29-11) \quad q_1 = q_{11} + q_{21}$$

حيث ان $x^0 = x_1^0 + x_2^0$ هي كمية العامل الاولى الثابتة وان x_1^0, x_2^0 هما الكميتان
المحتفظ بهما للمستهلكين . دع p_1 لتكن سعر السوق للسلعة q_1 وان p_2 السعر
الذى يقبله المنتج لكل وحدة من وحدات السلعة العامة افترض ان $I + II$ قد حوسبا
على اساس ان αp_2 و $(1-\alpha)p_2$ على التوالى لكل وحدة من وحدات السلعة العامة
المنتجة حيث ان $0 < \alpha < 1$. دع سعر العامل الاولى يساوى الوحدة للمستهلكين سوف
يحصل على الحد الاعلى من منفعتيهما (27-11) تحت شرطى ميزانيتيهما :

$$(30-11) \quad p_1 q_{11} + \alpha p_2 q_2 = x_1^0 \quad p_1 q_{21} + (1-\alpha)p_2 q_2 = x_2^0$$

وسوف يساوى نسبة السعر المدرك **perceived price** الى **RCS** الخاص بهما :

$$(31-11) \quad \frac{\alpha p_2}{p_1} = \frac{\partial U_1 / \partial q_2}{\partial U_1 / \partial q_{11}} \quad \frac{(1-\alpha)p_2}{p_1} = \frac{\partial U_2 / \partial q_2}{\partial U_2 / \partial q_{21}}$$

وبإضافة معادلتى (31-11)

$$(32-11) \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\partial U_1 / \partial q_2}{\partial U_1 / \partial q_{11}} + \frac{\partial U_2 / \partial q_2}{\partial U_2 / \partial q_{21}}$$

فالمنتج يحاول الحصول على الحد الاقصى من ربحه بحيث ان x^0 معتبرة ثابتة تحت
الشرط المعطى بالمعادلة (32-11) وبهذا فانه سوف يساوى نسبة السعر **RPT**
الخاص به :

$$(33-11) \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\partial F / \partial q_2}{\partial F / \partial q_1}$$

ويتبع من (٣٢-١١) و (٣٣-١١) ان (١١-١٨) قد تحققت وأن امثلية باريتو للتوزيع قد تحققت • فالنظام المكون من المعادلات من (١١-٢٨) الى (١١-٣٣) يحتوى على سبع معادلات مستقله بها سبعة متغيرات :

$$(1) \alpha, q_{11}, q_{21}, q_{12}, q_{22}, p_1, p_2$$

وتمثل قيم الحل توازن لينداهل •

ويمكن النظر فى العملية السابقة بطريقة بديله كالتالى • نستخدم الحصول على الحد الاعلى من المنفعة لاشتقاق دوال الطلب للسلع :

$$f_{11}(p_1, (1-\alpha)p_2), f_{12}(p_1, \alpha p_2), f_{21}(p_1, \alpha p_2), f_{22}(p_1, (1-\alpha)p_2)$$

حيث ان f_i هى طلب المستهلك i من السلعة f ونشتق دوال عرض المنتج من الحصول على الحد الاعلى من الربح وهما •

$$g_1(p_1, p_2), g_2(p_1, p_2).$$

ويطلب التوازن فى السوق للسلعة المادية ان :

$$(٣٤-١١) \quad f_{11}(p_1, \alpha p_2) + f_{21}(p_1, (1-\alpha)p_2) = g_1(p_1, p_2)$$

والتوازن فيما يشبه السوق للسلعة المعاه يعطى ان :

$$(٣٥-١١) \quad f_{12}(p_1, \alpha p_2) = f_{22}(p_1, (1-\alpha)p_2) = g_2(p_1, p_2)$$

حيث أن المتساويه الأولى تعبر عن المطلب بأن كل مستهلك سوف يستهلك نفس الكمية من السلعة المعاه وان المتساويه الثانيه تعبر عن المطلب بان الكمية المطلوبه تساوى الكمية المعروضه • وتحدد المعادلات الثلاث فى (٣٤-١١) وفى المعادله (٣٥-١١) المتغيرات α, p_2, p_1 ومن ثم تحدد الكميات من ال f_i •

مثال : افترض ان دوال المنفعة والانتاج هم :

$$U_1 = q_1^{\frac{1}{2}} q_2^{\frac{1}{2}} \quad U_2 = q_1 q_2 \quad q_1 + q_2 - x^0 = 0$$

وافترض ايضا ان $x^0 = 1600$ مع $x_1^0 = 128$ و $x_2^0 = 1472$ فتكون معادلات (١١-٢٨) الى (١١-٣٣) المستقله :

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= 1600 & q_1 &= q_{11} + q_{21} \\ \frac{p_2}{p_1} \frac{q_1}{q_2} &= \frac{q_{12}}{q_1} & \frac{\alpha p_2}{p_1} \frac{q_1}{q_2} &= \frac{(1-\alpha)p_2}{p_1} \frac{q_{21}}{q_2} \\ p_1 q_{11} + \alpha p_2 q_2 &= 128 & p_1 q_{21} + (1-\alpha)p_2 q_2 &= 1472 \end{aligned}$$

(١) ان المعادله (٣٢-١١) والتى هى مجموعايتين من المعادلات الاخرى ليست مستقله •

فقد يبحث القارئ أن هذا النظام يحلّ الحل التالي :

$$\begin{aligned} q_1 &= 32 & q_{11} &= 11 & q_{21} &= 30 \\ q_2 &= 24 & p_1 &= 32 & p_2 &= 24 & \alpha &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

وفورات خارجية وزوائد في نفقات الإنتاج

External Economies and Diseconomies

لقد افترضنا أن $p = MC$ ربما ضروريا لاشلية باريتو في قطاع الانتاج . فمساواة السعر بالكلفة الحدية لجميع السلع والوحدات الانتاجية يتطلب ان ال RPT المقابل للوحدات المنتجة لا بد وان تكون نفس الشيء ، ويقسم ال RPT (وهو عبارة عن ميل منحنى التحويل) تكلفة الفرصة البديله $opportunity\ cost$ او التضحية الحقيقية بالنسبة للفرضي الثامنة لانتاج وحدة اضافية من السلع فعلى الان تعتبر تكلفة الفرصة البديله هذه حاجة داخلية للوحدة الانتاجية فمن اجل انتاج وحدة اضافية من السلع Q فسيان الوحدة لا بد وان تضحي بانتاج عدد معين من وحدات Q فالقياس النسبي للتضحية من وجهة نظر المجتمع يكون في عدد وحدات Q التي يتخلى عنها المجتمع من أجل انتاج وحدة اضافية من Q فتكلفة الفرصة البديله هي نفسها من وجهة النظر الخاصة والعامة وذلك في غياب الوفورات الخارجية والزوائد في نفقات الانتاج فلوان مثل هذه التأثيرات الخارجية موجودة في تلك الانتاج فانه يجب ان نأخذ بالحسبان الاقتصاد المتداخل بين تكلفات الوحدة i وخارج الوحدة k (راجع الفصل ٢-٦) .

مثال : افترض على سبيل التبسيط انه يوجد وحدتين للانتاج فقط وان دالتى الانتاج لهما :

$$(26-11) \quad C_1 = C_1(q_1, q_2) \quad C_2 = C_2(q_1, q_2)$$

حيث ان q_1 و q_2 يمثلان مستوى الخارجين . وتعتبر دالتى الانتاج (٢٦-١١) من وجود تأثيرات خارجية فاذا قامت كل وحدة بمحاولة الحصول على الحد الاقصى من ربحها بطريقة انفرادية فان السعر سوف يساوى MC او .

$$p = \frac{\partial C_1}{\partial q_1} \quad p = \frac{\partial C_2}{\partial q_2}$$

فبح كل وحدة من الوحدات يعتمد على مستوى الخارج للوحدة الاخرى ، ولكن لا يستطيع اى منها ان يؤثر على خارج الاخر ، ولهذا فان كلا منهما يحاول الحصول على الحد الاقصى من ربحه هو بالنسبة للتفسير تحت سيطرته وتحكمه .

يمكن قياس الرفاهية المرتبطة بالانتاج بالفرق بين الفائدة الاجتماعية التي انشأت

والتكلفة الاجتماعية التي تحملها المجتمع • فيمكن قياس الفائدة الاجتماعية الناتجة من $q_1 + q_2$ وحدة من السلع بأجمالي الإيرادات $p(q_1 + q_2)$ وهذا يعني معن الكمية التي يرغب المستهلكون في دفعها للحصول على الخارج وقياس التكاليف الاجتماعية بمجموع التكاليف التي تحملها كلا من المالكين المنتجين للسلعة •

$$C_1(q_1, q_2) + C_2(q_1, q_2).$$

فمن أجل الحصول على أمثلة باريتو فانه يجب الحصول على الحد الاطى من الارباح المشتركة للمالكين بافتراض انه ليس لاي خطبة القدرة على التأثير على الاسعار •

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = p(q_1 + q_2) - C_1(q_1, q_2) - C_2(q_1, q_2)$$

وبوضع الاشتقاقات الجزئية الصافية لـ π :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = p - \frac{\partial C_1}{\partial q_1} - \frac{\partial C_2}{\partial q_1} = 0 \quad (٣٧-١١)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = p - \frac{\partial C_1}{\partial q_2} - \frac{\partial C_2}{\partial q_2} = 0$$

ويطلب شروط الدرجة الثانية بان تكون العوامل الرئيسية الصغيرة لصيغة هيسسيان متبادلة في الاشارة (اى + و - او - و +) •

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial^2 C_1}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_1^2} & -\frac{\partial^2 C_1}{\partial q_1 \partial q_2} - \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_1 \partial q_2} \\ -\frac{\partial^2 C_1}{\partial q_1 \partial q_2} - \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_1 \partial q_2} & -\frac{\partial^2 C_1}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_2^2} \end{vmatrix}$$

وهذه الشروط تتطلب بان يكون :

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_1^2} > 0 \quad \frac{\partial^2 C_1}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_2^2} > 0$$

فلا اشتقاقات الجزئية $\partial C_1 / \partial q_1$ و $\partial C_2 / \partial q_2$ يمثلان التكاليف الحدية الخاصة *private marginal costs* لانها تقيس معدل زيادة اجمالي تكلفة المالك المفرد وذلك كلما زاد مستوى الخارج الخاص به • فمحاولة الحصول على الحد الاطى لكل مالك على انفراد تتطلب مساواة السعر بالتكلفة الحدية الخاصة وانها في ازدياد وتصل المجموعتان :

$$\partial C_1 / \partial q_2 + \partial C_2 / \partial q_2 = \partial C_1 / \partial q_1 + \partial C_2 / \partial q_1$$

التكاليف الحدية الاجتماعية لانها تقيس معدل زيادة تكلفة الصناعة كلما ازاد مستوى خارج وحدة الوحدات النكونه لهذه الصناعة • وتطلب أمثلة باريتو بان يساوى السعر للتكلفة الحدية الاجتماعية لكل مالك وان هذه التكلفة الحدية الاجتماعية في تزايد ويضمن مساواة التكلفة الحدية الاجتماعية بالسعر بان RCS للمستهلك سوف لا يساوى RPT لكل

وحدة منفردة ولكن يساوي RPT للمجتمع لان نسبة التكاليف الحدية الاجتماعية تعمل على قياس البدائل الفاعلة بسبب انتاج وحدة اضافية من السلعة وذلك من وجهة نظر المجتمع .

افترض الان ان الوحدة I تمارس وفورات خارجيه وان الوحدة II تمارس زيادة فسي نفقات الانتاج فيترتب على ان $\partial C_1/\partial q_2 < 0$ وان $\partial C_1/\partial q_1 > 0$ ونتيجة لذلك فبان $\partial C_1/\partial q_1 + \partial C_1/\partial q_2$ في (١١-٣٧) يمكن جعلها لتساوي السعر فقط اذا كان $\partial C_1/\partial q_1$ اصغر من لواحقها كانت تحت حالة الحد الاقصى من الربح المنفردة . وبزيادة MC معنى ان الوحدة الانتاجية المصنبة في وجود زيادة النفقات للانتاج يجب ان تتسع مستوا من الخارج اقل للحصول على الحد الاقصى من الرفاهية منه في حالة الحد الاقصى الفرده وتعمل مثل ما في الوحدة المصنبة للوفورات الخارجيه يجب ان تزيد من خارجها ويمكن تحقيق هذه التغيرات في الخارج وذلك بغرض الضرائب العكاسية والتصحيحات لمستويات خارج للوحدة تحت البحث .

مثال : افترض ان دالتى التكلفة للوحدتين هما :

$$C_1 = 0.1q_1^2 + 5q_1 - 0.1q_2 \quad C_2 = 0.2q_2^2 + 7q_2 + 0.025q_1$$

فالوحدة I تمارس وفورات خارجيه وانها السبب في زيادة نفقات الانتاج والعكس صحيح للوحدة II افترض ان السعر = 15 ريال ويوصف مساويا لـ MC لكلا الوحدتين :

$$\begin{array}{lll} 15 = 0.2q_1 + 5 & q_1 = 50 & \pi_1 = 290 \\ 15 = 0.4q_2 + 7 & q_2 = 20 & \pi_2 = 17.5 \end{array}$$

ومن اجل اضمية باريتو تكون دالة الربح المشترك :

$$\pi = 15(q_1 + q_2) - 0.125q_1^2 - 5q_1 - 0.1q_1q_2 - 7q_2$$

ثم نضع الاشتقاق الجزئية مساويه لصفر :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 15 - 0.25q_1 - 5 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 15 - 0.20q_2 - 7 = 0$$

$$\pi = 360 \quad q_2 = 40 \quad q_1 = 40$$

وعلى القارىء ان يثبت تحقيق شروط الدرجة الثانيه فمجموع الانزاح في هذه الحالة اكبر من حالة الحد الاقصى المنفردة .

$$290 + 17.5 = 307.5 < 360$$

فالحصول على الحد الاقصى فى حالة الافراد يه لا يحقق اضلية باريتو ولا يعضها
 فاضلية باريتو تتطلب ان ال RCS يساوى المعدل الذى يستطيع هذه المجمع من
 تحويل سلعة الى سلعة اخرى ففى غياب التأثيرات الخارجية الوفورات والزادات فنان
 معدلات تحويل الانتاج الخاصة والاجتماعية تكون متطابقة اما فى حالة وجود هذه
 التأثيرات الخارجية (الوفورات وزيادة النفقات) فان الحصول على الحد الاقصى نفسى
 الحالات الافراد يه سوف ينتج عنه تحقيق الشروط الحد يه الخاطئة للمجمع والغير
 مناسبة .

وبالطبع فانه يجب اعادة توزيع اجمالي الارباح بين الوحدات منفردة وبدون اعادة
 التوزيع هذه فان بعض الوحدات سوف يمر بظروف تخفض من ارباحه وتكون النتيجة غير
 مرضية اجتماعيا ففى المثال الحالى ، تتحمل الوحدة I على 400 ريال بينما تتحمل
 الوحدة II على 40 - ريال كنتيجة للحصول على الحد الاقصى المشترك فاية اعادة توزيع
 لاى مبلغ اكبر من 57.5 ولكن اصغر من 110 من وحدة I الى وحدة II سوف يترك كل
 واحد منها احسن حالا من حالة الحصول على الربح منفردا .

TAXES AND SUBSIDIES

١١ - ٥ الضرائب والاعانات المالية

يحتوى الفصلان (١١-٣) و (١١-٤) على امثلة عديدة توضح الحالات التى
 يكون فيها اقتصاديات السوق قد حادت عن الشروط الحد يه الضرورية لاضلية باريتو
 فمثل هذه الاقتصاديات يمكن ان تقود الى اضلية باريتو وذلك من خلال فرض الضرائب
 المناسبة والاعانات المالية فالضرائب على كل وحدة Per unit taxes (او الاعانات)
 سوف تخفض (او تزيد) من مستويات النشاطات الاستهلاكية الانتاجية وذلك بزيادة
 (او بنقصان) تكلفتهم الحد يه هذا اذا كانت التكاليف الحد يه فى ازدياد فلورافق
 هذا ضرائب المرة الواحدة jump-sum taxes والاعانات ، والتي لا تؤثر على
 مستويات النشاطات فانه قد نستخدم لتوزيع المكاسب من التحرك فى اتجاه اضلية باريتو
 للتوزيع .

ان تحقيق اضلية باريتو من خلال فرض الضرائب تتمثل فى حالتين معينتين :
 التأثيرات الخارجية فى الانتاج والاحتكار . ولقد صممت الضرائب على الوحدات
 والاعانات لتقود المشتركين فى السوق لملاحظة الشروط الحد يه المرغوبة اما فرائض
 الدفعة الواحدة والاعانات فقد صممت لكى تترك المستهلكين والمنتجين عند النفع
 الاوليه ومستويات الربح ومن ثم اعبتا ان صافى ايرادات الضرائب الموجبة تعدنا بالموائد
 dividends الاجتماعية التى يمكن استخدامها لزيادة النفعة لفرد واحد أو أكثر .

من أفراد المجتمع

External Effects in Production

التأثيرات الخارجية في الإنتاج :

ان من الممكن تحقيق ايجابية باريتو في حالة وجود تأثيرات خارجيه وكذلك يفترض ان امانات مالیه للوحدات لزيادة خوارج الوحدات الانتاجيه العولده للمؤفورات الخارجيه ، وبفرض ضرائب لتخفيض الانتاج للوحدات التي تولد زياده في نفقات الانتاج والمعوود الى مثال الوحدات الانتاجيتين المقدم في الفصل ١١-٤ ايجابية باريتو تتمسدد بمساواة التكلفة الحديه الاجتماعية لكل وحدة بسعر التنافس .

$$0.25q_1 + 5 = 15 \quad q_1 = 40 \quad \pi_1 = 400$$

$$0.20q_2 + 7 = 15 \quad q_2 = 40 \quad \pi_2 = -40$$

افترض اننا فرضنا ضريبه مقدارها t على كل وحدة من وحدات خوارج الوحدة الانتاجيه I واننا فرضنا امانه مالیه قدرها s من الريالات لكل وحده من وحدات خوارج II افترض كذلك ان كل وحده من وحدات الانتاج تستمر بمساواة تكلفتها بما

الحديه الخاصه بسعر التنافس :

$$(38-11) \quad 0.2q_1 + 5 + t = 15 \quad 0.4q_2 + 7 - s = 15$$

فالضرائب والا امانات قد صحت لتحقيق ايجابية باريتو بالنسبه للخوارج وبتمويل $q_1 = 40$ و $q_2 = 40$ في (38-11) نجد ان القيم المناسبه للضريبه والا امانه العاليه هما : $t = 2$ و $s = 8$ وبفرض ضرائب الجمله L_1 و L_2 وكذلك لكي نترك ارباح الوحدات الانتاجيه عند مستوياتها الاولى :

$$L_1 = \pi_1 - \pi_1^* - tq_1^* = 30$$

$$L_2 = \pi_2 - \pi_2^* + sq_2^* = 262.5$$

وبما ان الارباح ستظل بدون تغيير ، فان مستويات المنفعة "لك الذين تعملوا على الارباح سوف لا تتغير بهذا التحرك نحو ايجابية باريتو ونعرف الموائد (الارباح) الاجتماعية *social dividend* بانها موائد الضريبه العالي :

$$S = tq_1^* - sq_2^* + L_1 + L_2 = 52.5$$

فهذه الموائد الاجتماعيه قد تستخدم لرفع مستويات المنفعة لمنواوا اكثر من اعضاء المجتمع .

Monopoly

الاحتكار :

امبر وجود اقتصاد يهيمن على محتكر واحد يقوم بانتاج السلعه المنتجه Q وانه

هو السبب الوحيد للانحراف من اقلية باريتو فتكون دالى الطلب والتكلفة لهذا المحتر

$$\text{كالآلى : } p = f(q), \quad C = C(q).$$

فيمكن تحديد سعره وخارجه الذى يحمل على الحد الاعلى من الربح وهما p^* و q^* وبساواة $MC \downarrow MR$:

$$(29-11) \quad p^* + q^* f'(q^*) = C'(q^*)$$

فيكون توازنه كما نصوره النقطة E فى الشكل (2-11) فنجد ان سعر المحتر يكون حاليا جدا وان الكمية التى ينتجها قليلة جدا لتحقيق اقلية باريتو لان سعر وكيفية اقلية باريتو $p^* q^*$ تتحدد ان وبساواة السعر و MC :

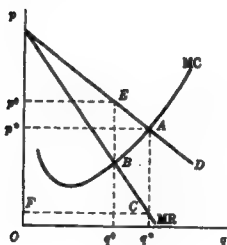
$$(30-11) \quad p^* = C'(q^*)$$

والى تحدث عند نقطة A فى الشكل (2-11) فالى انه مالى للمحتر سوف ترتفع من MR الخاص به وقد تستخدم لدفع لتوسيع خارجه الى المستوى المطلوب من اقلية باريتو . فيكون شرط التوازن العلام :

$$(31-11) \quad p^* + q^* f'(q^*) + s = C'(q^*)$$

ويحل (31-11) لقيمة s بالاستفادة من (30-11) وتعريف MR :

$$s = -q^* f'(q^*) = p^* - MR^*$$



شكل (3-11)

فالامانات العاليه المطلوبه تساوى الفرق بين السعر و MR وذلك عند خارج اقلية

باريتو ، وهى الصافه CA فى الشكل (2-11) فنحنى MR الفعال للمحتر سوف يتزحزح الى اعلى حتى يتقاطع مع منحنى الطلب الاصلى عند نقطة A .

ان مجموع الاثامه العاليه تعطيه مساحة المستطيل $FCAP^*$ في الشكل (١١-٣)
وتعطينا المساحه الواقعة تحت منحنى MC بين هذه الذواجر لزيادة في تكلفة المنتج
للتحرك من q^* الى q^0 اما الزيادة في ايراداته من المبيعات فانه تعطيه المساحه
المقابلـه الواقعة تحت منحنى MR والانخفاض في ربحه يكون ممثلا بالمساحه CAB والتي
تقع بين منحنى MC و MR وعلى وجه العموم •

$$\pi^0 - \pi^* = \int_{q^*}^{q^0} [f(q) + qf'(q) - C'(q)] dq$$

وبأضح من الشكل (١١-٣) ان الاثامه العاليه غرق الانخفاض في الربح بفرض ضربيه
الجملة المساوي للمساحه $FCBAp^*$ سوف يترك ربح المنتج عند مستواه العبدئي ومعبها
تكون ضريبة الجمله L_M كالتالى :

$$L_M = \pi^* - \pi^0 + sq^*$$

وتساوي التكلفة المافيه للتـحـرك في اتجاه خارج املطيه باريتو فوارق ربح المنتج
وسوف يظل العائد الاجتماعى مستترا اذا واصلنا الحصول على الضرائب من المستهلكين
بكميات اكبر بدون تخفيضات في المنفعة •

افترض ان مرونة الدخل لطلب السلعة تحت الاعتبار تساوى صفرا لكل مستهلك نفى
هذه الحالة سوف يطبق منحنى الطلب العساذى على منحنى الطلب التعمضى والذي
يعر من خلال نقطة توازن المنتج (راجع الفصل ٢-٣) وتعطى المساحه تحت منحنى
الطلب من q^* الى q^0 الكمية التى يستطيع المستهلك دفعها طالما يكون محافظا على
مستويات المنفعة التى حققها تحت حالة الاحتكار (راجع الفصل ٣-٢) وتعطى المساحه
المقابلـه تحت منحنى MR الكمية القمليه التى يدفعها للتـحـرك من q^* الى q^0 فالمساحه
الواقعة بين منحنى الطلب ومنحنى MR تكون هى مجموع ضرائب الجمله L_C التى يمكن
تحصيلها من المستهلكين وذلك بتركهم عند مستويات المنفعة العبدئيه •

$$L_C = \int_{q^*}^{q^0} [-qf'(q)] dq$$

ويكون العائد الاجتماعى المقابل هو صافى الضريبه المتحصل عليها من المستهلكين
والنتج :

$$S = L_C + L_M - sq^*$$

ولقد اخبت الشكل (١١-٢٣) أن العائد الاجتماعى يكون موجبا دائما في حالة
الاحتكار • وتعطى المساحه $BCAE$ ضرائب الجمله للمستهلكين وتعطى المساحه BCA
صافى الدافع المدفوع للمنتج • وتعطى المساحه BAE العائد الاجتماعى والذي يسمى
بعض الوقت " بخسارة الوزن الميت $dead-weight loss$ وذلك بسبب الاحتكار •

الاجتماعية فقد تكون الرفاهية الاجتماعية مؤشرا ترتيبيا ولكن الطافع الفردي يجب ان تكون قياسيه ولو بالمعنى انها فريدة ماعدا للاصل وقياس الوحدات فقط دالة الرفاهية الاجتماعية ليس فريدة ولكنها تمتد على التبعكات التقييمية لمن كونها فمكن اشتقاقها من الراى العام او يمكن فرضها بطريقة ديكاتوريه *

ففى هذا الفصل ، نستعرض اولا ، خواص الامثليات الاجتماعية بافتراض وجود دالة الرفاهية الاجتماعية ثم نستعرض ، ثانيا تحديد دوال الرفاهية الاجتماعية على ضوء نظرية Arrow impossibility theorem واخيرا نستعرض تحاليل المنفعة الشخصية الداخلية interpersonal utility لنقط معين لدالة الرفاهية الاجتماعية :

تحديد أمثلية الرفاهية : Determination of a Welfare Optimum

افترض انه يوجد دالة رفاهية اجتماعية على النقط العام *

$$W = W(U_1, U_2, \dots, U_n) \quad (٤٢-١١)$$

حيث ان U_i هي مؤشر مستوى المنفعة للمستهلك i ولنفترض ان المجتمع مكون من شخصين اثنين فقط ولها دالتى المنفعة :

$$U_1 = U_1(q_{11}, q_{12}, x_1^f - x_1) \quad U_2 = U_2(q_{21}, q_{22}, x_2^f - x_2)$$

حيث ان q_{ij} هي الكمية التى يستهلكها الفرد (i) من السلعة (j) وان x_i هي كمية العمل التى قام بها الفرد (i) . افترض ان دالة انتاج المجتمع هي :

$$F(q_{11} + q_{21}, q_{12} + q_{22}, x_1 + x_2) = 0 \quad (٤٣-١١)$$

وافترض اخيرا ان دالة الرفاهية الاجتماعية هي :

$$W = W(U_1, U_2) \quad (٤٤-١١)$$

يهدف المجتمع هو الحصول على الحد الاعلى من (٤٤-١١) تحت الشرط المعطى بالمعادلة (٤٣-١١) فتكون الدالة :

$$W^* = W[U_1(q_{11}, q_{12}, x_1^f - x_1), U_2(q_{21}, q_{22}, x_2^f - x_2)] \\ + \lambda F(q_{11} + q_{21}, q_{12} + q_{22}, x_1 + x_2)$$

وبوضع الاشتقاق الجزئية لهذه الدالة مساوية لصفر :

$$\frac{\partial W^*}{\partial q_{11}} = W_1 \frac{\partial U_1}{\partial q_{11}} + \lambda F_1 = 0$$

$$\frac{\partial W^*}{\partial q_{12}} = W_1 \frac{\partial U_1}{\partial q_{12}} + \lambda F_2 = 0$$

$$\frac{\partial W^*}{\partial x_1} = -W_1 \frac{\partial U_1}{\partial (x_1^f - x_1)} + \lambda F_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W^*}{\partial q_{21}} &= W_2 \frac{\partial U_2}{\partial q_{21}} + \lambda F_1 = 0 \\
\frac{\partial W^*}{\partial q_{22}} &= W_2 \frac{\partial U_2}{\partial q_{22}} + \lambda F_2 = 0 \\
(٤٥-١١) \quad \frac{\partial W^*}{\partial x_2} &= -W_2 \frac{\partial U_1}{\partial (x_1^0 - x_2)} + \lambda F_3 = 0 \\
\frac{\partial W^*}{\partial \lambda} &= F(q_{11} + q_{21}, q_{12} + q_{22}, x_1 + x_2) = 0
\end{aligned}$$

ويمكن افتراض ان النظام المعطى بالمعادلات السبعة في (٤٥-١١) يمكن ايجاد حل المتغيرات السبعة . فيمكن تحديد افضلية الرفاهية بصورة كاملة كنتيجة لتدبير التحكيمات الضميمة للتوزيع على شكل دالة الرفاهية الاجتماعية .^(١) ومن السهل اثبات ان توزيع الموارد الناتج يعثل افضلية باريتو فاذا حركنا الحدود الثانية للمعادلات الست الاولى في (٤٥-١١) الى اليمين ثم قسمنا المعادلة الاولى بالثانية والثالثة والرابعة والخامسة والسادسة على التوالي :

$$\frac{\partial U_1 / \partial q_{11}}{\partial U_1 / \partial q_{12}} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{\partial U_2 / \partial q_{21}}{\partial U_2 / \partial q_{22}} \quad \frac{\partial U_1 / \partial q_{11}}{\partial U_1 / \partial (x_1^0 - x_1)} = \frac{F_1}{F_3} = \frac{\partial U_2 / \partial q_{21}}{\partial U_2 / \partial (x_2^0 - x_2)}$$

فل RCS تكون هي نفسها لكل المستهلكين وتساوى RPT القابلة لها فالمعدل الذي يعرض به المستهلكون وقت الفراغ (ضد العمل) من اجل السلع يساوى MP للعمل . فهذا يثبت افضلية باريتو لو تحققت شروط الدرجة الثانية .

ما يفضلته المجتمع وما هو على سواء بالنسبة له :

Social Preference and Indifference

لقد بذل الاقتصاديون مجهودا طيبا في خلق ما يشبه منحنيات السواء الخاصة بالافراد لعائلة المجتمع . ولقد حاولوا في اشتقاق خطوط الارغافات المتساوية contour lines في فضاء السلع والذي يعثل مجموعات بدليه ومختلفة لكميات السلع بين المجتمع ككل . فنشتق خطوط الارغافات المتساوية لسبيتوفسكي Scitovsky contours كما يلي .

افتراض ان جميع الافراد يتمتعون بمستويات منفعة معينة وان خوارج جميع السلع ، ما عدا سلعة واحدة ، تكون عند مستويات معينة . ثم نحدد اصغر كمية من السلعة المتبقية والضرورية لمواجهة التحديدات السابقة . فالسالة الان هي الوضع الرياضي لاقتصاد يكون من شخصين وسلعتين ، ويمكن التعبير عنه بما يلي : نحاول الحصول على الحد الأدنى من : Minimize

$$q_{11} + q_{21}$$

وذلك تحت الشروط التالية :

$$U_1(q_{11}, q_{12}) - U_1^0 = 0$$

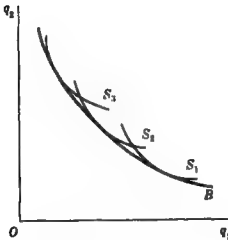
$$U_2(q_{21}, q_{22}) - U_2^0 = 0$$

$$q_{12} + q_{22} = q_2^0$$

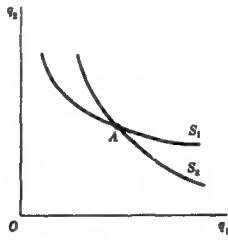
فيمكن حل هذه المسألة بتكوين الدالة التالية :

$$(٤٦-١١) \quad V = q_{11} + q_{21} + \lambda_1 [U_1(q_{11}, q_{12}) - U_1^0] + \lambda_2 [U_2(q_{21}, q_{22} - q_{12}) - U_2^0]$$

حيث أن λ_1 ، λ_2 هما مضروباً لا قرانج ويوضع الاشتقاق الجزئية بالنسبة الى q_{11} ، q_{12} ، q_{21} ، q_{22} ، λ_1 ، λ_2 مساوية لصفر ، نجد ان اجالي كمية Q_1 الادنى والضرورية لتحقيق شروط هذه المسألة تكون عامة محدد $determinate$ أي يمكن تحديد ها لانه لكل قيمة محتملة لـ q_1^0 فانه يوجد قيمة مثلى مخطفه لـ q_2^0 والتي يمكن تحديد ها فالمحل الهندسي لجميع النقاط (q_1^0, q_2^0) المحددة بنا* على قيم معطاة لـ U_1 ، U_2 تكون خطوط ارتفاعات سيتوفسكي* (١) فلو ان منحنيات السوا* للفرد كانت محده به ، فان خطوط سيتوفسكي سوف تكون هي الاخرى محده به ولكن هذه الخطوط لا تمثل منحنيات سوا* اجتماعيه كما قد تظهر من اشغالها فقط . وسوف نحصل على خطوط سيتوفسكي مخطفه تماماً هذا اذا كانت قيم U_1 و U_2 المحددة قد تغيرت . فلو اخذنا نقطة A على خطوط سيتوفسكي على سبيل المثال في الشكل (٤٦-١١) .



شكل (١١ - ٤٦)



شكل (١٢ - ٤٦)

(١) يمكن للقارئ ان يثبت ان النقاط الموجودة على خطوط ارتفاعات سيتوفسكي تمثل امثلية باريتو لتوزيع السلع وذلك بايجاد الاشتقاق الجزئية للمعادلة (٤٦-١١) .

فلأى نقطة على S_1 يجب أن تكون مجموعتي Q_1 و Q_2 موزعة بين المستهلكين بحيث أن I يتمتع بمستوى المنفعة U^1 وأن II يتمتع بمستوى المنفعة U^2 ولكن الكميات المطابقة لهذه النقطة A قد يمكن توزيعها بطريقة مختلفة بحيث ينتج عنها مستويين مختلفين للمنفعة وهما $U^{(1)}$ للمستهلك I و $U^{(2)}$ للمستهلك II ويتمام عملية الحصول على الحد الأعلى كما هو موضح بالمعادلة (٤٦-١١) لها عين القيمتين U_1 و U_2 فإننا نحصل على مجموعة نقاط جديدة والتي تصف خطوط ستيونسكي جديدة مطابقة لمستويات منفعة مختلفة خصصت للمستهلكين وهذه الخطوط الجديدة S_2 يجب أن يكون لها نقطة مشتركة مع S_1 عند نقطة A ، ولكن لا يوجد سبب واحد يدعوها لأن نتوقع أن الخططين S_1 و S_2 سوف ينطبقا على امتدادهما (أي تطابق تام) وعلى هذا فإن S_1 و S_2 إما أن يتقاطعا (كما حدث عند نقطة A في الشكل (٤٦-١١)) أو انهما يتصافيا وكلتا الحالتين لا تتشبه مع الخواص العادية لمنحنيات السواء ولا تنطبق عليها. ويمكن التخلص من تقاطع منحنيات سوا المجتمع وذلك من خلال تقديم عملية الاصلية optimization وهي عملية الحصول على الحد الأقصى أو الأدنى لشيء ما • لفترض أن دالة رفاهية المجتمع هي $W(U_1, U_2) = W^0$ في مجتمع مكون من شخصين اثنين فقط •

ثم نجد خطوط ستيونسكي المطابقة لجميع التوزيعات الخاصة بالمنفعتين (U_1, U_2) بحيث أن $W = W(U_1, U_2)$ وهذه الخطوط معروضة في الشكل ٤٦-١١ - فاقبل الأحاديثيات المطابقة لأي قيمة من قيم q_1 تمثل الكمية الأدنى لـ Q_1 والضرورية لتأمين مستوى الرفاهية W^0 للمجتمع ولذا فإن الغلاف B المحيى على خطوط ستيونسكي نفس الشكل (٤٦-١١) هو المحل الهندسي لمجموعات Q_1 و Q_2 الأدنى والضرورية لتأمين مستوى الرفاهية W^0 للمجتمع ويسمى خط بيرجسون *Bergson contour* •

ويمكن حل مشكلة إيجاد نقطة الرفاهية القصوى بطريقتين متطابقتين •

- (١) أن كل نقطة على دالة التحويل الإجمالي تعرف خليط من السلع التي يمكن الحصول عليها بالموارد المتوفرة حتى ولو امتزجنا فقط توزيعات أصلية بارتسبو للسلع فإن منحني اتفاقيه وعدد لا حصر له من الطرق يسمح بتوزيع المنفعة بين المستهلكين مطابقا لكل نقطة على دالة التحويلات الإجمالي • ثم نجد الطرق المحتملة لتوزيع المنفعة بين المستهلكين والمطابقة لجميع النقاط التي تحقق دالة التحويل ثم نختار من بين جميع توزيعات المنفعة هذا التوزيع الذي يكون عنده $W(U_1, U_2, \dots, U_n)$ عند قيمتها العظمى • ونحصل على الحل باختبار النقاط في فراغ المنفعة •
- (٢) نحدد جميع خطوط بيرجسون فكل واحد من هذه الخطوط يوافق مستوى رفاهية مختلف ثم نختار تلك النقطة على دالة التحويل الإجمالي التي تقع على أعلى

خطوط بيرجسون المحتملة وهذا يمكن الحصول على حل باختيار النقاط في فضاء السلعة . تطابق الطريقتين واضح من الحقيقة بأن كلاهما معادل لمطابقة الحصول على الحد الأعلى من $W(U_1, \dots, U_n)$ تحت الشروط المعطاه بدالة الانتاج الاجماليه .

نظرية أرو الاستحالية : The Arrow Impossibility Theorem

لقد بحث العالم أرو تكوين تفضيلات اجتماعيه وذلك بوصف تفضيلات المجتمع والفرد وذلك في حدود ترتيب الحالات البدليه الكونيه بالعلاقة انه مفضل على الاقل مثل . . (راجع الفصل ١-٢ "is at least as well liked as" فدوال رفاهيه المجتمع والمنطقه ماهي الاحالات خاصه لهذه العلاقة العامه .

توجد طرق عديدة لتكوين مايفضله المجتمع وذلك ما يفضل الفرد الواحد في المجتمع فقد يحدد مايفضله المجتمع ديكاتوراً ، او باغلبيه اصوات اعضاء المجتمع فمن الممكن تحديد مايفضله المجتمع بالصوت ويعتمد هذه الاصوات التي يدلى بها الفرد على حرف الهجاء الذي يبدأ به اسم مائتة . فالناس الذين يبدأوا اسم مائتهم بالحرف (ب) يكون لهم بالادلا بصوتين ، وهكذا فمن الواضح ان ليس جميع الطرق التي تؤدي الى مايفضله المجتمع صير مايفضله الفرد تكون متساويه في الرغبه والقبول او درجة المعقوليه . ولقد نص ارو خمسة بديهيات axioms . اعتقد ان تركيبات مايفضله المجتمع يجب ان تتحققا لطى ادنى درجة من درجات القبول وضع هذه البديهيات الخمس كما يلي :

(١) بديهية الترتيب الكامل : Complete ordering

وكما هو الحال في حالة الفرد ، فان مايفضله المجتمع يجب ان يخضع للترتيب الكامل وذلك من طريق العلاقة " انه مفضل على الاقل اجتماعيا مثل . . " ولذا يجب ان يحقق شروط التكامل completeness والانعكاس reflexivity والتعد transitivity (راجع الفصل ١-٢) فترتيب باريتو ، والذي ينص على التوزيع A يكون مفضلا اجتماعيا على التوزيع B اذا كانت مظعة شخص واحد على الاقل اكبر في A وان منفعة اى شخص اخر لم تنخفض ليست تناطيه ولهذا فانها لا تحقق هذه البديهه .

(٢) بديهية التجاوب لما يفضل الفرد : Responsiveness to individual preferences

افترض ان A تكون مفضله اجتماعيا على B وذلك لمجموعة معطاه مايفضله الفرد . فلوان الترتيبات الفرديه قد تغيرت بحيث ان فردا واحدا على الاقل فضل A بترتيب

أعلى مما سبق وأن احدا اخر لم يقلل من تربعه افضليه A فان A يجب ان تظل مفضلة اجتماعيا على B وهذه البديهية سوف لا تتحقق لو انه وجد بعض الافراد الذين يميزهم المجتمع تعصبا بحيث انه في حالة ان رغبهم لبعض البدائل قد ازدادت نسبته لبعض البدائل الاخرى فان افضلية المجتمع لذلك البديل المفضل من تلك الجماعة سوف تنخفض .

(٣) بديهية علم الديكتاتورية : Nondictatorship

ان افضليات المجتمع يجب ان لا تمكن افضليات شخص واحد فقط اي انه ليس بالصحيح ان ما يفضل المجتمع من تفضيل A على B اذا كان B اذا كان فقط ما يفضل الفرد i من تفضيل A على B فلوان هذه البديهية لم تتحقق فان الفرد i هذا لابد وان يكون ديكتاتورا .

(٤) بديهية علم فرض الرأى : Nonimposition

ان افضليات المجتمع يجب ان لا تفرض بدون الرجوع باستقلال الى افضليات الفرد . فلوانه لم يكن هنا فرد يفضل B على A ولكنه يوجد فرد واحد على الاقل يفضل A على B فان على المجتمع ان يفضل A على B وضمن هذه البديهية ان افضليات المجتمع تحقق تربع باريتو . د ع A تكون التوزيع بحيث ان ليس لاي عضو من اعضا المجتمع منفعة اقل من المنفعة الناتجة من i وان ضوا واحدا على الاقل من الاضعا يكون له مستويات اعلى . وتتطلب هذه البديهية ان المجتمع يفضل A على B .

(٥) بديهية استقلالية البدائل الغير وثيقة الصلة :

Independence of irrelevant alternatives

ان الحالة الاكثر غمضا بين مجموعة من البدائل يجب ان تكون مستقلة عن وجود البدائل الاخرى افتراضه في حالة توفر البدائل A, B, C فان المجتمع يفضل A على B على C فلوان C لم تكن متوفرة بعد ، فانه ليس صحيحا ان المجتمع متدلس سوف يفضل B على A .

ان بديهيات ارو تمكن احكاما تقبيعه ولكنها عبدا معقولة وجذابه بديهيا لمعظم الاقتصاديين ولكن لسوء الحظ . فان نظرية الاستحالة هذه تمنع على انه مائة ليس من المجتمع ايجاد افضليات مجتمع تحقق الخس بديهيات جميعا . (١) هناك بعض

(١) ان اثبات نظرية الامكانية possibility theorem تعتمد على بديهيات متقدمة ولكن يوجد اثبات بديهي معطى بـ :

$$(c_{\lambda+1}) \quad W = \sum_{i=1}^{\lambda} U_i$$

حيث ان مؤشرات المنفعة القياسية سوف تكون موجبه بانضباط فمن الممكن اشتقاق بعض الخواص من (٤١١) ولكن التحاليل الكاملة سوف تتطلب مواصفات المؤشرات المنفعة الفردية فاحد الاحتمالات هو ان ندع كل منفعة فردية ان تكون دالة خطيه ومتجانسة وبدلالة الدخل .

$$(٤١١) \quad U_i = \beta_i y_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

حيث ان β_i هي المنفعة الحدية الموجبه الثابته للمستهلك i والتي تعكس طاقة المستهلك i للاستمتاع بدخله وتمويض (٤١١) في (٤١١) فان هذا سوف يسمح لرغاهيه المجتمع في ان يعبر عنها بدلالة مستويات الدخل الفردية:

$$(٥٠١١) \quad W = \sum_{i=1}^n \beta_i y_i^2$$

وللتبسيط افترض وجود دخل بحجم معين y^0 وانه يجب توزيعه اما عند قيم الانتاج ودوافع الانتاج فانها تركت كمترين للقارى .

الان نوزع الدخل للحصول على الحد الاعلى من الرغاهيه الاجتماعيه تحت شرط العزائيه الاجماليه ثم نكون دالة لا قرايج التاليه :

$$L = \sum_{i=1}^n \beta_i y_i^2 + \delta \left(y^0 - \sum_{i=1}^n y_i \right)$$

وبمع اشتقاقها الجزئيه مساويه لصفر فان:

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = 2\beta_i y_i - \delta = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta} = y^0 - \sum_{i=1}^n y_i = 0$$

فتكون بذلك قد ساويتا بين رغاهيه المجتمع الحديه للدخل لكل فرد بـ δ ونغييسم متطلبات الحد الاصغر الرئيسى الاول لشروط الدرجه الثانيه .

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y_2^2} = \alpha(\alpha-1)(\beta_1^2 y_1^{\alpha-2} + \beta_2^2 y_2^{\alpha-2}) < 0$$

حيث انها تتحقق فقط لـ $0 < \alpha < 1$ ولهذا فان شروط الدرجه الثانيه تتطلب بان تكون (٥٠١١) دالة مقعرة بانضباط لمستويات الدخل الموجبه .

وبالرغم من ان قيم α خارج مجال الوحدة المفتوح open unit interval ممكنه (راجع التمرين ١٢١١) فان التركيز هنا سوف يكون محدد القيم التي تقع ضمن هذا المجال . فاننا كانت قيم β هي نفسها لجميع المستهلكين فان مساواة الدخسل تتحقق لاي قيمة من قيم α ضمن هذا المجال . فلوان قيم β اختلفت فان درجه مساواة الدخل ستكون بمعلقة عكسيه بـ α وبحل شروط الدرجه الاولى المناسبه لقيم

$$y/y_j$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

فكلما اقتربت α من صفر $\alpha \rightarrow 0$ فإن (y_1/y_2) سوف تقترب من (١)
 $(y_1/y_2) \rightarrow 1$ وهذه هي حالة مساواة الدخل الكاظم ، اما كلما اقتربت α من (١)
 $\alpha \rightarrow 1$ فإن (y_1/y_2) سوف تقترب من صفر $(y_1/y_2) \rightarrow 0$ او ∞ وهذا يعتمد
 على ما اذا كانت β_1 اقل من واكبر من β_2 .

اعتبر مثال الشخصين بحيثان: $U_1 = 2y_1$ وان $U_2 = y_2$ وهذا يعنى ان ريالاً
 من الدخل للمستهلك I سوف يعطيه ضعف المنفعة التى يعطيها ريالاً للمستهلك
 II. ففى هذه الحالة .

$$\frac{y_1}{y_2} = 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{and} \quad y_1 = \frac{2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1 + 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} y^0$$

فالمستهلك I يستلم 89 فى المائة من اجمالى الدخل اذا كانت $\alpha = 0.75$ ويستلم
 67 فى المائة اذا كانت $\alpha = 0.5$ ويستلم 56 فى المائة اذا كانت : $\alpha = 0.25$
 ويستلم 50.2 فى المائة اذا كانت : $\alpha = 0.01$.

١١ - ٧ نظرية الثانى فى ترتيب الأفضلية

THE THEORY OF SECOND BEST

ان من الممكن تحقيق ما اذا اجتماعاً موجهاً وذلك بالتحرك من توزيع باريتو الغير امثل
 الى توزيع باريتو الامثل . ولهذا فانه دائماً نعتبر تحقيق شروط باريتو بمثابة الهدف
 الاجتماعى الذى نسعى اليه فى أى حركة نقوم بها . فقد يحدث ان شرطاً او اكثر من
 شروط باريتو لن يتحقق بسبب الضوابط التأسيسية او الانشائية فلا يمكن الحصول على الوضع
 الافضل للرفاهية فى هذه الحالة ولذا فانه من المهم جداً البحث عما اذا كان ممكن
 الحصول على وضع ثانى فى الافضلية وذلك بتحقيق شروط باريتو المتبقية وتنسى
 نظريات الثانى فى الافضلية على انه لا : اذا كان شرطاً او اكثر من الشروط الضرورية
 لا مطية باريتو لم يتحقق . وسواء فانه ليس ضرورياً ولا مرغوباً ان نحقق الشروط المتبقية .

ونوضح المعوقات الهامة لنظرية الثانى فى الافضلية لنظام بسيط مكون من مستهلك
 واحد ودالة انتاج فنية واحدة وعدد n من السلع وكيفية فرض ثابته لاحد العوامل
 الأولية الغير مرغوبة من المستهلك فننتج هذا النظام يمكن تعميمها لتفعل النظام
 الاكثر كمالاً والقدرة فى الفصل (١١ - ١) ويمكن الحصول على الشروط الضرورية لا مطية
 باريتو وذلك بالحصول على الحد الاطلى من منفعة المستهلك تحت شرط دالة الانتاج ثم
 تكون دالة الانتاج التالية :

$$L = U(q_1, \dots, q_n) - \lambda F(q_1, \dots, q_n, x^0)$$

وبوضع اشتقاقاتها الجزئية مساوية لصفر :

$$(٥١-١١) \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = U_i - \lambda F_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

حيث ان : $U_i = \partial U / \partial q_i$ وان : $F_i = \partial F / \partial q_i$ فنتبع ان :

$$(٥٢-١١) \quad \frac{U_i}{U_j} = \frac{F_i}{F_j} \quad i, j = 1, \dots, n$$

فلو تحققت (٥١-١١) فان RCS لكان زوج من السلع سوف يساوي RPT المقابل افترض ان الشروط التأسيسية مآقت الحصول على أحد شروط (٥١-١١) وليكن الشرط الاول .
فيمكن التعبير عن الفشل في تحقيق هذا الشرط بطرق متعددة فاحد أبسط هذه الطرق هو افتراض ان :

$$(٥٣-١١) \quad U_1 - k F_1 = 0$$

حيث ان k هي ثابت موجب مختلفا من قيمة λ المثل والمعطاه من حل (٥١-١١) وحل دالة الانتاج .

ويمكن الحصول على شروط الثاني في الانفليه بالنسبه للرفاهيه بالنسبه المثل وذلك بالحصول على الحد الاعلى من المنفعة تحت شروط دالة الانتاج الاجماليه وكذلك (٥٣-١١) ثم تكون دالة لاقتران .

$$L = U(q_1, \dots, q_n) - \lambda F(q_1, \dots, q_n, x^0) - \mu (U_1 - k F_1)$$

حيث ان λ و μ هما مضروبا لاقتران الغير محددة وبوضع اشتقاقاتها الجزئية مساوية لصفر :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = U_i - \lambda F_i - \mu (U_{1i} - k F_{1i}) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$(٥٤-١١) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -F(q_1, \dots, q_n, x^0) = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \mu} = -(U_1 - k F_1) = 0$$

فأى حل لهذا النظام لا يمكن ان يكون له $\mu = 0$. ويتحرك الحدين الآخرين في كل معادلة من معادلات (٥٤-١١) الى الجانب الايمن ثم قسمة المعادلة i بالمعادلة j :

$$(٥٥-١١) \quad \frac{U_i}{U_j} = \frac{\lambda F_i + \mu (U_{1i} - k F_{1i})}{\lambda F_j + \mu (U_{1j} - k F_{1j})} \quad i, j = 1, \dots, n$$

ومرورا فاننا لانعرف شيئا مسبقا عن اشارات الاشتقاقات الجزئية المتداخلة ولهذا فانه لا يتوقع صوما ان نطلب شروط باريتو الاعداديه للحصول على اظلية الثاني في الانفليه .

ولقد استخدمت نظريات الثاني في التفاضلية للتساؤل عن الرغبة في سياحات التوازن الجزئي والتي قد تستخدم في الحصول على شروط باريتو على أساس التجزئته وذلك للأسواق المعتمده في انتمزال فالتقيض المضاد لهذا هو انه بالرغم من ان سياسته التجزئيه لا تتحقق صوما الا انها تتحقق لكثير من الحالات المعنيه فعلى سبيل المثال، افترض ان السلع الموجوده قد رقت بحيث ان انتهاكات حرمة باريتو في الاستهلاك محددة على السلعه Q_i $1 \leq i \leq k$ وتكون انتهاكات حرمة باريتو في الانتاج محددة على السلعه Q_i $1 \leq i \leq k$ فاذا كانت دالتى المنفعة والانتاج بحيث انهم $weakly separable$ (راجع الفصل ٢-٣) :

$$U = U[U_1(q_1, \dots, q_k), U_2(q_{k+1}, \dots, q_n)] \\ F[F_1(q_1, \dots, q_k), F_2(q_{k+1}, \dots, q_n, x^*)] = 0$$

فكون شروط باريتو (٢-١١) محققه لجميع السلع ذات الموشى $i > \max(k, k)$ وتكون التحاليل الجزئيه محققه لهذه السلع.

فالعمودين لسياسة التجزئه يناقشوا بان شروط باريتو تعطى ارشادات معقولة للسياسة الى Q_i $i=1, \dots, k$ اذا كانت Q_i قريبه جدا من سلمه لم تتحقق فيها شروط باريتو اعتبر الان اشتقاق q_i في (٢-١١) فالحد داخل القوس يعكس تاثير انتهاك حرمة شرط باريتو فلو كان هذا الحد صغيرا نسبة الى الحدود الاخرى ، فانه يمكن مناقشة ان الشرط المنتهك حرمة قد يهمل عند تكوين سياسة الى Q_i .
فالبيان ومربات السك الحديدى على سبيل المثال تكون مقاربه بنسبة بعيدة جدا نفس الاستهلاك والانتاج ولهذا فان السياسة لصناعة مربات السك الحديدى يجب الا تتاثر بالتفاضل الصغير كامل في صناعة اللبان .

١١ - ٨ ملخص ما سبق

الفرض من اقتصاديات الرفاهيه هو قياس الرغبه الاجتماعيه للشرائح المختلفه للموارد (الشروات) . وفي حالة عدم وجود قيمة مركبه (معقده) للحكم فيما يختص بالرغبه للتوزيعات المختلفه للدخول ، فان الحكم بالقيمه الفرده (الواحد) يعنى ان نعتبر انه يمكن تقديم اعادة تقسيم لاحداث التحسن في الرفاهيه اذا ما جعلنا فرد واحد على الاقل يتحول الى الاحسن دون احداث أى سوء لائى فرد آخر . واذا ما أمكن اعادة تقسيم الشروات دون الاضرار على الاقل بفرد واحد ، فان التقسيم الموجود في هذه الحاله يسمى بالوضع الامثل لباريتو . وتتطلب الشروط ذات الوجه الاولى لوضع باريتو الامثل :

- ١- ان يتساوى RCS لكل مستهلك و RPT لكل منتج لكل زوج من السلع .
 - ٢- ان يتساوى RCS لكل مستهلك و RTS لكل منتج لكل زوج من العوامل الاولى .
 - ٣- RCS لكل مستهلك و MP لكل منتج لكل زوج من العامل - السلعة .
- وتتوفر ايضا الشروط ذات الدرجة الثانية في الموضوع الامثل لباريتو .

ينتج التفاضل التام عادة من تحقيق (عوفر) الشروط ذات الدرجة الاولى للوضع الامثل لباريتو . ويمثل التفاضل التام من هذا المفهوم وضع أمثل للرفاهية . وهي لاضمن توفّر (تحقيق) الشروط ذات الدرجة الثانية ، كما لاضمن ان يكون توزيع الدخل أمثل بأي مفهوم . بالاضافة لهذا ، يترك تعريف الرفاهية المطبق بدلالة الوضع الامثل لباريتو كفيه معينه من المفوض في التحليل ، ان ان كل نقطة على منحنى العقد تكون في الوضع الامثل لباريتو ، ولا يستطيع الانسان ان يختار من بينها بدون شواهد اضافية اخلاقيه .

سوف يؤدي التفاضل الناقص (الغير تام) من المستهلكين أو المنتجين بصورة عامة الى انتهاء رد الشروط ذات الدرجة الاولى لاملية لباريتو . حتى اذا كانت RCS للمستهلكين تساوي بالصدفة RPT للمنتجين لكل السلع ، فسوف نظل غير متصلين الى املية لباريتو نتيجة للتباين بين RCS للمستهلكين والسلع والعمل والمعدلات المقابلة لتحويل المنتجين الجهد الى سلع .

يجب تعديل الشروط ذات الدرجة الاولى لاملية لباريتو في وجود تأثيرات خارجية في الاستهلاك او في الانتاج . وعادة لن يؤدي التفاضل التام الى املية لباريتو اذا وجدت تأثيرات خارجية .

لن يؤدي جودة RCS الى املية لباريتو اذا كانت الدوال الفائدة مرتبطة داخليا؛ تتطلب املية لباريتو ان يكون مجموع RCS للمستهلكين بين السلع الشائعة والسلع الاعتيادية مساوية للقيم المناظرة لـ RPT لكل منتج ويمكن استخدام جدول معين للتسمير للسلع الشائعة لكي نصل الى اتزان لنداهل Lindahl في الاسواق الزائفة لمثل هذه السلع . يجب ان يتساوى السعر مع MC الاجتماعي للنسبة MC الخاص اذا كانت هناك تأثيرات خارجية في الانتاج .

يمكن عادة تصميم نظم الضرائب والمعونات العاليه بحيث تعمل بإقتصاد السوق من تقسيم غير أمثل لباريتو الى تقسيم أمثل . يمكن استخدام وحدات الضرائب والمعونات العاليه لكي تجعل المشترين بالسوق يلاحظون الشروط الهامشية المناسبة ، واجمالي مجموع الضرائب والمعونات يستخدم لكي تؤمن توزيع الدخل المطلوب .

ويمكن إزالة الضموض المصطفى في تحليل أمثلية باريتو بادخال دالة الرفاهية الاجتماعية والتي تنص على تفضيل المجتمع لتوزيع معين للربح بين الافراد بالتفضيل • ويوجد العديد من دوال الرفاهية الاجتماعية تعبر كل منها عن تقييم المجموعات المختلفة من الناس (الشعب) • وتعين الرفاهية المثلى بتحويل دالة الرفاهية الاجتماعية الى فراغ السلعة ويجاد النقطة على دالة التحويل والتي تقع على اعلى محيط بهرجسون تتكون عادة مثل هذه الرفاهيات المثلى عبارة عن أمثليات باريتو • وتسمى نظريسة أو الاستحالية على انه في العادة ما يكون مستحيلا أن تبنى أفضلية اجتماعية من افضليه فردية بدون تحطيم واحد أو أكثر من البديهييات الخمس والتي يعتقد معظم الاقتصاديون وجوب توافرها في الافضلية الاجتماعية •

تنص نظرية المفاضل الثاني على انه اذا لم يكن ممكنا تحقيق واحد أو أكثر من شروط الدرجة الاولى للأمثلية باريتو بسبب قيودا مؤسسية ، فعادة ما لا يكون مرغوبا ولا ضروريا في تحقيق بقية شروط باريتو • استخدمت هذه النظرية في اختيار رغبة السياسات نفس الحصول على شروط باريتو على اساس تدرجيه •

$$\frac{\partial U/\partial q_1}{\partial U/\partial q_3} = k \frac{\alpha_1}{\alpha_3}$$

where $k \neq 1$. Find second-best values for q_1 , q_2 , and q_3 as functions of k .

SELECTED REFERENCES

- Arrow, K. J.: *Social Choice and Individual Values* (New York: Wiley, 1951). A treatise on the problems of constructing a social welfare function. Difficult for those unfamiliar with the mathematics of sets.
- Bator, F. M.: "The Simple Analytics of Welfare Maximization," *American Economic Review*, vol. 47 (March, 1957), pp. 22-59. A geometric exposition of some fundamental results of welfare economics.
- Baumol, W. J.: *Welfare Economics and the Theory of the State* (2d ed., London: G. Bell, 1965). Contains a discussion of the welfare implications of perfect competition and monopoly and an analysis of some of the nineteenth-century literature on welfare. Mathematics is in appendices.
- Bergson, A.: "A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics," *Quarterly Journal of Economics*, vol. 52 (February, 1938), pp. 310-334. Also reprinted in R. V. Clemence (ed.), *Readings in Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1950), vol. 1, pp. 61-85. The first modern mathematical treatment of welfare economics.
- Davis, Otto A., and Andrew B. Winston: "Welfare Economics and the Theory of Second Best," *Review of Economic Studies*, vol. 32 (1965), pp. 1-14. Discusses situations in which the Pareto conditions are valid for second-best optima. Calculus is used.
- Graaff, J. de V.: *Theoretical Welfare Economics* (London: Cambridge, 1957). A treatise on welfare incorporating some modern theories. The mathematics is in appendices.
- Harberger, A. C.: "Three Basic Postulates for Applied Welfare Economics: An Interpretive Essay," *Journal of Economic Literature*, vol. 9 (September, 1971), pp. 785-797. A mostly nonmathematical argument for using changes in consumer surplus as measures of welfare change.
- Lipsey, R. G., and Kelvin Lancaster: "The General Theory of Second Best," *Review of Economic Studies*, vol. 24 (1956-1957), pp. 11-32. The first formal statement of the theory of second best. Calculus is used.
- Quirk, James, and Rubin Saposnik: *Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics* (New York: McGraw-Hill, 1968). A modern treatment of welfare economics is presented in chap. 4. Advanced mathematical concepts are simplified and developed in the text.
- Roberts, D. J.: "The Lindahl Solution for Economies with Public Goods," *Journal of Public Economics*, vol. 3 (February, 1974), pp. 23-42. An advanced discussion of the existence of Lindahl equilibria.
- Samuelson, Paul A.: *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard, 1948). Chap. VIII contains a discussion of the social welfare function and the conditions for maximum welfare. The mathematics is mostly incidental.
- Samuelson, Paul A.: *Collected Scientific Papers*, ed. by J. E. Stiglitz (Cambridge, Mass.: M.I.T., 1966), 2 vols. The utility feasibility function is developed in chap. 77, and public goods are covered in chaps. 92-94. Geometry and calculus are used.
- Scitovsky, T.: "A Reconsideration of the Theory of Tariffs," *Review of Economic Studies*, vol. 9 (1941-1942), pp. 89-110. Also reprinted in American Economic Association, *Readings in the Theory of International Trade* (New York: McGraw-Hill, 1949), pp. 358-389. The concept of Scitovsky contours was introduced and applied to international trade theory in this article.
- Sen, A.: *On Economic Inequality* (Oxford: Clarendon Press, 1973). A modern and sophisticated discussion of welfare theory employing only little mathematics.

EXERCISES

11-1 Consider a two-person, two-commodity, pure-exchange economy with $U_1 = q_1^{\alpha} q_{12}$, $U_2 = q_2^{\beta} q_{22}$, $q_{11} + q_{21} = q_1^0$, and $q_{12} + q_{22} = q_2^0$. Derive the contract curve as an implicit function of q_{11} and q_{12} . What condition on the coefficients α and β will ensure that the contract curve is a straight line?

11-2 An economy satisfies all the conditions for Pareto optimality except for one producer who is a monopolist in the market for her output and a monopsonist in the market for the single input that she uses to produce her output. Her production function is $q = 0.5x$, the demand function for her output is $p = 100 - 4q$, and the supply function for her input is $r = 2 + 2x$. Find the values of q , x , p , and r that maximize the producer's profit. Find the values for these variables that would prevail if she satisfied the appropriate Pareto conditions.

11-3 Consider a two-person, two-commodity, pure-exchange economy with $U_1 = q_1^{\alpha} q_{12} q_2^{\beta}$, $U_2 = q_2^{\gamma} q_{22}$, $q_{11} + q_{21} = q_1^0$, and $q_{12} + q_{22} = q_2^0$. Derive the contract curve of Pareto-optimal allocations as an implicit function of q_{11} and q_{12} . How does this differ from the contract curve for Exercise 11-1? Under what conditions will the two curves be identical?

11-4 Consider an economy with two consumers, two public goods, one ordinary good, one implicit production function, and a fixed supply of one primary factor that does not enter the consumers' utility functions. Determine the first-order conditions for a Pareto-optimal allocation. In particular, what combination of RCSs must equal the RPT for the two public goods?

11-5 Construct excess demand functions for the two goods of the Lindahl-equilibrium example given by (11-27) through (11-35), and solve these functions to obtain the equilibrium solution.

11-6 Assume that the cost functions of two firms producing the same commodity are

$$C_1 = 2q_1^2 + 20q_1 - 2q_1q_2 \quad C_2 = 3q_2^2 + 60q_2$$

Determine the output levels of the firms on the assumption that each equates its private MC to a fixed market price of 240. Determine their output levels on the assumption that each equates its social MC to the market price.

11-7 Determine taxes and subsidies that will lead the producer described in Exercise 11-2 to a Pareto-optimal allocation and leave her profit unchanged.

11-8 Determine taxes and subsidies that will lead the firms described in Exercise 11-4 to their Pareto-optimal output levels but leave their profits unchanged. What is the size of the social dividend secured by this change in allocation?

11-9 Consider an economy with two commodities and fixed factor supplies. Assume that the social welfare function defined in commodity space is $W = (q_1 + 2)q_2$ and that society's implicit production function is $q_1 + 2q_2 - 1 = 0$. Find values for q_1 and q_2 that maximize social welfare.

11-10 Assume that there are two consumers and two commodities. Let the utility functions be $U_1 = q_{11}q_{12}$ and $U_2 = q_{21}q_{22}$ with $q_{11} + q_{21} = q_1^0$ and $q_{12} + q_{22} = q_2^0$. Show that Scitovsky contours are given by $q_1q_2 = (\sqrt{U_1} + \sqrt{U_2})^2$.

11-11 Consider a society of n individuals and m alternatives with the following preference structure. Each individual ranks the alternatives from 1 through m in decreasing order of preference. The ranks are summed over individuals, and the alternative with the smallest sum is chosen. Verify that the first four of the Arrow axioms are satisfied by this method of social choice, and that the axiom of the independence of irrelevant alternatives is not.

11-12 Determine the consequences of distributing a given income to maximize the social welfare given by (11-50) in each of the following cases: (a) $\alpha < 0$, (b) $\alpha = 0$, and (c) $\alpha \geq 1$.

11-13 Consider a simplified economy with one consumer, one implicit production function, three commodities, and a fixed supply of one primary factor where

$$U = q_1q_2q_3 \quad a_1q_1 + a_2q_2 + a_3q_3 - x^0 = 0$$

Find values for q_1 , q_2 , and q_3 that maximize utility subject to the production function. Assume that institutional constraints result in a violation of one of the Pareto conditions so that

الفصل الثاني عشر

تحقيق الأمثلية عبر الزمن

OPTIMIZATION OVER TIME

ان نظريات الاستهلاك والانتاج التي طرحتها في الابواب السابقة غطت على عملية تحقيق الامثلية لفترة زمنية واحدة • ففي تحاليل المدى القصير افترض ان اصحاب الوحدات الانتاجية يمتلكون ممانع بحجم ثابت • ولكن ابعد من هذا قرارات تحقيق الامثلية للوحدات لفترات زمنية لاحقة قد افترض انها مستقلة فالمستهلك يصرف دخله كاملا خلال الفترة الزمنية الجارية (الحالية) ويحقق الحد الاعلى من مستوى موثر منفعة خلال الفترة الحالية والمعرفة فقط للسلع المستهلكة خلال هذه الفترة فقط • وبالمثل فان دالة انتاج مالك الوحدة الانتاجية تعكس العلاقة بين الداخلى والخارج خلال الفترة الجارية وانه يحقق الحد الاعلى من ربحه للفترة الحالية •

ففي الباب الحالى نقدم عامل الزمن Time في حدود الوضع المتصل والوضع المنفصل discrete and continuous وسوف نعريف دوال الانتاج والمنفعة ذات الفترات الزمنية المتعددة Multiperiod ثم نوسع نظريات الاستهلاك والانتاج ذات الفترة الزمنية الواحدة single-period لتغطي تحقيق الامثلية من خلال افاق زمنية مكونة من T فترة زمنية T -period horizons وتقدم عامل الزمن هذا سوف يصحبه عدد من الافتراضات التبسيطية • فعامل الزمن سوف يقسم الى فترات باطوال متساوية ونفترض ان الصفقات التي تتم في السوق تكون محدده على اليوم الاول من كل فترة • وفي خلال الايام المتبقية من كل فترة زمنية فان المستهلك سوف يقوم بعرض العوامل التي سوف يبيعها وسوف يستهلك السلع التي قد اشتراها ويقوم ملاك الوحدات بتطبيق الداخلى التي قاموا بشرائها وينتجون السلع التي يريدون بيعها في الفترة الزمنية القادمة للسوق •

فمنصرفات المستهلك الحالية لن تكون محدده بشرط العيزانية ذا الفترة الزمنية الواحدة فقد يصرف اكثر او اقل من دخله الجارى ويقترض او يقترض الفرق وكذلك الملاك لهم الخيار في الافتراض والاقتراض •

ان تقديم عامل الزمن المتصل سوف يسمح بتحليل المشاكل التي يكون فيها عامل الزمن متغيراً ذو صلة وثيقة بالمشكلة نفسها ، مثل تحديد العمر الأمثل لقطعة في جهاز من الاجهزة التي تدوم طويلا *durable equipment* .

ففي التحاليل ذات الطابع الزمني المتصل ، نفترض ان الصفقات التي تتم في السوق سوف تتخذ عند أي نقطة من الزمن .

فسوق السندات *bond market* ومفاهيم الارباح المركبة *compounding* والتخفيضات والتخفيضات *discounting* سوف تناقش في الفصل ١٢-١١ اما الفصل ١٢-٢ فانه يحتوي على توسيع نظرية المستهلك لتغطي حالة تعدد الفترات الزمنية مع اعتبار التفضيل الزمني *time preference* وتأثيرات معدلات الربح على منصرفات الاستهلاك عبر الزمن ويحتوي الفصل ١٢-٣ على مناقشة كيف يتم توسيع نظرية الانتاج لتغطي حالة تعدد الفترات الزمنية ويعطى الفصل ١٢-٤ توازن سوق السندات ويحدد معدل الفائدة (الربح) وتناقش في الفصل ١٢-٥ التخفيضات المتواصلة ومعايير تحقيق الامثلية .

وسوف يكون موضوع الفصل ١٢-٦ هو سحب وإبدال الاجهزة التي تدوم طويلا وتغطي باختصار الموارد المستنفذة *Exhaustible resources* في الفصل ١٢-٧ اما في الفصل الاخير ١٢-٨ فاننا سوف نعالج موضوع الاستثمار في رأس المال البشري *human capital*

١٢ - ١ الأفكار أو المفاهيم الأساسية : BASIC CONCEPTS

تتطلب تحاليل الفترات الزمنية المتعددة تقديم مفاهيم جديدة منفردة وذلك لوصف الطرق وتكاليف الاقتراض والاقتراض .

سوق السندات : The Bond Market

نقدم الاقتراض والاقتراض مع الاقتراضات التبسيطية التالية :

- (١) للمستهلكين والمالكين الحق في الدخول في عقود الاقتراض وذلك في اليوم الاول فقط من كل فترة زمنية .
- (٢) يوجد اداة وحدة فقط للاقتراض : السندات لفترة زمنية واحدة فقط .
- (٣) يكون سوق السندات تنافسيا كاملا .
- (٤) المقترضون يبيعون السندات لمن يريد ان يقتض وذلك مقابل كميات معينة من قسوة الشراء الجارية . وذلك على صورة نقود . حماهه *money of account* .
- (٥) القروض رائدا رسوم الاقتراض سوف تدفع بدون تاخير (او عدم أيها) في فترة السوق التالية .

وهذه الافتراضات تمثل تبسيطات شديدة لواقع أسواق الدين (الخصيصة) credit ولكنها تسمح باشتقاق نتائج أساسية يمكن توسيعها لتغطي أسواق أكثر تعقيدا . فكل واحد من الافتراضات السابقة يمكن تعديله لتوسيع قاعدة وتغطية التحاليل فالافتراض (١) يتبع من تعريف الزمن المنفصل المسطوح منه في تحاليل الفترات الزمنية المتعددة .

وهذا الافتراض قد عدل في الفصل ١٢-٥ ويمكن تعديل الافتراض (٢) بافتراض وجود أنواع مختلفة من ادوات الدين ، مثل اوراق الوعود ووثائق رهن العقارات بفترات زمنية مستحقة مختلفة ويمكن تبين (٣) بالرجوع الى تحاليل العناصر الغير كاملة . ويمكن كذلك تعديل الافتراضين (٤) و (٥) بعدد من الطرق .

د ع b_t تكون وضع شخص ما بالنسبة للسندات عند نهاية فترة المتاجرة في اليوم t من ايام السوق فاشارة b_t ظهر احميه ما اذا كان هذا الشخص مقرضا او مقرضا . فاذا كانت $b_t < 0$ فان هذا الشخص يكون مقرضا مع وجوب دفع السندات ، وانه يجب عليه ان يقوم بدفع b_t ريال زائدا رسم الافتراض المناسب في وقت السوق الـ $(t+1)$ الاول فاذا كانت $b_t > 0$ فان هذا الشخص يكون مقرضا حاصلا على سندات الاخرين وسوف يستلم b_t ريال زائدا رسم الافتراض المناسب في وقت السوق الـ $(t+1)$ الاول .

وبما ان رسوم الافتراض المناسبة قد عبر عنها ايضا في حدود النقود الحسابية لذا فانه قد تذكر كسب من المقادير المقرضة في اليوم $(t+1)$ الاول من السوق يجب على المقرض ان يدفع $(1+b_t)$ ضرب المقدار المقرض في اليوم t فبالنسبة b_t تكون هي معدل فائدة السوق التي تربط بين اليوم t واليوم $(t+1)$ فمعدلات الفائدة يعبر عنها دائما كنسب مئوية . فلو كان معدل الفائدة هو b_t فان رسم الافتراض سيكون $100b_t$ في المائة من المقدار المقرض . فعلى سبيل المثال ، يكون رسم الافتراض هو خمسة في المائة اذا كانت $b_t = 0.05$.

Market Rates of Return

معدلات دخل (عائد) السوق :

ان الاشخاص الذين يرغبون في الاقتراض لمدة زمنية تزيد عن فترة واحدة يستطيعون بيع سندات جديدة على ازمته سوقه متتالية لرد (توفية) المبلغ الرئيسي والفائدة عليه وبالمثل فان باسطة المقرضون اعادة استثمار دخلهم الرئيسي والفوائد العائد لهم . اعتبر حالة الفرد الذي يستثمر b_t من الريالات في اليوم السوق الـ t ثم يحاول اعادة الاستثمار الدخل الرئيسي والفوائد حتى اليوم السوق الـ t فتكون قيمة استثماره بداية اليوم السوق الـ $(t+1)$ الاولى هي $(1+b_t)b_t$ فاذا استثمر كأمثل المقدار بعد ذلك فان قيمة استثماره عند بداية اليوم السوق الـ $(t+2)$ الثاني هي $(1+b_t)(1+b_{t+1})b_t$ ويمكن بذلك قيمة استثماره عند بداية اليوم السوق الـ t هي :

$$b_1(1+i_1)(1+i_{t+1})\dots(1+i_{t-1})$$

ويكون كامل المائد (دخل) على استتماره هو :

$$J = b_1(1+i_1)(1+i_{t+1})\dots(1+i_{t-1}) - b_t$$

ويكون متوسط معدل الدخل ومعدل الدخل الحدى (b_t) لهذا الاستثمار متساويين
وأيضاً :

$$(1-i_1) \dots (1-i_{t-1}) = \frac{J}{b_t} = \frac{dJ}{db_t} = (1+i_1)(1+i_{t+1})\dots(1+i_{t-1}) - 1$$

فعلى سبيل المثال ، لو أن $t = 2$ وأن $i_1 = 0.10$ وأن $i_{t+1} = 0.06$

$$b_{t+2} = (1.10)(1.06) - 1 = 0.166$$

وبما أن المستثمر يكسب فائدة على دخل ربحه السابق ، فإن معدل المائد المركب
للسوق سوف يفوق مجموع معدلات الفائدة الفردية فمن الطبيعي أن نلاحظ أن مستويات
معدلات الفائدة فقط ، ليس ترتيب عواملهم ، وهي التي تؤثر على معدل فائد السوق .
فمعدل فائد السوق سيظل 0.166 للفائدة $i_1 = 0.06$ ولـ $i_{t+1} = 0.10$.

أن من الأفضل تعريف :

$$b_t = 0 \quad (1-i_1 \dots 1-i_{t-1})$$

والتي تنص على أن المستثمر سوف يكسب معدل فائد مساوياً لمعدل لوائه بشرى ويبقى
في نفس الفترة الزمنية وسوف يكسب فائدة موجبة إذا احتفظ بالسندات إلى فترة زمنية
المستقبل وتطبق معدلات فائد السوق المعروفة لـ ($1-i_1 \dots 1-i_{t-1}$) على حالات الاقتراض والاقتراض

فإذا عوّج المستثمر معدل فائدة ثابتاً ، $i_1 = i_{t+1} = \dots = i_t$

فإن معادلتى ($1-i_1 \dots 1-i_{t-1}$) و ($1-i_1 \dots 1-i_{t-1}$) تصبحان :

$$b_t = (1+i)^{t-1} - 1$$

والتي يمكن إيجاد تحتها من جدول الربح المركب لقيم متضمنة لـ i و t .

معدل التخفيض والقيم الحالية : Discount Rates and Present Values

يطلب وجود ارقام سوقاً للسندات أن الفرد المائل سوف لا يعتبر الريال الواحد
الذي يجب دفعه في الفترة الزمنية الحالية مكافئاً (معادلاً) للريال الذي يجب دفعه
في بعض الفترات الزمنية في المستقبل . فلوائه استثماراً واحداً في السندات في فترة
السوق الزمنية الحالية فانه سوف يستظم $(1+i_1)$ من الريالات في فترة السوق الزمنية التالية
فالريال الواحد الذي يجب دفعه عند فترة السوق الزمنية التالية يكون مكافئاً سوتياً
لـ $1/(1+i_1) = 1/(1+i_1)$ من الريالات التي يجب دفعها عند حلول الفترة الاولى . فمن
الممكن اقراضه $(1+i_1)$ من الريالات عند فترة السوق الاولى واستلام ريالاً واحداً عند
حلول الفترة الثانية اوانه يستطف $(1+i_1)^{-1}$ من الريالات عند الفترة الاولى ويدفع ريالاً
واحداً عند الفترة الثانية فالنسبة $(1+i_1)^{-1}$ هي معدل التخفيض للقادير التي يجب

دفعها عند حلول الفترة الزمنية الثانية • اما القيمة الحالية وتسمى في بعض الاحيان قيمة لتخفيض y_2 من الريالات التي يجب دفعها عند حلول فترة السوق الثانية هي $y_2(1+i_1)^{-1}$ من الريالات •

يمكن تعريف معدلات التخفيض للمبالغ التي تدفع عند حلول اى فترة من فترات السوق الزمنية وعسوما فان معدل التخفيض للمبالغ التي تدفع عند حلول الفترة الـ t يكون

$$[(1+i_1)(1+i_2)\dots(1+i_{t-1})]^{-1} = (1+\xi_{1t})^{-1}$$

فيتبع من (١٢-١) ان استثمار بمبلغ $(1+\xi_{1t})^{-1}$ من الريالات عند فترة السوق الزمنية الاولى سوف يكون له قيمة ريال واحد عند حلول الفترة الـ t •

ان من الممكن التعبير عن دخل بكاظه او تكاليف او نفقات جارية في حدود قيمتها الحالية بمعدده مفرد a single number واحد • اعتبر الدخل الجارى income stream y_1, y_2, \dots, y_t حيث ان y_t هو الدخل الذى يجب دفعة عند حلول فترة السوق الـ t فتكون القيمة الحالية لهذا الدخل الجارى هي:

$$y = y_1 + \frac{y_2}{(1+\xi_{12})} + \dots + \frac{y_t}{(1+\xi_{1t})}$$

فلوان جميع معدلات الفائدة تكون موجبه فان $(1+\xi_{1t})$ سوف تزداد وسوف تتخفيض القيمة الحالية لاي مبلغ ثابت وذلك كلما ازدادت t فاذا كانت جميع معدلات الفائدة هي 0.10 فان القيمة الحالية لريال واحد يجب دفعة عند حلول فترة السوق الزمنية الثانية يكون تقريبا 0.91 من الريالات ، ويكون الريال الذى يجب دفعة عند حلول فترة السوق الزمنية الخامسة تقريبا 0.68 ويكون الريال الذى يجب دفعة عند الفترة العاشرة تقريبا 0.42 •

فحسابات القيم الحالية تجعل من الممكن القيام بمقارنة ذات معنى اقتصادى للدخل البدل والنفقات الجارية • افترض ان معدل الفائدة هو 0.10 واعتبر بدليين بفترتين زمنيتين من الدخلين الجاريين two-period income streams :

$$y_1 = 100, y_2 = 330.$$

$$y_1 = 300, y_2 = 121.$$

يحتوى الدخل الجارى الاول على تسعة ريالات اكثر من الثانى ، ولكن الثانى سوف يكون مفضلا عندما يكون معدل الفائدة 0.10 لان قيمته الحالية (410 من الريالات) غوق القيمة الحالية للاول (400 من الريالات) ويمكن اثبات افضليه الدخل الجارى الثانى بتحويله الى مجرى يمكن مقارنته بطريقة مباشرة بالمجرى الاول • فالدخل الجارى الثانى سوف يعطى من هو فى حوزة 200 ريال اكثر عند حلول فترة السوق الاولى من الدخل الجارى الاول • دعه يستثمر هذه الـ 200 ريال فى السندات عند حلول فترة

السوق الاولى فهذا يترك دخلا بمبلغ 100 ريال عند حلول الفترة الاولى ثم يخفف 220 ريال الى دخله المقابل للصرف عند نهاية الفترة الثانية ، فيكون الدخل الجارى المتحول $341 = 100 y_2 = y_1$ ومن الواضح انه منفصلا عند الدخل الجارى الاول ويمكن تعميم هذه النتيجة كالتالى : بغض النظر عن كيفية تحويل اى دخلا جاريا سوا من خلال القرض او الاقتراض فان اى دخلا جاريا يكون له قيمة حاله اكبر يمكن تحويله الى دخلا جاريا بفضلا .

١٢ - ٢ : استهلاك الفترات المتعددة : MULTIPERIOD CONSUMPTION

ان من العادة ان يستلم المستهلك دخله ويشترى به السلع عند بداية كل فترة سوقية زمنية فمشتراعاته الحالية سوف تتأثر بتوقعاته بخصوص السمر ومستويات الدخل فى المستقبل لذا فانه يجب ان يضع خطه (على سبيل المحاولة او التجربه) لمشتراوته فى فترات السوق الزمنية فى المستقبل . فلو اجمعت توقعاته صحيحا ولم يتغير ذوقه عن الاختصاصات المتوقعة ، فان خطه الاوليه تنفذ فى فترات السوق الزمنية فى المستقبل ولكن اذا اجمعت توقعاته فشلها فان عليه ان ينتج من خطه الاوليه نقطة المناقشة الحالية سوف تكون محصورة على المستهلك الذى يكون خطه متكامله فى فترة السوق الزمنية الجارية وذلك لحصراته الاستهلاكية على السلع وعددها n وذلك على افق من الزمن محتويا عدد T من الفترات الزمنية . فانفقه يكون الفترة الزمنية التى من اجلها قد خطط فى فترة السوق الزمنية الجارية فقد تكون باى طول ولكن للبساطة نفترض انها موافقة لما تبقى من مسره المتوقع فليس من المهم ان يعرف بالفعل كم من الزمن سوف يعيش ولكن من الضروري ان يخطط كما لو انه يعرف بالفعل . فلو تغيرت توقعات حياته فى المستقبل فانه سوف يشهر افقه حسب خطه المنفحة .

دوال منفعة الفترات المتعددة : Multiperiod Utility Functions

ان فى معظم الحالات صعبه نجد ان مؤشر المنفعة الترتيبى للمستهلك يعتمد على استهلاكه المتكامل له لكل واحد من السلع n فى كل فترة من الفترات الزمنية T :

$$U = U(q_{11}, \dots, q_{n1}, q_{12}, \dots, q_{n2}, \dots, q_{1T}, \dots, q_{nT}) \quad (١٢-٢)$$

حيث ان q_j هى كمية q_j التى يشتري فى فترة السوق الزمنية الـ t ثم يستهلكها خلال نفس الفترة .

ولا يتطلب تكوين مؤشر منفعة متفرد ان المستهلك سوف لا يتوقع اى تغير فى ذوقه عبر الزمن ولكنه يتطلب ان يخطط كما لو انه يعرف المسلك الذى سوف ياخذ ، التغيير فعلى سبيل المثال فقد يعرف كم من المنفعة والمنفعة التى سوف تجلبها له عريه الاطفال وذلك خلال

السنوات التي يمر فيها فائده ولكنها لا تعطى أى متعة أو منفعة خلال سنوات تعاقدية فمؤشر المنفعة (٢-١٢) لا يتحقق بوجه الضرورة من خلال كامل افق المستهلك المخطط له ولكنه مجرد انعكاس لتوقعاته الحالية • فإى تغيير فى ظروفه الموضوعية أو رغباته الذاتية قد يسبب فى تحقيق مؤشر منفعة عند بعض الفترات السوقية الزمنية المستقبل •

وبالرغم من أن تحاليل استهلاك الفترات المتعددة يكون رسمياً مطابقاً لتحاليل الفترة الواحدة ، إلا أن تقديم عامل الزمن بوضوح وتقديم معدل الفائدة يمثلان عدداً من المصاعب والمشاكل الجديدة • فالاهتمام يكون مركزاً على المشاكل الفريدة لاستهلاك الفترات المتعددة وذلك بافتراض أن أسعار السلعة المتوقعة والواقعية تكون ثابتة ففى القيمة وتظل غير متغيرة وكنتيجة لذلك فقد نبسط التحاليل بإدخال نظرية السلعة المركبة composite-commodity theorem (راجع الفصل ٦-٣) د ع c_t تمثل مجموع مصروفات المستهلك للسلع فى فترة السوق الزمنية t :

$$(٢-١٢) \quad c_t = \sum_{j=1}^J p_j q_{jt} \quad t = 1, \dots, T$$

ثم نعيد تعريف (٢-١٢) فى حدود مصروفات استهلاك السلعة المركبة :

$$(٢-١٢) \quad U = V(c_1, \dots, c_T)$$

والتي تعطى القيمة العظمى لمؤشر المنفعة الموافق لكل نمط من أنماط مصروفات الاستهلاك • أن معدل التعويض الزمنى للمستهلك time-substitution rate

$$-\frac{\partial c_t}{\partial c_1} = \frac{V_t}{V_1} \quad t, \tau = 1, \dots, T$$

هو المعدل الذى يجب أن تزداد مصروفات المستهلك فى فترة السوق الزمنية τ وذلك لتعويض التخفيض فى مصروفات الاستهلاك فى الفترة t من أجل ترك مستوى قناة المستهلك من دون تغيير ولا نفقد شيئاً من المجموعات بتحديد الانتهاء طمسى الحالات التى تكون فيها $\tau > t$ فلو كان معدل التعويض الزمنى للمستهلك هو 1.06 فإن مصروفاته الاستهلاكية فى الفترة τ يجب أن تزداد بالمعدل (1.06) من الريالات لكل ريال من زيادات مصروفات الاستهلاك الضخى به فى الفترة t ومعنى آخر فإنه يجب أن يستلم على الأقل 0.06 من الريالات كجلب إضافى قبل أن يؤخر مصروف استهلاكى بما قيمة ريال واحد من الفترة t إلى الفترة τ ونعبر هذا الجلب الإضافى الأدنى بأنه معدل الزمن المفضل للمستهلك rate of time preference من أجل استهلاكه فى الفترة t بدلاً من الفترة τ ونرمز له بالرمز $\eta_{\tau t}$

$$(٢-١٢) \quad \eta_{\tau t} = -\frac{\partial c_t}{\partial c_1} - 1 \quad t, \tau = 1, \dots, T \quad \tau > t$$

فقد يكون معدل الزمن المفضل للمستهلك سالبا لبعض أنماط الاستهلاك الزمنى ، أى

انه راغبان يضحى بما قيمته ريال واحد من الاستهلاك في الفترة t من اجل تامين اقل مما قيمته ريال واحد في فترة لاحقه . فلو كانت منصرفات الاستهلاك المتوقعة هـسسى 10,000 ريالاً في الفترة الـ ٤ وتكون فقط ريالاً واحداً في الفترة الـ ٣ فان y_3 سوف تكون سالبة في اغلب الاحتمالات ويمكن اشتقاق معدلات التفضيل الزمنية الذاتية للمستهلك من دالة منفعة الاستهلاك consumption-utility function والتي تصمم على مستحبات منصرفات استهلاكه وتكون مستقلة عن معدلات الفائدة في السوق وكذلك من انحراف اقتراضه واقرضه .

The Budget Constraint

شروط الميزانية

يتوقع المستهلك ان يستلم دخلاً مكتسباً جارياً earned-income stream (y_1, y_2, \dots, y_T) في فترات السوق الزمنية ضمن الاقن الزماني المنقطع له . فعادة لا يكون دخله الجارى المتوقع عبر الزمن فاحد الاحتمالات هو ان يكون دخلاً مكتسباً منخفضاً خلال السنوات المبكرة الاولى من عمر المستهلك المملى والتي تزداد كلما اكتسب خبرة في العمل من خلال التدريب والتعريف في الوظيفة ثم يصل الى القمه خلال منتصف صره المملى فتتد ببطء دخله المكتسب من الانخفاض عندئذ ويصبح صفراً بعد تقاعده وبمها كان دخله المكتسب الجارى فانه يتخلق في النادر مع استهلاكه الجارى المطلوب ولكنه يستطيع التخليق بين المجرمين من خلال الاقتراض والاقتراض .

ان كامل ما يستلمه المستهلك من دخل في فترة السوق الزمنية الـ t تكون (مجموع) دخله المكتسب ودخله من الارباح (الفوائد) interest income من السندات المحتفظ بها خلال الفترة الزمنية السابقة $y_t + i_t \cdot b_{t-1}$ وسوف يكون دخله من الارباح موجبا اذا كانت حصيله السندات موجبه ويكون سالبا اذا كانت حصيله السندات سالبه ، اى انه اذا كان عليه دين وتعرف بدخراعه المتوقعة في الفترة الزمنية الـ t (ونرمز لها بـ b_t) بانها الفرق بين مجموع دخله المتوقع ومجموع منصرفات استهلاكه في تلك الفترة :

$$b_t = y_t + i_t \cdot b_{t-1} - c_t \quad t = 1, \dots, T$$

حيث ان i_t هو معدل الفائدة المعدد في فترة السوق الزمنية المعدية وان $(t = 2, \dots, T-1)$ هي معدل الفائدة الذى يتوقع المستهلك ان يظل سائدا الى الفترة الـ t ويكون ادخاره سالبا اذا فاقت منصرفاته مجموع دخله .

فلو ان المستهلك كان عند بداية صره الذى يكسب به e فان حصيله المعدية من السندات (b_0) تمثل ثروته الموروثة فاذا قام بتقيق خططه في وقت لاحق لبداية صره

المطلوب فإن حصيلته من السندات سوف تعكس أيضا نتائج قرارات الادخار الماضية. ولتبسيط التحاليل الحالية نفترض ان المستهلك في بداية صرة المبلغ وان $b_0 = 0$ فنعد كل فترة زمنية سوف يزيد المستهلك او ينقص من قيمة حصيلته من السندات بمقدار a_t اذ خاره في ذلك الوقت :

$$(12-7) \quad b_t = b_{t-1} + a_t \quad t = 1, \dots, T$$

فالمستهلك قد لا يملك الادخار ويمش على الدين خلال السنوات المبكرة الاولى من حياته المئوية عندما يكتسب دخلا قليلا بالمقارنة لان عليه ان يشتري منزلا وان يقوم برعاية طائفة الناحية ، ومن ثم يدخر لدفع ديونه ثم يكون مركزا يتحصل منه على حصيله سندات موجبه وذلك خلال ما تبقى من حياته المئوية ، وفي الختام سوف ينزوا اذخره ويحصل سندات الى سيوله خلال فترة تقاعده .

وأخذ (12-7) و (12-8) معا فان حصيله المستهلك المخطط لها من السندات بعد العمليات التجارية في فترة السوق الزمنية t يمكن التعبير عنها بدلالة دخله المكتسب ومستويات استهلاكه ومعدلات الفائدة :

$$\begin{aligned} b_1 &= (y_1 - c_1) \\ b_2 &= (y_1 - c_1)(1+i) + (y_2 - c_2) \\ b_3 &= (y_1 - c_1)(1+i)(1+i) + (y_2 - c_2)(1+i) + (y_3 - c_3) \end{aligned}$$

وعبارة بالاعتماد من (12-8) :

$$(12-8) \quad b_t = \sum_{i=1}^t (y_i - c_i)(1+i)^{t-i} \quad t = 1, \dots, T$$

وتضاهي حصيله المستهلك من السندات بعد عمليات المتاجرة في الفترة الموقية t المجموع الجبري لجميع مدخراه ولما في تكاليف الربح او الدخل خلال تلك الفترة بحيث ان الربح يكون موجبا في كل .

في حالة الفترة الزمنية الواحدة فان المستهلك الذي يحقق الاعليه سوف يشتري كمية كبيرة كافية من كل سلعة ليصل الى درجة الشبع الكاظم هذا اذا لم يكن له شروط ميزانيه وسوف تتسا حالة ماظه في حالة تعدد الفترات اذا لم يكن هناك تحديد على مبلغ الدين الذي يستطيع تكبسه خلال صره الزمن ويمكن التعبير عن شرط الميزانيه في حالة تحاليل الفترات المتعددة كما يخط على حصيله المستهلك النهائية من السندات (b_T) فقد يخطط على ان يترك مقاررات (او دين) لورثه ولكن من اجل التبسيط نفترض انه سوف يخطط على ان يترك مقاررات او دين لورثه وتقسيم b_T من (12-8) نجد ان شرط ميزانيته :

$$b_T = \sum_{i=1}^T (y_i - c_i)(1+i)^{T-i} = 0$$

وبالقسمه على $(1 + \xi_{1T})$ ونضربك حدود مصروفات الاستهلاك الى اليمين : فانه من الممكن كتابة شرط ميزانية المستهلك كالتالى :

$$(12-2) \quad \sum_{t=1}^T y_t(1 + \xi_{1t})^{-1} = \sum_{t=1}^T c_t(1 + \xi_{1t})^{-1} \quad \text{لان :}$$

$$\frac{1 + \xi_{1T}}{1 + \xi_{1T}} = \frac{(1 + i_1) \cdots (1 + i_{T-1})}{(1 + i_1) \cdots (1 + i_{T-1})} = \frac{1}{(1 + i_1) \cdots (1 + i_{T-1})} = (1 + \xi_{1t})^{-1}$$

خطه الاستهلاك : The Consumption Plan

ان المستهلك يرغب فى الحصول على المستوى الاعلى من مؤشر منفعة لمستهوىه المعلى (١٢-١) تحت شرط ميزانيه (١٢-٢) تكون الدالة :

$$V^* = V(c_1, \dots, c_T) + \mu \sum_{t=1}^T (y_t - c_t)(1 + \xi_{1t})^{-1}$$

يوضع اشتقاقها الجزئيه ساويه لصفر :

$$(12-3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V^*}{\partial c_t} &= V_t - \mu(1 + \xi_{1t})^{-1} = 0 \quad t = 1, \dots, T \\ \frac{\partial V^*}{\partial \mu} &= \sum_{t=1}^T (y_t - c_t)(1 + \xi_{1t})^{-1} = 0 \end{aligned}$$

ومن ثم تكون :

$$(12-4) \quad -\frac{\partial c_t}{\partial c_t} = \frac{(1 + \xi_{1t})^{-1}}{(1 + \xi_{1t})^{-1}} = 1 + \xi_{1t} \quad t, \tau = 1, \dots, T \quad \tau > t$$

والصحيح من (١٢-٥)

$$\eta_{\tau\tau} = \xi_{1\tau} \quad t, \tau = 1, \dots, T \quad \tau > t$$

فالمستهلك فى هذه الحاله سوف يقوم بتعديل انفعاليه الذاعيه الى فرض فى المستوى وذلك بمساواة معدل غنضليه الزمنى بين كل زوج من الفترات بمعدل العائد للمسبق المقابل . فلو كانت $\eta_{\tau\tau}$ اقل من $\xi_{1\tau}$ فان المستهلك يستطيع شحسرا سندات وسطم مبلغا اضافيا اكبر من الضرورى للمحافظة على ان يكون فى موضع السوا اما اذا كانت $\eta_{\tau\tau}$ اكبر من $\xi_{1\tau}$ فانه باستطاعه زياده قنانه ببيع السندات بزيادة استهلاكه فى الفتره τ ذلك على حساب الاستهلاك فى الفتره t . والرغم من ان $\eta_{\tau\tau}$ قد تكون سالبه لبعض انعطاف مصروفات الاستهلاك فان القيم (المنطسى) الملاحظه لـ $\eta_{\tau\tau}$ سوف تكون موجه دائما اذا كانت معدلات الفائدة موجهه وقد يثبت القارىء شرط الدرجه الثانيه قد تتحقق اذا كانت (١٢-٥) شبه - منفرجه بانعكاسات منتظم او مايعادل ذلك اذا كانت معدلات التفضيل الزمنى فى تناقص .

مثال عددي : اعتبر مستهلكا افتراضيا له افق زمنيًا بفترتين • افترض ان دالة منفعةته هي $U = c_1 c_2$ وان دخله الفعلي ودخله المتوقع هما $y_1 = 10,000$, $y_2 = 5250$ تكون الدالة :

$$V^* = c_1 c_2 + \mu \{ (10,000 - c_1) + (5250 - c_2)(1 + i_1)^{-1} \}$$

ويوضع اشتقاقاتها الجزئية مساوية لصفر :

$$\frac{\partial V^*}{\partial c_1} = c_2 - \mu = 0$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial c_2} = c_1 - \mu(1 + i_1)^{-1} = 0$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial \mu} = (10,000 - c_1) + (5250 - c_2)(1 + i_1)^{-1} = 0$$

فلو كان معدل الفائدة هو 0.05 (خمسة في المائة) فان منصرفات الاستهلاك الحالية تكون $c_2 = 7875$, $c_1 = 7500$ ويساوي معدل التفضيل الزمني للمستهلك لهذه المنصرفات معدل الفائدة (معدل فائد السوق) :

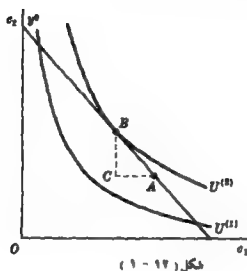
$$\eta_{12} = -\frac{dc_2}{dc_1} - 1 = \frac{c_2}{c_1} - 1 = \frac{7875}{7500} - 1 = 0.05$$

وبعض شبه - تعمير دالة المنفعة المنضبط بانتظام تحقيق شرط الدرجة الثانية ويمكن وصف حالة الافق الزمني الجكون من فترتين عن طريق الرسم البياني • وذلك باعطاء تسمير جديد لرسومات منحنى السواء التقليدي • فتعطي احداثيات نقطة A في الشكل (١٢-١) دخل المستهلك المكتسب الجارى • د ع y^0 تكون القيمة الحالية لهذا الدخل الجارى فيكون شرط ميزانيته :

$$y^0 - c_1 - c_2(1 + i_1)^{-1} = 0$$

ويكون المحل الهندسي لجميع نقط الاستهلاك بالقيمة الحالية y^0 خطا مستقيما بميل سالب يساوي معدل المقايضة للسوق $(1 + i_1)$ بين منصرفات الاستهلاك في الفترة الزمنية الاولى والثانية • فيمكن تحويل رايلا واحدا من الدخل في الفترة الاولى الى $(1 + i_1)$ من الريالات لمصرفات الاستهلاك في الفترة الثانية اذا قام المستهلك بتسليف شخص ما بمعدل الفائدة السائد في السوق • وبالمثل فان $(1 + i_1)$ من الريالات من الدخل في الفترة الثانية يمكن تحويله الى ريال واحد لمصرفات الاستهلاك في الفترة الاولى اذا استدان المستهلك بمعدل فائدة السوق افترض ان شرط ميزانيته المستهلك يكون معطى الخط العرمل به • y^0 في الشكل (١٢-١) •

فلو اسلف المستهلك في فترة السوق الرزمية الاولى فانه سوف يتحرك عبر خط ميزانيته ، متجها الى اليمين من نقطة A • فاذا قام بتسليف شخص ما فانه سوف يتحرك عبر خط ميزانيته متجها الى اليسار من نقطة A •



ان المنحنيين $U^{(1)}$ و $U^{(2)}$ هما عضوان من اعضاء عائلة منحنيات السواء الزمنية لكل واحد منهما يكون هو المعدل الهندسي لمصرفات الاستهلاك التي تعطى مستوا معيناً من القناعة والرفاه ويكون ميل منحنى السواء الزمني هو $-(1 + \eta_{12})$ وتنعكس هذه المنحنيات الافتراض بان معدل التفضيل الزمني يكون في تناقص وتعطى احداثيات نقطة التماس B مصرفات الاستهلاك المطلوبة للمستهلك سوف يشتري ما يشاء AC ممسكاً الريالات من السندات في فترة السوق الزمنية الاولى وسوف يصرف المبلغ الرئيسي رأسداً الارباح CB على السلع الاستهلاكية في الفترة الزمنية الثانية .

آثار الاحلال (التعويضي) والدخل : Substitution and Income Effects

ان من الممكن فصل تأثيرات اى تغير في معدل الفائدة على مستويات استهلاك المستهلك المطلوبة الى آثار الاحلال والدخل بطرق شبيهة بتلك التي وظفناها نفسى الفصل (٢ - ٥) . افترض ان الافق الزمني للمستهلك يحتوي على فترتين زمنيتين . فمن اجل تحديد تأثيرات التغيرات في معدل الفائدة ومستويات الدخل المكتسب فافضل شروط الدرجة الاولى (١٢ - ١٠) غاضلاً كلياً لـ $T = 2$:

$$\begin{aligned} V_{11} dc_1 + V_{12} dc_2 - d\mu &= 0 \\ V_{21} dc_1 + V_{22} dc_2 - (1 + i_1)^{-1} d\mu &= -\mu(1 + i_1)^{-2} di_1 \\ &= -dy_1 - (1 + i_1)^{-1} dy_2 \\ &\quad + (y_2 - c_2)(1 + i_1)^{-2} di_1 \end{aligned} \quad (١٢ - ١٢)$$

ان وصف المعادلات على الجانب الايسر من (١٢ - ١٢) هو نفسه الصنف لهيكلان المعدده والتي تكون موجبه بشرط الدرجة الثانية .

وباستخدام قاعدة كيرلحل (١٢-١٢) لـ dc_1

$$dc_1 = -\mu(1+i)^{-2} \frac{\partial U}{\partial c_1} di_1 + [-dy_1 - (1+i)^{-1} dy_2 + (y_2 - c_2)(1+i)^{-2} di_1] \frac{\partial U}{\partial y_1} \quad (12-12)$$

حيث أن ∂ في معادلة هيسيان المحدودة وأن ∂ هي المتعامل cofactor للمنتصر في الصف الـ ١ والمحدد الـ ٢ بقيمة (١٢-١٢) على y_1 ذلك وافترض أن $dy_1 = dy_2 = 0$.

$$(12-12) \quad \frac{dc_1}{di_1} = -\mu(1+i)^{-2} \frac{\partial U}{\partial c_1} + (y_2 - c_2)(1+i)^{-2} \frac{\partial U}{\partial y_1}$$

دع y صقل القيمة الحالية لدخل المستهلك الكسب الجارى :

$$y = y_1 + y_2(1+i)^{-1}$$

فإذا ازداد y_1 بربال واحد أو زدنا y_2 بمبلغ $(1+i)$ من الربالات فإن كل واحد منهما سوف يزيد y بمبلغ ربال واحد فقط فمعدل الزيادة في c_1 بالنسبة لزيادة ربال واحد في القيمة الحالية لدخل المستهلك الكسب الجارى يمكن اشتقاقه من :

$$(12-12) \quad \frac{dc_1}{dy} = \frac{dc_1}{dy_1} = (1+i) \frac{dc_1}{dy_2} = -\frac{\partial U}{\partial c_1}$$

فإن تغيير في i_1 سوف يغير القيم الحالية لدخل المستهلك الكسب والاستهلاك الجارى اختبر هذه التغيرات i_1 والصحيحة بتغيرات في c_1 و c_2 بحيث أن مستوى مؤشر المنفعة للمستهلك يظل بدون تغيير :

$$V_2/V_1 = (1+i)^{-1} \quad (12-12) \quad \text{لأن} \quad dU = V_1 dc_1 + V_2 dc_2 = 0.$$

فينتج هذا أن :

$$-dc_1 - (1+i)^{-1} dc_2 = 0$$

ومن (١٢-١٢) ينتج هذا أن :

$$-dy_1 - (1+i)^{-1} dy_2 + (y_2 - c_2)(1+i)^{-2} di_1 = 0$$

وبالتعويض في (١٢-١٢)

$$(12-12) \quad \left(\frac{\partial c_1}{\partial i_1} \right)_{U=\text{const}} = -\mu(1+i)^{-2} \frac{\partial U}{\partial c_1}$$

وبمعمول $-(y_1 - c_1)(1+i)^{-1} = (y_2 - c_2)(1+i)^{-2}$ الذي ينتج من شرط الميزانية وبالإستفادة من (١٢-١٢) و (١٢-١٢) فإنه يمكن كتابة (١٢-١٢) كالآتي :

$$\frac{\partial c_1}{\partial i_1} = \left(\frac{\partial c_1}{\partial i_1} \right)_{U=\text{const}} + (y_1 - c_1)(1+i)^{-1} \left(\frac{\partial c_1}{\partial y} \right)_{U=\text{const}}$$

فمجموع التأثير لتغير في معدل الفائدة يكون حاصل جمع آثار الاحلال والدخل فإشار

الدخل تساوى معدل التخفيض لمصروفات الاستهلاك بالنسبة للزيادة فى القيمة الحالية لدخل المستهلك المكتسب الجارى مرجحه بحصلته من السندات مضروبه بما ——— التخفيض .

فمن السهل تحديد اشارة اثر الاحلال فمن شروط الدرجة الاولى $\mu > 0$ ومن شروط الدرجة الثانية $\mathcal{Q} > 0$ ويتيمم \mathcal{Q}_{21}

$$\mathcal{Q}_{21} = - \left| \begin{array}{cc} V_{12} & -1 \\ -(1+i_1)^{-1} & 0 \end{array} \right| = (1+i_1)^{-1} > 0$$

ولهذا فان اثر الاحلال بالنسبة لـ c_1 فى (١٢-١٤) يكون سالبا ويكون اشر — الاحلال بالنسبة لـ c_2 هو :

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial i_1} \right)_{U=\text{const}} = -\mu(1+i_1)^{-2} \frac{\mathcal{Q}_{22}}{\mathcal{Q}}$$

ولان $0 < -1 = \mathcal{Q}_{22}$ فان اثر الاحلال بالنسبة لـ c_2 يكون موجبا فإى زيادة فى معدل الفائدة سوف يخصص المستهلك على تعويض (احلال) الاستهلاك فى الفترة 2 بالاستهلاك فى الفترة 1 كلما تحرك عبر منحنى سوا" زمنى معطى وهذا يتبع من الحقيقة بان الزيادة فى معدل الفائدة يكون مكافئا للزيادة فى اسعار السلع فى فترة السوق الزمنية الاولى نسبة لتلك فى الفترة الثانية . فلو خفض المستهلك استهلاكه فى الفترة 1 واشترى سندات فان ما يكسبه من ربح سوف يكون اكبر وسوف يكون قادرا على ان يشتري كمية سلع اكبر فى فترة السوق الزمنية الثانية لكل ما قيمته ريال واحد — المشتريات المضمي بها فى الفترة الاولى .

وبالرغم من ان اى زيادة فى الدخل قد تسبب انخفاضا فى شراء سلعة معينة الا انه من الصعب ان نتخيل وضعا يكون فيه اى زيادة فى الدخل سوف تسبب انخفاضا فى مصروفات الاستهلاك الاجمالية فى اى فترة من فترات السوق الزمنية فقد نقرر ان ثابت $(\partial c_1 / \partial y)_1$ تكون موجبه للجميع ما عدا الحالات الغير مادية بالمره فلو كان هذا حقيقة فان اتجاه اثر الدخل سوف يحدد باشارة وضع السندات $(y_1 - c_1)$ للمستهلك عند نهاية المطافه فى الفترة الزمنية الاولى فاذا كانت حصيله المستهلك من السندات موجبة فان اى زيادة فى معدل الفائدة سوف يرفع من دخله من الازياح ويكون مكافئا لاي زيادة فى دخله المكتسب فلو كان عليه دين فان اى زيادة فى معدل الفائدة سوف يزيد من مصروفات ربحه ويكون مكافئه لاي انخفاض فى دخله المكتسب ففى هذه الحالة يكون كلا الاشرين سالبا ، وسوف يكون مجموع الاثر $\partial c_1 / \partial i_1$ سالبا فلو كانت حصيله سندات موجبه فان مجموع الاثر سوف يكون موجبا او سالبا معتددا على ما اذا كانت قيمة اثر الدخل اكبر او اصغر من القيمة المطلقة لـ اثر الاحلال .

١٢ : ٣ نظرية استثمار الوحدات الإنتاجية :

INVESTMENT THEORY OF THE FIRM

ان عملية الانتاج لا تكون عليه فوريه الا نادرا لانه لابد من انقضاء بعض الوقت بعد تطبيق الدواخل لتامين الخواص افترض ان (١) مالك الوحدة يشتري دواخل ويبيع خواص فقط وذلك ضمن الفترة الزمنية في افقه الزمني .

(٢) وانه يقوم بالمعليه الفنيه للانتاج في الوقت بين الفترات الزميه السوقيه .

(٣) فخلال الفترة الزمنية يقوم بتطبيق الدواخل التي اشترها في الفترة الزميه الـ (٤)

(٤) ويقوم بانتاج خواصه في الفترة الـ $(t + 1)$ حيث يقوم ببيعها .

وتخدم هذه الافتراضات لتعرض المتتاليه الزميه للانتاج فالتحليل التاليه قد تعتمد على مجموعات بدليه لافتراضات المتتاليه الزميه بدون ان نفقد اى نتيجه من نتائجه الهامه .

نقدم هنا دالة انتاج لخواص ودواخل متعدده:

A many-input-many-output production function

متضمنه البعد الزمني فيها فافتراض عدم تغير اسعار الخواص والدواخل يجعله من الممكن معالجه مصفات الاستثمار والايادات من المبيعات في كل فترة سوق زميه ضمن الافق الزمني لمالك الوحدة الانتاجيه كالمشغرات الوحيديه ونضع التحليل في البحث عن علاقة بعضهم ببعض وتأثيرات معدلات الربح .

لقد لعبت الحالات الخاصه دورا مهما في تطوير نظرية الاستثمار من ناحية اقتصاد الوحدات microeconomic فالحالات هذه قد تميزت على اساس بنيات وقت الخواص والدواخل وبسط هذه الحالات هي حالة داخل في وقت محدد تماما وخارج وقت محدد تماما $point-input-point-output$ والتي تعطى الاستثمار في رأس المال العام $working capital$ فجميع الدواخل قد اشترت في احد فترات السوق الزميه وجميع الخواص قد بيعت في الفترة السوقيه الزميه التاليه فتمو الاشجار وترك الخل لوقت معين يظان امثله لهذا اما حالة داخل في اوقات متعدده وخارج في وقت محدد تماما فتعطى حالة انتاج خارج يتطلب تطبيق دواخل خلال عدد من الفترات الزميه المتلاحقه فبنسب السلفين قد يقع تحت هذا التصنيف لحالة الداخل في وقت محدد تماما وخارج في اوقات متعدده فتعطى الاستثمار في سلعة من السلع التي تستمر طويلا (سلعة متده) والسعي اشترت في فترة زميه معينه واستخدمت لانتاج خواص خلال عدد من الفترات الزميه المتلاحقه .

واخيرا ، الحاله العامه وهي حالة داخل وخارج في اوقات متعدده . نطبعها تحتوى الحاله الرابعه الثلاث حالات الاولى في الفصل الحالي فتركز الانتباه على الحاله العامه وكذلك حالة داخل في وقت محدد تماما وكذلك الخارج .

دالة الإنتاج على فترات زمنية متعددة :

The Multiperiod Production Function

اعتبر احد مالكي الوحدات الانتاجيه الذى يوظف فى وضع خطه انتاج على لاق زمنى يكون من فترات زمنيه كامله عددها L وكذا $(L+1)$ فترات سوق زمنيه • وباتباع الروشور المستخدم فى الفصل (٤-٦) فانه يمكن كتابة دالة الانتاجيه على النحو التالى :

$$(١٢-١٢) \quad F(q_{12}, \dots, q_{n,L+1}, x_{11}, \dots, x_{nL}) = 0$$

حيث ان q_t ($t = 2, \dots, L+1$) هى كمية الخارج الى السوق خلال الفترة الـ $(t-1)$ والمداخيل فى فترة السوق الزمنية الـ t وان $(i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, L)$ هى كمية الداخيل الى t المشتري فى فترة السوق الزمنية الـ t والمتصان فى عمله الانتاج خلال الفترة الـ t فإى خوار قد يبيعها صاحب الوحدة فى فترة السوق الزمنية المبديه تكون نتيجة قرارات انتاج سابقة وسوف تدخل مستوياتها المعادله (١٢-١٢) كتوابت بدلا من متغيرات • وفى فترة السوق الزمنية الـ $(L+1)$ يخطط صاحب الوحدة لبيع الخوار. المؤمنه خلال الفترة الـ L ولكنه لا يخطط لشرا داخلا لانه لا يتوقع انتاج فى اى فترة زمنيه بعد الفترة الـ L فدالة الانتاج على فترات زمنيه متعدده تربط مستويات الداخيل والخوار لجميع الفترات الزمنية ضمن خطة صاحب الوحدة الزمنية فالداخيل المطبقه خلال كل فترة زمنيه تصيف لانتاج الخوار خلال جميع الفترات الزمنية ومن المستحيل ان تنصب خارجا معيناً لداخيل طبقت خلال فترة زمنيه معينه ولكن من المحتمل التنبه من تأثيرات التغيرات الحديه وحساب الانتاج الحدى لكل خارج او من خلال كل فترة زمنيه •

The Investment-Opportunities Function

دالة فرص الاستثمار :

ان باستطاعة المنتج تحقيق الحد الاعلى من ربحه من انتاج الفترات الزمنية المتعدده تحت شرط (١٢-١٧) إيماريقه ماظه لظك الموصوفه فى الفصل (٤-٦) فالقارى يحتاج فقط لاستخدام القيم الحاليه للاسعار بدلا من الاسعار البسيطه simple prices وتركيز الاهتمام على النواحي الزمنية للانتاج فنترض هنا ان اسعار المستقبل والحاظر لها قيم معروفه وغير متغيرة ونعامل منصرفات الداخيل ويزادات الخوار فى كل فترة زمنيه كتغيرات مركبه والذى تكون مرجعه بدالة فرص الاستثمار الضميه •

$$(١٢-١٨) \quad H(I_1, \dots, I_L, R_2, \dots, R_{L+1}) = 0$$

$$I_t = \sum_{j=1}^n p_{jt} x_{jt} \quad \text{and} \quad R_t = \sum_{j=1}^n p_{jt} q_{jt} \quad \text{حيث ان :}$$

تكون سلع مركبه معطى الاستثمار I_t والاياردات R_t ولقد اشقت الداله (١٢-١٨) من (١٢-١٧) بحيث ان الافتراض بان الشروط الحديه الخاصه قد تحققت لجميع ازواج الداخل والخارج المتغيره والموافقه لنفس الفترة الزمنيه فلو اعطينا جميع الایاردات وجميع منصرفات الاستثمار ما عدا واحده منها فان (١٢-١٨) سوف تعطى القيمه الادنى لما تبقى من منصرفات الاستثمار . وبالمثل لو اعطينا كل ذلك جميع منصرفات الاستثمار ، فان (١٢-١٨) سوف تعطى القيمه العظمى لما تبقى من الايرادات .

يمتلك صاحب الوحدة الانتاجيه فرص استثمار داخلية وخارجيه فهو يستطيع شراء سندات ويستثمر فى وحدة الانتاج الخاصه به فمعدلات العوائد الخارجيه تكون هسى نفسها للمستهلكين ، كما هو معطى بالمعادلة (١٢-١) فى الحاله العامه لا يمكن تعريف متوسط معدلات عوائد السوق بطريقة موازنه لمتوسط معدلات عوائد السوق لانه من غير الممكن ان نعزى كامل الايرادات فى فترة السوق الزمنيه الى الاستثمارات فى اى فترة من فترات السوق الزمنيه فكل دخل يعتمد على جميع منصرفات الاستثمار ولكن يمكن تعريف معدلات العوائد الداخليه لى زوج ايرادات واستثمار وبافتراض ان الاستثمارات الاخرى تظل بدون تغيير تبعات معدل العائد الداخلى الحدى من الاستثمار ^(١) فى فترة السوق الزمنيه الى t بالنسبه للايرادات فى الفترة الى τ نرمز له بالرمز ρ_{τ} :

$$(\tau-12) \rho_{\tau} = \frac{\partial R_t}{\partial I_t} - 1 = - \frac{\partial H / \partial I_t}{\partial H / \partial R_t} - 1 \quad \begin{matrix} t = 1, \dots, L \\ \tau = 2, \dots, L+1 \end{matrix}$$

ويعتمد كل واحد من هذه المعدلات على مستويات جميع منصرفات الاستثمار والاياردات المنطوق لها .

ندوال معدل العائد الداخلى المعطاة بالمعادلة (١٢-١٩) تكون مستقله من معدلات فائده السوق وفرص التصليف والاستلاف الخاصه بهالكالوحد الانتاجيه وتعطى

(١) لا يوجد اسما مقبولا عامه لهذه الفكرة فقد استخدم الاسم معدل العائد الداخلى الحدى "marginal internal rate of return" من قبل

Friedrich Lutz and Vera Lutz, *The Theory of Investment of the Firm* (Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1951)

بيضا استخدم الاسم معدل العائد الحدى فوق التكلفة

"marginal rate of return over cost."

Irving Fisher, *The Theory of Interest*, (New York: Kelley and Millman, 1954),

"marginal productivity of investment,"

"marginal efficiency of investment,"

"marginal efficiency of capital."

(١٢-١٩) لاسعار الداخلة والخارج المعطاه وصفا ضمن الشكل الحدي للاطار الفني الموضوعي الذي يعمل صاحب الوحدة من خلاله فقد تكون p_{it} سالبه لبعض مجموعات الايرادات والاستثمار .

خطه الاستثمار : The Investment Plan

يرغب صاحب الوحدات الانتاجيه في اختيار احد مجموعات الايرادات والاستثمارات الجاريه التي تحقق (١٢-١٨) التي تحقق له القيمه الحاليه المعظمى لارباحه الجاريه تكون الدالة :

$$\pi^* = \sum_{t=2}^{L+1} R_t(1 + \xi_{it})^{-1} - \sum_{t=1}^L I_t(1 + \xi_{it})^{-1} + \mu H(I_1, \dots, R_{L+1})$$

وضع اشتقاقها الجزئيه مساويه لصفر ، نحصل على :

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial R_t} = (1 + \xi_{it})^{-1} + \mu \frac{\partial H}{\partial R_t} = 0 \quad t = 2, \dots, L+1$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial I_t} = -(1 + \xi_{it})^{-1} + \mu \frac{\partial H}{\partial I_t} = 0 \quad t = 1, \dots, L$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \mu} = H(I_1, \dots, R_{L+1}) = 0$$

حيث ان $\mu < 0$ ^(١) والتوضيح من (١٢-١٩) نجد ان شروط الدرجه الاولى تتطلب بان :

$$p_{it} = \xi_{it} \quad t = 1, \dots, L$$

فصاحب الوحدة يجب ان يساوي كل واحد من معدلات العائد الداخليه الحديه بمعدل قائد السوق المقابل .

وتتطلب شروط الدرجه الثانيه بان :

$$(١٢-٢١) \quad \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{vmatrix} < 0.$$

(١) تتطلب شروط الدرجه الاولى ان $\partial H / \partial I_t$ وان $\partial H / \partial R_t$ يكونا بإشارتين مختلفتين ونفترض بان تكون دالة فرض الاستثمار بحيث ان $\partial H / \partial R_t \geq 0$ وان $\partial H / \partial I_t < 0$ وذلك لحظه الانتاج المثلث . فلو حصلنا على حل يمكن الاشارة فانه من الضروري فقط ان نعيد تعريف (١٢-١٨) على انها $-H$ وذلك للحصول على النمط المطلوب .

حيث أن H_t هي الاشتقاق الجزئي من الدرجة الاولى للدالة الضمنية (١٨-١٢) بالنسبة للمتغير z وان H_z هي الاشتقاق الجزئي من الدرجة الثانية بالنسبة للمتغيرين z و k فجميع المحددات السابقة يجب ان تكون سالبة (٢) فهذه الشروط يجب ان تتحقق بغض النظر عن الترتيب الذي ذكرت به الايرادات والاستثمارات

• 2L.

وبفك المحددات الاولى من المعادلة (٢١-١٢)

$$(٢٢-١٢) \quad 2H_1H_2H_{12} - H_{22}H_1^2 - H_{11}H_2^2 < 0$$

فمعدل تغير معدل العائد الداخلي الحدي للاستثمار في فترة السوق الزمنيّة t بالنسبة للايراد في الفترة t يكون :

$$\frac{\partial p_t}{\partial I_t} = \frac{\partial^2 R_t}{\partial I_t^2} = -\frac{1}{H_1^2} (H_{11}H_2^2 - 2H_{12}H_1H_2 + H_{22}H_1^2)$$

حيث ان $H_1 = \partial H / \partial I_t$ وان $H_2 = \partial H / \partial R_t$ وبما ان (٢٢-١٢) يجب ان تتحقق للمتغيرات المدونه بهذا الترتيب ولان $H_2 > 0$ فان (٢٢-١٢) تتطلب بان :

$$(٢٣-١٢) \quad \frac{\partial p_t}{\partial I_t} < 0 \quad \begin{matrix} t = 1, \dots, L \\ t = 2, \dots, L+1 \end{matrix}$$

ولهذا فان شروط الدرجة الثانية تتطلب بان يكون جميع معدلات العائد الداخليّة الحديّة في تناقص •

فلو لم يتحقق شرطى (٢٠-١٢) و (٢٣-١٢) فان صاحب الوحدة يستطيع زيادة القيمة الحاليّة لربحه اما عن طريق بيع السندات والتوسع في استثماره الداخليّة او من طريق شراء السندات وتقليص استثماره الداخليّة •

داخل وخارج في وقت محدد تماماً Point-Input-Point-Output

ففي أبسط الحالات يقوم صاحب الوحدة بالاستثمار في احد فترات السوق الزمنيّة وينتظم الايراد الحاصل في الفترة اللاحقه • فقد يعيد المصنّع الانتاجية عبر الزمن ولكن انتاجه في فترة السوق الزمنيّة الاولى سوف تؤثر فقط على ايراداته في الفترة الثانية ويضمن افقه الزمني المخطط للفعال على فترة زمنية واحدة كاملة وفترتين من فترات السوق الزمنيّة •

ان الممكن وضع ايرادات صاحب الوحدة كدالة موضحة بالنسبة لمصرفات استثماره:

(٢) تتطلب شروط الدرجة الثانية بان تكون الحدود الرئيسيّة الصغرى في محسوبة هيسيان المكونة من اشتقاقات الدرجة الثانية لـ μ محدودة بأشتقاقات الدرجة الاولى لـ $H(I_1, \dots, R_{L+1})$ متبادلة في الاشارات بحيث تكون موجبه وسالبه وهكذا وتحصل على شروط (٢١-١٢) باخذ $\mu < 0$ كعامل مشترك بحيث ان $\mu < 0$ •

(٢٤-١٢)

$$R_2 = h(I_1)$$

ففى هذه الحالة الخاصة تكون جميع الإيرادات فى فترة السوق الزمنية الثانية منسوبة الى الاستثمارات المتخذة فى الفترة الاولى وانه من الممكن تعريف متوسط معدل العائد الداخلى :

$$\frac{R_2 - I_1}{I_1} = \frac{h(I_1)}{I_1} - 1$$

ويمكن مقارنة متوسط معدل العائد الداخلى بمعدل طائد السوق i_1 المقابل •
فصاحب الوحدة يرفض فى تحقيق الحد الاعلى من القيمة الحالية لارباحه من العمله
الانتاجيه :

$$\pi = R_2(1 + i_1)^{-1} - I_1$$

وبالتصنيف من (٢٤-١٢) فانه يمكن ان تنص على π بدلالة I_1 فقط :

$$\pi = h(I_1)(1 + i_1)^{-1} - I_1$$

وباستخدام التفاضل ،

(٢٥-١٢)

$$\frac{d\pi}{dI_1} = h'(I_1)(1 + i_1)^{-1} - 1 = 0$$

وباطاوة ترتيب الحدود ، والتصنيف من (١-١٢) و (١٩-١٢) يصبح شرط الدرجة الاولى :

$$\rho_{12} = i_1 = \xi_{12}$$

فصاحب الوحدة يساوى معدل العائد الداخلى الحدى بمعدل طائد السوق المقابل
والذى هو معدل فائدة السوق فى هذه الحالة •
ويطلب شرط الدرجة الثانية بان :

$$\frac{d^2\pi}{dI_1^2} = h''(I_1)(1 + i_1)^{-1} < 0$$

فاذا كانت $i_1 > -1$ فان :

(٢٦-١٢)

$$h''(I_1) < 0$$

وهذا ينص على ان معدل العائد الداخلى الحدى يكون فى تناقص •
تخيل ان (٢٦-١٢) قد تحققت ولكن $\rho_{12} > \xi_{12}$ فان العائد الحدى من استغلال
الارصد للاستخدام الداخلى سوف يتفوق تكلفة ارباحها ، ويستطيع صاحب الوحدة
مندئذ من زيادة ربحه بالتوسع فى استثماره وبالعكس لو ان $\rho_{12} < \xi_{12}$ فانه سوف
يكسب اقل على كل ريال حدى لاستثمارات الداخليه مما يجب عليه ان يدفع من اجلها
ويستطيع ان يزيد من ربحه بتقليص استثماره لشراء السندات •
وبتفاضل (٢٥-١٢) غاضلا تا :

$$h''(I_1) dI_1 = dI_1$$

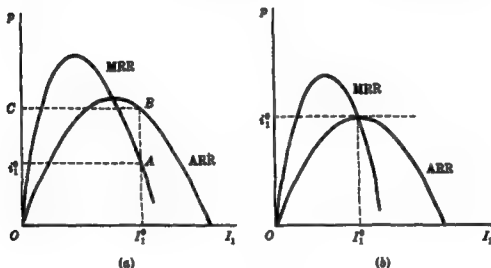
وان

(٢٧-١٢)

$$\frac{dI_1}{dI_1} = \frac{1}{h''(I_1)} < 0$$

فلو تحقق شرط الدرجة الثانية فإن (١٢-٢٢) سوف تكون سالبة أى زيادة فى معدل الفائدة سوف يجعل صاحب الوحدة مضطرا لتخفيض منصرفات استهلاكه .

وبوضح لنا الشكل (١٢-٢) بعض صور (اشكال) دالتى متوسط العائد الداخلى ARR والعائد الداخلى الحدى MRR .



شكل (١٢-٢)

فكلا المعدلين (المعدل المتوسط والمعدل الحدى) سوف يزداد ثم يهبطا القمه ثم يعمدا للانخفاض كلما ازدادت الاستثمارات فلو كان معدل الفائدة هو r_1 فإن صاحب الوحدة سوف يستثمر مبلغ I_1^* من الرهالات . فمن اجل هذا المستوى من الاستثمارات يكون معدل طائد السوق مساوى لمعدل العائد الداخلى الحدى (وهذا شرط الدرجة الاولى) ، ويكون المعدل الداخلى الحدى فى تناقص (وهذا شرط الدرجة الثانية) وتكون كامل تكلفة الربح معطاة بالساحة OI_1^*A ويكون كامل عوائده معطاة بالساحة OI_1^*BC ويكون صافى عوائده معطاة بالساحة I_1^*ABC فتحت نظام المنافسة الكاطة سوف تساق صافى عوائد مثل الوحدات لكل منها على اسفل (او ازيداد) حتى يصبح صفرا وذلك بسبب دخول $entry$ (او خروج $exit$) وحدات اخرى (بصور الشكل (١٢-٢ب) توازن المنافسة على المدى الطويل ويكون استثمارات مثل الوحدات المثلى هي I_1^* ويكون معدلى متوسط وحدى العائد الداخلى متساويين ويكون متوسط معدل العائد الداخلى مساويا الان لمعدل الفائدة .

١٢ - ٤ تحديد معدل الفائدة : INTEREST-RATE DETERMINATION

ان من الممكن الاستفادة من طرق تحاليل التوازن الجزئى وتوازن الاسسواق المتعددة فى اسواق السندات وان من الممكن ادخال تحديد معدل الفائدة ضمن عليه التسعير العام ويمكن الحصول على قياس قريب جدا من التحاليل المبكرو لتوازن السوق اذا استخدمنا ارصدة الاقتراض loanable funds بدلا من السندات كسلعة معروضة للبيع^(١) فالطلب على السندات (او عرض) يكون مطابقا لعرض ارصدة الاقتراض (او الطلب) فمعدل الفائدة هو سعر استخدام ارصدة الاقتراض لفترة زمنية معينه ونعبر بالطريقة التقليدية عن معدلات الفائدة ككسب للمبالغ المقرضه ولكن يمكن التعبير عنها فى حدود النقود الحسابيه money of account مثل باقى الاسعار الاخرى .

دع (100 ريال) تخدم كوحدة قوة الشراء فمعدل الفائدة i_t يكون عندئذ مطابقا (معادلا) لسعر $100/i_t$ لكل وحدة من وحدات قوة الشراء .

اولا ، اعتبر تحاليل التوازن الجزئى لسوق ارصدة الاقتراض ضمن شروط توازن القسرد المشتق فى الفصل (٢-١٢) و (٣-١٢) يمكن التعبير عن فائض الطلب الحالى لارصدة الاقتراض من قبل كل مستهلك وذلك بدلالة معدلات الفائدة الجارية والمتوقعة لانه من الاسهل استخدام دوال فائض الطلب بدلا من دوال العرض والطلب لان المستهلكين واصحاب الوحدات قد يطلبوا ارصدة اقتراض عند معدل الفائدة ويعرضوها عند معدل فائدة اخر .

يجب صياغة نظرية توقعات معدل الفائدة قبل ان نحدد توازن السوق ومن الممكن الاستفادة من نظريات توقع منطقى فاحد الاحتمالات هو افتراض ان الافراد يتوقعون ان تكون معدلات الفائدة فى المستقبل ثابتة عند مستوى معين ثابتة فى الزمان ضمن المعدلات الجارية ، عندئذ معدلات الفائدة المستقبلية عندئذ فى دوال فائض الطلب الجارى كنواتب بدلا من متغيرات . هناك احتمال اخر هو ان تكون معدلات الفائدة فى المستقبل مساوية لمعدلات الفائدة الحالية $i_1 = i_2 = i_3 = \dots$ وهناك ايضا احتمالا اخر هو ان التوقع بان التغير المطلق الجارى لمعدل الفائدة سوف يتحقق فى المستقبل :

$$i_t = i_0 + \delta(i_1 - i_0) \quad \text{او على وجه العموم} \quad i_1 - i_0 = i_2 - i_1 = i_3 - i_2 = \dots$$

فكل واحد من هذه الافتراضات يسمح لفائض طلبات الافراد بان يكون بدلالة معدل الفائدة الجارى فقط وينتهى دالة فائض الطلب الاجمالى بالحصول على حاصل جمع دوال الافراد وبما ان فائض طلبات الافراد قد حولت الى دوال خاصه بمعدل الفائدة الجارى

(١) لقد افترضنا فى التحاليل الراهته انه لا توجد نقود متداولة circulating money ولكن ارصدة الاقتراض تمثل عامة قوة الشراء معبرا عنها فى حدود النقود الحسابيه .

قبل القيام بتخطيط الاحتمال ، فانه ليس من الضروري ان يخطط الافراد لافاق زمنيته باطوال متساوية فيكون معدل الفائدة الجارى المتوازن هو ذلك المعدل الذى يكون عنده فائض الطلب لارصدة الاقتراض الجارية تساوى صفر فهو يمكن التفصيل الزمني time preference وانتاجه الاستثمار فى حالة التوازن يكون معدل التفصيل الزمنى لكل مستهلك ومعدل العائد الداخلى الحدى لكل منتج صافيا لمعدل الفائدة • ويمكن توسيع نظرية اوازن الاسواق المتعددة لاحتوى على معدل الفائدة وتوقعات الفترات المتعددة ، فيجب تقديم نظريات الاسعار وتوقعات معدل الفائدة ، لكى تسمح لفائض طلبات الافراد لكل سلعة وكذلك ارصدة الاقتراض بان تكون بدلالة الاسعار الحالية ومعدل الفائدة الجارى فقط ^(١) ومن ثم نقرر توازن الاسواق المتعددة بالتطلب بان يكون فائض الطلب لكل سلعة ولكل ارصدة الاقتراض صافيا لصفر فى نفس الوقت •

لقد تركنا صياغة المتطلبات الرياضية للحالات الخاصة بتوازن السوق المنفردة والاسواق المتعددة كتمين للقارى •

١٢ - • نظرية الاستثمار والدور الزمنى :

INVESTMENT THEORY AND THE ROLE OF TIME

تتميز نظرية الاستثمار بالحقيقة التى تنص على انه لا بد من مضي وقت بين استعمال الداخلى وبين الحصول على العنصر المرفوع من الخوازم بطريقة الفترات المتعددة تصل الى حبس او ايهام بعض مفاهيم وقت الانتاج وزمنه فالتغيرات سوف تحدث بوقت زمنى معين dated ولكن تغيرات الايرادات والاستثمارات قد حددت بوحدات زمنية متكاملة فالتعريف المنفصل او المتميز للزمن سوف يجعل من الصعب التعامل مع المسائل التى يكون فيها مضي الوقت الذى يتم فيه استثمارات الداخلى مهم جدا • فالادوات الضرورية للمعالجة المتواصلة للزمن قد طورت وطلبت فى هذا الفصل فالتطبيقات والاستعمالات تعطينا امثلة لحالات الداخلى والخوازم فى وقت محدد تماما وحالات الداخلى المتصلة والخوازم فى وقت محدد تماما وحالات الداخلى فى وقت محدد تماما والخوازم المتصلة •

the point-input-point-output, continuous-input-point-output, and point-input-continuous-output cases.

فالتحليل الاجهزة المتينة فى الفصل (٦-١٢) تعطى امثلة لحالة الداخلى المتصلة

(١) راجع الكتاب التالى من اجل نظرية معينة لتوقعات الاسعار :

J. R. Hicks, *Value and Capital* (2d ed., Oxford: Clarendon Press, 1946), chap. XVI

والخوارج المتصلة continuous-input-continuous-output .

التخفيض والتركيب المستمر Continuous Compounding and Discounting

نفترض هنا ان الزمن يكون متصلا وان الصفقات قد تتم عندى اى نقطة من الزمن فالفترة الزمنية مثل السنة الواحدة تكون ضرورية لتعطى وحدة نستطيع ان نقيس بها الزمن او الوقت ولكن ليس لها اى اهمية اخرى . وما ان مضى الوقت elapsed time يكون الان بصفة متغير من المتغيرات فاننا ندع $t = 0$ تمثل الزمن الحاضر وتكون القيمة $t = \tau$ تمثل نقطة ما فى فترة من فترات الزمن τ عندئذ حيث ان τ لا يحتاج لان تكون عدد صحيحا integer .

فالاجراءات المتبعة فى الفصل (١٢ - ١) لا تصح بتحديد القيم الحالية والمركبة لمجموعات مستحقة فى الفترات التى لا تكون فيها t عددا صحيحا ولاننا افترضنا ان الزمن يكون متغيرا متصلا فان الفائدة سوف يفترض ان تكون مركبة باستمرار (فائدة مركبة باستمرار) فلو كانت الفائدة فائدة مركبة مرة واحدة فى السنة فان اى مبلغا اوليا w سوف يزداد الى $w(1+t)^t$ فى عدد t من السنوات فلو كانت الفائدة مركبة مرتين فى العام فان نصف معدل الفائدة السنوى سوف يستعمل لكل ستة اشهر وسوف تزداد w الى $w(1+t/2)^{2t}$ فى عدد t من السنوات .

وهوذا اذا كانت الفائدة مركبة عدد n فى العام ، فان w سوف تزداد الى $w(1+t/n)^{nt}$ فى عدد t من السنوات .

ونحصل على اثر التركيب المتصل continuous compounding بجعل n يقترب من ∞ دع $z = (1+t/n)^n$ فبدلا من ايجاد $\lim_{n \rightarrow \infty} (z)$ فانه من الافضل ان نأخذ اللوغاريتم الطبيعي ثم نجد $\lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(z)]$ فيمكن كتابة اللوغاريتم الطبيعي كخارج قسمه دالتين بدلالة n :

$$(٢٨ - ١٢) \quad \ln(z) = nt \ln(1+t/n) = \frac{\ln(1+t/n)}{1/nt} = \frac{h(n)}{g(n)}$$

فتجد ان كلا من المقام والبسط فى (٢٨ - ١٢) يقترب من صفر كلما اقتربت n من ∞

وسوف نوظف قاعدة لى هوبتال L'Hôpital's rule (١) لايجاد الجواب limit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(z)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h'(n)}{g'(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(t/n^2)/(1+t/n)}{-(1/n^2)t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{1+t/n} = t$$

وحيث ان اللوغاريتم الطبيعي يمثل دالة متصلة ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

حيث ان العدد الاصم (الغير جذرى) $e \approx 2.71828$ يكون القاعد لنظام اللوغاريتمات الطبيعية .

فلو كانت الفائدة مركبة بانتصا ، فان قيمة المبلغ الرئيس والربح المركب بعد t من السنين للاستثمار الحالى w هو $w e^{it}$ حيث ان i هي معدل الفائدة فى السنة والذى افترض فيه عدم التضخم ، وحيث ان t قد تاخذ اى قيمة غير سالبه . فالقيمة الحالية للمبلغ w مدفوعا عند حلول الوقت t يكون $w e^{-it}$ لان اى استثمار حالى بمبلغ $w e^{-it}$ فى السندات سوف تكون له قيمة مساوية ل w عند حلول الوقت t .

Point and Flow Values

القيم المتوقعة والقيم عند نقطة ما فى الزمن :

لقد افترضنا ان الانتاج والاستهلاك يحدثان باستمرار وانتصا عبر الزمن وذلك ضمن اطار الفترات المتعددة . ولكن تشتري الدواخل وتتحمل التكاليف ونعاى الخواارج وتحقق الايرادات وذلك فقط فى فترات السوق المنفصلة او المعيزة فهذه القيم عند نقطه ما فى الزمن (point values) يمكن تعميمها وبسهولة لتغطى الاطار المتصل فالصفقات قد تحدث فى اى نقطه من الزمن ، وقد تكون قيمها بدالة الوقت الذى حدثت عنده . وللتوضيح دع R_T تكون الايرادات المحققة فى الوقت T ودع R_T تكون معطاة بالدالة المتصلة $R(T)$ فتكون القيمة الحالية للايرادات هي $R(T)e^{-iT}$ ويكون اشتقاقها الزمنى هو :

$$\frac{d[R(T)e^{-iT}]}{dT} = [R'(T) - iR(T)]e^{-iT}$$

وهذا الاشتقاق الزمنى هو الايراد الحدى المخفض بالنسبه للزمن . ومن الممكن ايضا تحقيق الدواخل والخواارج والتكاليف والايرادات كميات متدفقة فى وقت ما وذلك فى التحاليل المتصلة . فالكميات المتدفقة Flows قد تحدث بمعدلات ثابتة عبر الزمن ، او قد تكون بدالة الزمن (او الوقت) اعتبار ايرادات متصله متغيرة متفصلة . دع $R = R(t)$ تكون معدل التدفق عند الخطة t وتقاس بالريالات كل سنة .

ولكن لا يمكن تحقيق ايرادات فى لحظة واحدة . انما يمكن تحقيق ايرادات محدده وذلك عبر فترة زمنية محدده . فالقيمة الحالية للايرادات الجاريه $R(t)$ من $t = 0$ الى $t = T$ والتي ترمز لها بالرمز R_{0T} تكون معطاة بالتكامل المحدود (definite integral) :

$$R_{OT} = \int_0^T R(t)e^{-\delta t} dt$$

ويكون الاشتقاق الزمني time derivative للاريراد المنخفض الجارى:

$$\frac{dR_{OT}}{dT} = R(T)e^{-\delta T}$$

• حيث انه يمثل القيمة الحالية لمعدل التدفق عند $t = T$

فالرمز $R(T)$ استخدم ليبدل على القيمة عند نقطة ما من الزمن point value وكذلك معدل التدفق عند نقطة ما عبر الزمن • فالتمييز ببساطة يجب ان يكون واضحا من المحتوى الذى يستخدم فيه الرمز •

اعتبر الدخل الجارى $R(t)$ من صفرا الى T واعتبر ايضا القيمة عند نقطة ما عبر الزمن T بقيمة حالة متساوية :

$$\int_0^T R(t)e^{-\delta t} dt = R_T e^{-\delta T}$$

وبالحل لقيمة R_T

$$(29-12) \quad R_T = \int_0^T R(t)e^{-\delta(T-t)} dt$$

والتي ننسها بالاسهل لتحويل الكمية المتدفقة الى ما يعادلها من قيمة عند نقطة ما عبر الزمن اعتبر الان تدفق دخل ثابت a بقيمة حالة متساوية لتلك الخاصة بقيمه عند نقطة ما لفترات زمنية T عندئذ :

$$R_T e^{-\delta T} = \int_0^T a e^{-\delta t} dt = a \int_0^T e^{-\delta t} dt = a \delta$$

حيث ان :

$$(30-12) \quad \delta = \frac{1 - e^{-\delta T}}{T} = \int_0^T e^{-\delta t} dt$$

تمثل القيمة الحالية لدخل جارى بما قيمته ريال واحد اعداد T من السنين واخيرا ، بالحل لقيمة a :

$$a = \frac{1}{(e^{\delta T} - 1)} R_T$$

والتي ننسها بالاسهل لتحويل قيمة نقطة عند زمن ما الى ما يعادلها من تدفق ثابت •

داخل في وقت محدد وخارج في وقت محدد : Point-Input-Point-Output

ان اسهل مسائل الاستثمار التي يكون فيها عامل الزمن متغيرا هي تلك التي تحدث اذا استخدمت جميع الدواخل عند نقطة واحدة في وقت محدد وان جميع الخواارج قد بيعت عند نقطة متأخرة في وقت محدد ايضا • اعتبر مالكا وحدة ما متدجعا في عملية

التحليل (عملية الحصول على الدخل) فهو يقوم بشرح " برعلا من صير العُتب مقابل I_0 من الرهالات وينتظر خلال عملية التخمر . افترض ان عليه التخمر لا تكلف شيئاً بحيث ان تكاليفه الاخرى تكون هي الفائدة الفائضة فقط foregone interest على استثماره المهدى . وافترض كذلك، ان قيم بيع الدخل قيمة عند نقطة ما عبر الزمن point value تكون بدلالة طول وقت تخمرها $R(T)$.

فمسألة تحقيق الحد الامثل لمالك الدخل هي ان يختار فترة زمنية للتخمر اى ان عليه ان يختار قيمة لـ T تحقق له الحد الاعلى من القيمة الحالية لربحه :

$$\pi = R(T)e^{-\pi T} - I_0$$

وبوضع اشتقاق π بالنسبة لـ T مساوياً للصفر،

$$\frac{d\pi}{dT} = [R'(T) - iR(T)]e^{-\pi T} = 0$$

وبالقسمه على $e^{-\pi T} \neq 0$ ثم اعادة ترتيب الحدود ، نحصل على :

$$\frac{R'(T)}{R(T)} = i \quad (١٢-٣)$$

لمالك المشروع يجب ان يساوى معدل العائد الحدى الى متى له بالنسبة للربح $[R'(T)/R(T)]$ بمعدل التكلفة الحديه النسبيه بالنسبه للزمن (i) .
ويطلب شرط الدرجة الثانية ان :

$$\frac{d^2\pi}{dT^2} = [R''(T) - 2iR'(T) + i^2R(T)]e^{-\pi T} < 0$$

وبالتعويض من (١٢-٣) لـ i وبالضرب $e^{\pi T}/R(T) > 0$

$$\frac{R''(T)R(T) - [R'(T)]^2}{[R(T)]^2} < 0 \quad (١٢-٣٢)$$

وهذه هي اشتقاق $R'(T)/R(T)$ فمعدل العائد الحدى النسبى بالنسبة للزمن يجب ان يكون فى تناقص ، اى ان اشتقاقه يجب ان يكون سالبا . فلو تحقق كلا من (١٢-٣) و (١٢-٣٢) عند $T = T^*$ فان المكتسبات الحديه لمالك الدخل من الدخل سوف تنمو مكتسباته من استثمار $R(T)$ فى سوق السندات هذا اذا كانت فترة استثماره اصغر بقليل من T^* وسوف تكون مكتسبات اقل مكتسباته من السندات هذا اذا كانت فترة الاستثمار اكبر بقليل من T^* فمن الممكن تحديد اثر تغير معدل الفائدة على فترة التخمر بمفاضل (١٢-٣٠) فاعلا تا :

$$R''(T) dT - iR'(T) dT - R(T) di = 0$$

واضح ذلك :

$$\frac{dT}{di} = \frac{R(T)}{R''(T) - iR'(T)} < 0 \quad (١٢-٣٣)$$

نفس (١٢-٣٢) يكون موجبا • وتتطلب (١٢-٣٢) مع (١٢-٣١) ان مقام (١٢-٣٢) يكون سالبا • فأي زيادة في معدل الفائدة سوف يقود صاحب الخل الى تقصير فترات التخليل ، وان اى نقص في معدل الفائدة سوف يقوده الى تطويل فترات التخليل •

Continuous-Input-Point-Output : دواخل متصلة وخارج عند وقت محدد :

اعتبر العميل الاستثمار الذى يحصل من خلالها تكلفة مقدرة عبر الزمن مثال ذلك الشخص الذى يقوم بزرع الاشجار • فهو يقوم بشراء النباتات الصغيرة seedling بمبلغ I_0 من الريالات عند النقطة $t=0$ من الزمن وتحمل نفقات الزراعة المتدفقة والسعى تساوى $G(t)$ من الريالات فى كل سنة وذلك بينما تاخذ النباتات الصغيرة فى النمو ، ثم يقوم ببيع الخلة بمبلغ $R(T)$ من الريالات عند النقطة $t=T$ من الزمن • فتكون القيمة الحالية لربحه هى :

$$\pi = R(T)e^{-iT} - I_0 - \int_0^T G(t)e^{-it} dt$$

وبوضع اشتقاق π بالنسبة ل T مساويا لصفر ،

$$\frac{d\pi}{dT} = [R'(T) - iR(T) - G(T)]e^{-iT} = 0$$

وبالحرب فى e^{-iT} ثم باعادة ترتيب الحدود ،

$$\frac{R'(T) - G(T)}{R(T)} = i$$

فصاحب المزرعة سوف يبيع الخلة عندما يكون معدل فائدة الحدى النسبى بالنسبة للوقت غير مضمنا تكاليف الفلاحة والزراعة مساويا لمعدل الفائدة • ويتطلب شرط الدرجة الثانية بان يكون معدل فائدة الحدى الصائى النسبى فى تناقص بالنسبة للزمن • فأي زيادة فى معدل الفائدة سوف يقصر من فترة النمو •

Point-Input-Continuous-Output : دواخل فى وقت محدد وخارج متصلة :

اعتبر الان الحالة التى يحقق فيها استثمارا واحدا ولكن فى الاجهزة المضخه ايراد جاريا عبر الزمن • افترض للتبسيط ان الاجهزة تكسب ايرادا بمعدل ثابت من الرسائل فى السنة خلال حياتها مساويا ل R . وافترض ايضا ان تكلفة الاستثمار فى هذه الاجهزة تكون دالة متصلة بالنسبة لعمر الاجهزة : $I_0 = I(T)$ حيث ان $I'(T) > 0$ وتكون القيمة الحالية للربح من تشغيل الاجهزة هى :

$$\pi = \int_0^T R e^{-it} dt - I(T)$$

depreciation يمكن الآن فصل مسألة تحقيق الامتليه لصاحب الآله الى جزئين:

- (١) تحديد مستويات الداخـل والخـارج المـطـى لكل نقطة زمنيه وكذلك خلال الفترة التي تكون فيها الآله مستخدمه .
- (٢) تحديد عمـر الآله واحده او اكثر .

وتعتبر اولاً عليه تحديد مستويات الداخـل والخـارج المـطـى . ثم تحدد بعد ذلك القياس (او المعيار) لتحديد العمر الأمثل لآلة واحدة ثم لسلسلة غير متتبيه من الآلات .

The Quasi-Rent Function

(الأيجار) شبه الربح

افترض ان صاحب الآله قد قرر استعمالها من $t=0$ الى $t=T$ فاذا اعطينا هذا الاقرار فانه من الممكن اجمال التكلفة البديهيومية الخردة لآلة وتكون مشكلة صاحب الآله هي تحقيق الحد الاعلى من القيمة الحالية لتدفق شبه الربح من تشغيل الآله ، أي الفرق بين القيمة الحالية لتدفق إيرادات البيع والقيمة الحالية لتدفق التكلفة المتغيرة variable cost وبمـا ان الإيرادات والتكاليف عند نقاط زمنيه مخظفه تكون مستقلة في الحالات المعتبره هنا ، فان صاحب الآله يستطيع تحقيق الحد الاعلى من القيمة الحالية لتدفق شبه الربح الخاص به خلال عمر الآله وذلك بتحقيق الحد الاعلى لمعدل تخفيض تدفق شبه الربح عند كل نقطه زمنيه وزيادة على ذلك وبما ان عامل التخفيض " e " يكون ثابتاً لاى قيمه ثابتة لـ t فان صاحب الآله يستطيع الوصول الى النتيجة المطلوبة بتحقيق الحد الاعلى من معدل تدفق شبه الربح عند كل نقطه زمنيه بدون تخفيض .

فيكون معدل تدفق شبه الربح عند اللحظة t هو Z_t :

(١٢-٣٦)

$$Z_t = p q_t - C(q_t) - M(q_t, t)$$

وبوضع اشتقاق Z_t بالنسبة لـ q_t مساوياً لصفر ،

$$\frac{\partial Z_t}{\partial q_t} = p - \frac{dC_t}{dq_t} - \frac{\partial M_t}{\partial q_t} = 0$$

(١٢-٣٧)

$$p = \frac{dC_t}{dq_t} + \frac{\partial M_t}{\partial q_t}$$

فصاحب الآله يساوى معدل تدفق تكلفته الحديده ، والتي تكون في هذه الحالة حاصل جمع تكلفات الداخـل والمحافظة على الآله ، بالمعدل الثابت لتدفق الإيراد الحدى ، P ويمكن للقارئ التحقق من ان شرط الدرجة الثانية يتطلب بان يكون حاصل جمع التكاليف الحديده في ازدياد مع الخارج .

وبوضع اشتقاق π بالنسبة لـ T مساويا للصفر ،

$$\frac{d\pi}{dT} = Re^{-iT} - I'(T) = 0 \quad \text{وكذلك :}$$

$$(٣٤-١٢) \quad Re^{-iT} = I'(T)$$

وتحدث الحياة المظلي للأجهزة عند النقطة التي تكون عندها القيمة الحالية للايسرادات الإضافية من زيادة المئانه مساوية للتكلفة الحدية للمئانه :
ويطلب شرط الدرجة الثانية لتحقيق الحد الاعلى بان يكون :

$$(٣٥-١٢) \quad \frac{d^2\pi}{dT^2} = -iRe^{-iT} - I''(T) < 0$$

وسوف يكون من الضروري تحقيقه اذا كانت التكلفة الحدية للمئانه في تزايد اي انه اذا كانت $I''(T) > 0$ ويتغاضل (٣٤-١٢) غاضلا تاما تم حلها لـ dT/di

$$\frac{dT}{di} = \frac{TRe^{-iT}}{-iRe^{-iT} - I''(T)} < 0$$

لان المقام يكون سالبا بـ (٣٥-١٢) فاي زيادة في معدل الفائدة سوف يخفّر من المئانه ، وان اي تخفيض سوف يزيد من المئانه .

١٢ - ٦ تقاعد وابدال الأجهزة المتينة :

RETIREMENT AND REPLACEMENT OF DURABLE EQUIPMENT

ان اتخاذ اعتبارات اخرى للأجهزة المتينة المبنيه على مجموعة افتراضات اخرى تمنحنا اعطة الدواخل المتصلة والخارج المتصلة .

Assumptions افتراضات :

اعتبر انه تستخدم لانتاج خارج واحد هو Q يباع بسعر متناقص p غير قابل للتغير عبر الزمن . دع q_t تشير الى تدفق الخارج عند اللحظة t من الزمن فيكون الايراد المقابل المتدفق هو $p q_t$ فهذه الاله قد تم شراؤها عند $t = 0$ بالتكلفة الثابتة I_0 فالتكلفة المتدفقة للداخل C_t تكون بدلالة q_t وتكون التكلفة المتدفقة للمحافظة على الاله هي M_t بدلالة كلا من تدفق الخارج وعمر الاله :

$$C_t = C(q_t) \quad M_t = M(q_t, t)$$

ومن الممكن بيع الاله كخردة scrap (تشليح) وذلك عندما يرغب صاحبها في عدم استعمالها للانتاج ، فتكون نية الخردة لالة عبر الزمن T, S_T دالة متناقصة بالنسبة لعمر الاله : $S_T = S(T)$ بحيث ان $S'(T) < 0$ فالاشتقاق $S'(T)$ يعطى معدل الحسارة لقيمة السوق بسبب التمرار به استعمال الاله ويسمى " نقص القيمة "

افترض ان (١٢-٣٧) قد يمكن حلها للقيمة المظلي لـ q بدلالة t وبمجموعتي هذه الدالة في (١٢-٣٦) فانه يمكن التعبير عن القيمة المظلي لشبه الربح الجارى بدلالة t :

$$Z_t = Z(t)$$

فدالة شبه الربح تعطى شبه الربح الامثل الذى يمكن الحصول عليه عند كل نقطة من الزمن من تشغيل الآلة . وهذه الدالة مبنية على الاسس التى اركز عليها الخليط الامثل للدواخل والخارج وتتحقق دالة شبه الربح لجميع قيم t وسوف لا يتأثر شكلها العام باختيار قيمة معينة لعمر الآلة لهذا فان دالة شبه الربح قد تستعمل لتحليل عمر الآلة بدون تقدير واضح للخارج والايرادات والتكاليف .

Retirement of a Single Machine

تقاعد آلة بمفردها :

اعتبر ان احد اصحاب الوحدات الانتاجية يرغب فى شراء آلة واحدة ، ويرغب نفسى استثمار شبه الربح الجارى له فى سوق السندات بمعدل الفائدة الجارى ويرغب فى استثمار قيمة الآلة الخردة فى سوق السندات عند نهاية عمر الآلة ثم يرغب بعد ذلك نفسى ان يتقاعد . فالقيمة الحالية لربحه من تشغيل الآلة هو القيمة الحالية لشبه ربحه الجارى ، ناقصا تكلفة الآلة ، زائدا القيمة الحالية لما يستلمه مقابل الآلة الخردة :

$$(12-38) \quad \pi_1 = \int_0^T Z(t)e^{-\delta t} dt - I_0 + S(T)e^{-\delta T}$$

وبالقيام بمعطية المتفاضل ،

$$\frac{d\pi_1}{dT} = [Z(T) - \delta S(T) + S'(T)]e^{-\delta T} = 0$$

$$(12-39) \quad Z(T) + S'(T) = \delta S(T)$$

فصاحب الآلة سوف يستغنى عنها (يتقدها) عندما تكون شبه الربح الحدى ناقصا عن نفق نقص القيمة مساويا لعائد الفائدة من استثمار قيمة الآلة كخردة فى سوق السندات . ويمكن للفارى ان يتحقق بان شرط الدرجة الثانية يتطلب بان يتناقص شبه الربح ناقصا عن نفق نقص القيمة بسرعة اكبر من عائد سوق السندات البديل ويتطلب ايضا بان اى زيادة نفسى معدل الفائدة سوف يعجل من تقاعد الآلة .

Replacement for a Chain of Machines

إبدال سلسلة من الآلات :

اعتبر صاحب الوحدة الانتاجية الذى يخطط لافق زمنى لانهائى وسلسلة من الآلات تحل كل واحدة مكان واحدة اخرى . وافترض ان دالة شبه ربحه ، وتكلفته المبدئية ودالة

قيمة الآله كخردة تكون هي نفسها لكل ما عدا التواريخ وافترض ايضا ان مصر الآلات
المختلط يكون متطابقا فتكون القيمة الحالية للريح من تشغيل الآله الاولى معطى بـ
(١٢-٣٨) وتكون القيمة الحالية للارباح من تشغيل الآلات الثانية والثالثة هما :

$$\pi_2 = \int_T^{2T} Z(t-T)e^{-\delta t} dt - I_0 e^{-\delta T} + S(T)e^{-\delta T} = \pi_1 e^{-\delta T}$$

$$\pi_3 = \int_{2T}^{3T} Z(t-2T)e^{-\delta t} dt - I_0 e^{-\delta 2T} + S(T)e^{-\delta 2T} = \pi_1 e^{-\delta 2T}$$

وتكون عامة :

$$\pi_k = \left[\int_0^T Z(t)e^{-\delta t} dt - I_0 + S(T)e^{-\delta T} \right] e^{-\delta(k-1)T}$$

فتكون القيمة الحالية للارباح من الآلات المتتالية متطابقة ما عدا لقيمة عوامل التخفيض التى
تعكس الوقت الذى اكتسب خلاله ارباح هذه الآلات .
فتكون القيمة الحالية لاجمالى الربح من سلسلة لانهاية من الآلات هي :

$$\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k = \frac{\int_0^T Z(t)e^{-\delta t} dt - I_0 + S(T)e^{-\delta T}}{1 - e^{-\delta T}}$$

حيث ان $1/(1 - e^{-\delta T})$ هو حاصل الجمع اللانهاى للمتواليه الهندسيه
(١ + $e^{-\delta T}$ + $e^{-\delta 2T}$ + $e^{-\delta 3T}$ + ...) ويوضع اشتقاق π بالنسبه لـ T مساويا لصفر ،

$$\frac{d\pi}{dT} = \frac{[Z(T) - \delta S(T) + S'(T)]e^{-\delta T}(1 - e^{-\delta T}) - I_0 e^{-\delta T} \left[\int_0^T Z(t)e^{-\delta t} dt - I_0 + S(T)e^{-\delta T} \right]}{(1 - e^{-\delta T})^2} = 0$$

وبالضرب فى $e^{\delta T}(1 - e^{-\delta T})$ ثم باادة ترتيب الحدود ،

$$(١٢-٤٠) \quad Z(T) + S'(T) = \frac{1}{\delta} \left[\int_0^T Z(t)e^{-\delta t} dt - I_0 + S(T) \right]$$

حيث ان δ كما مرقت بـ (١٢-٣٠) هي القيمة الحالية لدخل جارى بها قيمته ربحا
واحد ولدة T من السنين وسوف تبدل الآله عندما يكون المعدل الحدى لتدفق شبه
الريح السنوى صافيا نفس القيمة مساويا للقيمة الحالية لمتوسط العائد السنوى للآله
الجديدة صافيا تكلفه استثمارها ناقصا قيمة الآله كخردة لآله القديمه ويعطى الحد بين
توسين طى الجانب الايمن لـ (١٢-٤٠) العائد لعدد T من السنين وبالقسمه طى
 δ فذلك يحولها الى الاساس السنوى فشرط الدرجة الثانيه يتطلب بان يكون العائد
الحدى لآله القديمه فى تناقص بسرعه اكبر من متوسط العائد لآله الجديده .

ان شرط الدرجة الاولى لحالة العدد اللانهاى للآلات فى (١٢-٤٠) يكون

مخطفا تماما من شرط الدرجة الاولى لحالة الاله الواحده في (١٢-٣٩) (يعكس الفرق بينهما الفرق بين الخيارات options المتوفره لمصاحب الالات ففى حالة الاله الواحده يكون له حق الاختيار بين استمرار تشغيل الاله واستثمار قيمتها كخرد فى سوق السندات • اما فى حالة العدد اللانهائى للالات فان له الحق فى الاختيار بين تشغيل اله تسامحه وتشغيل اله جديدة •

EXHAUSTIBLE RESOURCES

١٢ - ٧ الموارد القابلة للنفاذ :

اعتبر صاحب الوحدة الانتاجيه الذى يقوم باستخلاص خارج من مورد قابل للنفاذ مثل منجم نعم او بئر من ابار الزيت واعتبر ايضا ان افقه الزمنى يمتد عبر n فترة زمنيه منفصله فكلمة "قابل للنفاذ" "Exhaustible" فى المضمون الحالى تعنى ان عملية الاستخلاص تكون محدده باجمالى ثابت ومحدد فصاحب المورد يفترض فيه انه على علم بأسعار خارجه الحالى والمستقبلية وان يكون له اتصال بسوق السندات تنافس بمعدل فائدة غير متغير وللتبسيط افترض ان تكلفة الاستخلاص (الاستفراج) لكل فترة زمنيه يعتمد على الكمية المستخلصة خلال تلك الفترة حسب دالة التكلفة $C = C(q_t)$ حيث ان $C'(q_t) > 0$ فالنتائج المبهمه التى توصلنا اليها فيما يلى سوف تتحقق لدوال تكلفة اكثر تعقيدا •

فصاحب المورد يرغب فى صيغة خطه تمكنه من تحقيق الحد الاطلى للقيمه الحاليه لرحبه من الاستخلاص ولذا فانه يكون الدالة :

$$Z = \sum_{t=1}^n [p_t q_t - C(q_t)](1+i)^{-t} + \lambda \left(q^0 - \sum_{t=1}^n q_t \right)$$

حيث ان q^0 تمثل الكمية المستخلصة الاجماليه ووضع الاشتقاقات الجزئيه مساويه لمعره

$$\frac{\partial V}{\partial q_t} = [p_t - C'(q_t)](1+i)^{-t} - \lambda = 0 \quad (t = 1, \dots, n)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = q^0 - \sum_{t=1}^n q_t = 0$$

$$[p_t - C'(q_t)](1+i)^{-t} = \lambda \quad (t = 1, \dots, n) \quad \therefore (١٢-٤١)$$

وتتحقق شروط الدرجة لثانيه نتيجه لافتراض تزايد التكلفة الحدييه MC وتتطلب شروط الدرجة الاولى (١٢-٤١) بان تكون القيمه الحاليه للفرق بين السعر و MC هى نفسها لكل فترة زمنيه ويقدم مقدار المضروب λ مقياسا لندرة هذا المورد • فلو كان السعر ثابتا عبر الزمن ، فان الخارج سوف ينخفض عبر الزمن من اجل تحقيق (١٢-٤١) لذا فان صاحب المورد سوف يقوم بانتاج الخارج فى الوقت الراهن بسبب فرصة فى الاستثمار فى

سوق السندات فمن أجل الحفاظ على خارج مساو للأجيال الصاعدة ، أي ان $q_t = q$ $(t = 1, \dots, n)$. فان السعر يجب ان يزداد عبر الزمن بمعدل بدرجة كافية لكي يسمح للهبوط بين السعر والتكلفة الحدية بالازدياد عند معدل الفائدة p_{t+1} ، $p_{t+1} = p_t(1+i) - IC'(q)$. فمعدل الزيادة في السعر يقترب من معدل الفائدة وذلك كلما ازدادت t فالسعر يجب ان يزداد بسرعة اكبر لتؤان الخارج ليزداد عبر الزمن .

HUMAN CAPITAL

١٢ - رأس المال الإنساني (البشري)

انه ليس من الضروري بان تكون دواخل العمل Labor inputs باسواق وعدم تغير طاقة انتاجيه . ففي معظم الحالات يكون من الممكن الاستثمار في رأس المال البشري ، والحس physical ويشق مائد مثل هذه الاستثمارات من قيمه انتاج العمل المتزايد increased labor productivity فتكلفة الاستثمار في رأس المال البشري تكون من نوعين :

(١) التكاليف المباشرة direct costs مثل رواتب (اجور) المهندسين والكسب الدراسي .

(٢) تكلفة الارصده الهديله للمكتسبات الضائعة . فلولم يكن الطالب في الجامعة للدراسه او للتدريب فانه قد يقدر على انتاج خارج وكسب دخل ونوضح تحاليل الاستثمار في رأس المال البشري بثلاثة مسائل . فالمسالة الاولى تتطلب الاجابه بنعم او بلا لما اذا كان يجب للفرد ان يواصل تعليمه او يدخل القوة العماليه على اساس تسرع وقتي كلي full-time وسوف نقدم حسابات معدلات العائد للاستثمار في رأس المال البشري في هذا المضمون . اما المسالة الثانيه فانها تناقش وتحسب تكاليف تدريب العمال لمقابله متطلبات اعمال معينه والمسالة الثالثه عبارة عن تطوير نموذج (موديل) يسمح بتحديد الاستثمار الامثل في رأس المال البشري خلال كامل الدورة التي يكسب خلالها الفرد .

Investment in Education

الاستثمار في التعليم

افترض ان على شخص ما ان يقرر ما اذا كان عليه ان يدخل قوة العمل وان عليه ان يواصل تعليمه فهو في الحقيقة يختار بين دخلين جاريين . فالشكل (٣-١٢) يعطى مثالا افتراضيا . فالقرار يجب ان يتخذ حالما يتخرج هذا الشخص من المدرسه الثانيه في الوقت $t=0$ ، فالدخل الجارى سوف ينتهى بتقاعده عند $t=T$ ، فلودخل هذا الشخص القوة العماليه حالا ، فان دخله الجارى يكون $g(t)$. ولكنه اذا دخل الجامعه

فان دخله الجارى يكون $f(t)$ لذا فان الجامعة تستدعى وتتطلب الاستثمار فى رأس المال البشرى • ففرق الدخل :

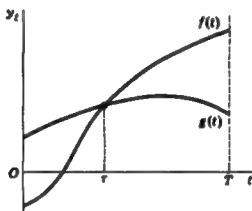
$$\int_0^T [g(t) - f(t)] dt$$

يكون هو تكلفته ويكون الفرق :

$$\int_T^T [f(t) - g(t)] dt$$

هو فائده تكلفه الاستثمار تستلزم كلا من التكاليف المباشرة وتكاليف العكاسب الضائعة •
وحدد معدل فائد الاستثمار فى التعليم الجامعى ، المرموز له بالرمز r بمساواة القيم
الحالية لتكاليفه وموائده :

$$\int_0^T [f(t) - g(t)] e^{-rt} dt = 0$$



شكل (١٢ - ٣)

فهذه المعادلة يمكن حلها لقيمة المتغير الوحيد فيها وهو r فالقرار الاخير
سوف يتخذ بمقارنة r بمعدل فائدة السوق i فلو كان $r > i$ فان الجامعة
تكون استثمارا مرغوبا ولكن اذا كان $r < i$ فانها لا تكون استثمارا مرغوبا •

اعتبر المثال البسيط التالى حيث ان $T = 50$ و $f(t) = 800e^{0.12t}$ و
و $g(t) = 2400e^{0.08t}$ وهو مختلف من المثال المعطى فى الشكل (١٢ - ٣)
فهنا $r = 27.5$ ولذا فان المسألة السابقة تكون كالتالى :

$$\int_0^{50} [800e^{0.12t} - 2400e^{0.08t}] e^{-rt} dt = 800 \left[\frac{(e^{0.12-27.5} - 1)}{0.12 - r} - \frac{3(e^{0.08-27.5} - 1)}{0.08 - r} \right] = 0$$

والى يمكن حلها هو $r = 0.088$ فبكون التعليم الجامعى استثمارا مرغوبا فيه اذا كانت
معدلات الفائدة اقل من 8.8% •

Investment in Training

الاستثمار في التدريب :

اعتبر وحدة إنتاج تنافسية توظف قوة عامال متجانسة وتدفع اجرا مساويا لقيمة ناتجها الحدى ولتوضيح الاستثمار في التدريب ، افترض ان الحكومة (الدولة من الوحيدة الانتاجية ان توظيف بعض اعضاء مجموعة من المجاميع المعده والتي تكون قيم ناتجها الحدى المبدئى ادى بكثير جدا من معدل الاجر wage rate فبالتحديد ، دع سعر الخارج يساوى الوحدة (ريال واحد فقط) وافترض ان MP لفرد من افراد المجموعه المعده هو $MP = f(t)$ حيث ان $f(t) < w$ عندما تكون $t < T$ وان $f(t) = w$ عندما تكون $t \geq T$ فتكلفة التدريب V تكون هى القيمة الحالية للفرق بين معدل الاجر w و $f(t)$:

$$V = \int_0^T [w - f(t)] e^{-\delta t} dt$$

فتوزيع هذه التكاليف بين الوحدة الانتاجية ، والفئه المعده والدوله سوف يعتمد على الوضع القانونى .

فكامل التكلفة سوف تتحمله الفئه المعده فى المجتمع التنافسى بدون اى تدخل مسن الحكومة . فالوحده الانتاجية على سوا^٥ بين توظيف عامل مدرب (بد فاعله ماهرة) باجر w ، وعامل من الفئه المعده باجر $f(t)$ هناك احتمال اخر هو ان تدع الدوله تقوم بدفع تكاليف التدريب للوحده الانتاجية ومن ثم تدع الوحدة الانتاجية تقوم بدفع العامل من الفئه المعده الاجر w .

اعتبر المثال الذى تكون فيه $f(t) = w(1 - e^{-\delta t})$ حيث ان t تقاس بالسنوات فمعن الواضح ان $f(t)$ تقرب من w ، $f(t) \rightarrow w$ كلما اقتربت t من ∞ ونفسى الحقيقة فان $f(t)$ سوف تكون تقاربها بد رجه اكبر $f(5) = 0.99326w$ فالقيمة الحالية لتكلفة التدريب لفترة عشرين سنة توظيف بمعدل فائده يساوى 8 تكون ،

$$\int_0^{20} [w - w(1 - e^{-\delta t})] e^{-\delta t} dt = w \int_0^{20} e^{-1.08t} dt = \frac{w(1 - e^{-21.6})}{1.08} \approx 0.926w$$

فالقيمة الحالية لتكلفة التدريب تساوى اقل بقليل من اجر سنة واحده .

Earnings-Cycle Investment

استثمار دورة الكسب :

ان راس المال البشرى، مثل راس المال الحسى ، معرض لتقصى فى القيمة عبر الزمن فعمرة الاس قد تكون قيمتها اقل من عمرة اليوم . ففى الخائب يمكن موازنة تقصى القيمة وزيادة مخزون الفرد من راس المال البشرى وذلك من خلال الحصول على تعليم اعلى .

تتعدد المعدلات العظمى للاستثمار في رأس المال البشري خلال دورة كسب الانصاف تقدم مسألة مهمة للتحاليل الاقتصادية^(١)

احضر شخصاً ما بحيثان دورة كسبه تمت من $t=0$ الى $t=T$ ورمز لمخزونه من رأس المال البشري عند نقطة ما خلال دورة كسبه بالرمز K_t

$$K_t = K_{1t} + K_{2t} \quad (٤٢-١٢)$$

حيثان الارقام عند اسفل الحرف 1، 2 تشير الى كميات رأس المال البشري السنوي استخدمت في توليد الدخل وفي توليد رأس مال بشري اكثر وذلك على التوالي . فيكون الدخل عند الزمن t هو :

$$y_t = aK_{1t} \quad (٤٣-١٢)$$

حيثان $a > 0$ فـرأس المال البشري الجديد سوف ينتج من رأس المال البشري الحالي وذلك حسب دالة الانتاج المقمرة بانضباط .

$$\dot{K}_t = aK_t^b \quad (٤٤-١٢)$$

حيثان $a > 0$ و $0 < b < 1$ وتعطى المعادلة الظاهلية التالية معدل التغير في مخزون رأس المال البشري :

$$\frac{dK_t}{dt} = \dot{K}_t - \delta K_t \quad (٤٥-١٢)$$

حيثان δ هي معدل نقص تبة رأس المال البشري .

فكثفه الاستثمار لانـتاج رأس المال البشري C_t هي المكسبات الفائضة :

$$C_t = aK_{2t} \quad (٤٦-١٢)$$

ونعرف برنامج الاستثمار الامثل بأنه البرنامج الذي يسمى لتحقيق الحد الاكلى من القيمة الحالية لدخل الفرد الجارى

$$V = \int_0^T y_t e^{-\rho t} dt \quad (٤٧-١٢)$$

تحت شرط (٤٢-١٢) وحتى (٤٦-١٢) .

ويطلب الحصول على حل متكامل لتحقيق الحد الاكلى لـ (٤٧-١٢) أدوات رياضية فوق طاقة الاسطاذة منها . ولكن بعض اوجه هذا الحل الامثل يمكن استنتاجها وحلها . فالكثفه الحديه لانـتاج وحدة من وحدات رأس المال البشري عند t يمكن

الحصول عليها بتفاضل (٤٦-١٢) تحت شرط (٤٤-١٢) :

$$\frac{dC_t}{dq_t} = \frac{a}{\alpha^{1/\alpha} \beta} q_t^{1-\alpha/\alpha} \quad (٤٨-١٢)$$

بتفاضل اكثر لـ (٤٨-١٢) نشأتان MC يكون متزايداً بالنسبة q_t ولكن يكون ثابتاً بالنسبة لـ t فافافه وحدة واحدة من رأس المال البشري عند t سيولد دخلاً

(١) انـتار Y. Ben-Porath, "The Production of Human Capital and the Life Cycle of Earnings," *Journal of Political Economy*, vol. 75 (August, 1967), pp. 352-365.

جاريا مساويا a ناقصا منه نفس القيمة \bullet وتكون القيمة الحالية للايراد الحدى هذا هي :

$$(٤٩-١٢) \quad \frac{dR_t}{dq_t} = a \int_0^T e^{-(i+\delta)\tau} d\tau = \frac{a}{(i+\delta)} (e^{-(i+\delta)T} - e^{-(i+\delta)0})$$

وبتفاضل (٤٩-١٢) اكثر نستطيع ان نشأت ان MR هذا يكون ثابتا بالنسبة لـ q_t ولكن يكون فى تناقص بالنسبة لـ f .

نقترح التجرية والملاحظة ان تكون هناك مراحل للاستثمار فى راس المال البشرى .

خلال السنوات المبكرة الاولى من الافق الزمنى يكون $MR > MC$ لـ $K_t = K_{t-1}$ فكل ما مخزون راس المال البشرى قد يستخدم فى انتاج راس مال بشرى اكثر ولم يكن دخله سوى صفرا . اما خلال السنوات الوسطى من عمره وكلما تدنى MR فان مخزون راس المال البشرى قد يستخدم لانتاج راس مال بشرى اكثر ولتوليد الدخل فى هذه المرحلة يكون $MR = MC$ فساواة (٤٨-١٢) مع (٤٩-١٢)

$$(٥٠-١٢) \quad q_t = \left\{ \frac{\alpha^{1/(1-\beta)} \beta}{(i+\delta)} [e^{-(i+\delta)T} - e^{-(i+\delta)0}] \right\}^{\beta/(1-\beta)}$$

ويمكن للقارى ان يثبت ان $dq/dt < 0$ يتدنى انتاج راس المال البشرى باستمرار بتدنى MR وذلك خلال المرحلة الثانية وفى الشهايه نصل الى نقطة ما يكون عند هذا الاضافات غير كافية لتعويض نفس القيمة اى ان : $q_t < \delta K_t$ وان مخزن راس المال البشرى يتدنى اكثر .

SUMMARY

٩ - ٩٢ ملخص ما سبق

يجب ان يكون لدى المستهلكين والمقاولين مدخل حر الى سند السوق تام التاناس وقد يكفوا مدخولاتهم ومجالات انتاجهم طوال الوقت من خلال استعارة (بيع السندات) أو اقراض - تسليف (شراء السندات) يعبر معدل الفائدة عن تكلفة الاستعارة أو الدخل من الاقتراض . لفترة واحدة ، كجزء تناسبى من الكمية المستعارة أو المعاره (المقرضه) تتحدد معدلات تائد السوق ، للدوام اكثر من فترة واحدة كتركيبات من معدلات الفائدة التى تربط بين أزواج من الفترات المتتاليه . تعرف معدلات الخصم بانها مقلوب معادلات تائد السوق المناظرة . ويمكن اختصار الدخل الكلى أو التكلفة الجارية الى عدد واحد ، قدر قيمته الحالية ، بضرب كل عنصر من عناصره بمعدل الخصم المرافق ثم تجميع النتائج .

يعبر مؤشر فائدة (ربح) المستهلك كدالة فى الكميات ذات n سـلمـه التى استهلكها خلال كل فترة من الفترات T من افق تخطيطه . فهو يهد ان يعظم مستوى

هذا المؤشر هنا بفترات عقيسد الميزانية • وهذا يتطلب ان تتساوى القيمة الحالية لانتاجه مع موارد دخله المستحقه • اذا فرض ان الاسعار تبقى ثابتة (لن تتغير) ، يمكن التعبير عن مؤشر ربحه كدالة من سرعة استهلاكه • يعرف المعدل الزمني لتفضيل المستهلك للاستهلاك خلال فترة t (أكثر منها لفترة $t > 1$) ، بأنها أقل ملاءمة سوف يقبلها كتمويض عن تأجيل قيمة الدولار الحديده لسرعة الانفاق • تتطلب شروط الدرجة الاولى لتعظيم الفائدة العقيدة أن يساوى المستهلك معدلات أفضليات الزمنيه بمعدلات عائد السوق العاطرة • يمكن تحديد الأخلال وتأثيرات المدخولات بالنسبة لتغيرات معدلات العائد بالتعامل مع حالة الفترة الواحدة •

نفترض ان يقوم العقاول بوضع خطة أنتاج لافق انتاجه تغطي L من الفترات $(L+1)$ من فترات التصويق • في الفترة t للتصويق سوف يبيع العقاول خوارج انتاج الفترة $(t-1)$ ويشتري مدخولات اللازمة بعملية الانتاج خلال الفترة t • وهو يرغب في تعظيم القيمة الحالية لما في دخله مع الخصوم بقوانين التقنية التي تعزز دالة انتاجه متعدد الفترات •

يمكن تبسيط تحليل مشاكل استثمار العقاولين بافتراض ان الاسعار الحقيقية والمتوقعة ستظل ثابتة وأنه دائماً سيجمع المدخولات وينتج المخرجات بحيث يتساوى $RPT \cdot RTS$ مع نسب السعر المنخفضة • تربط دالة استثمار فرض العقاول كل من معدلات استثماره وربيحه (دخله) بافتراض أنه ينجز هذه الاطيه الاولى • تحدد معدلات الفائدة الحديده الداخليه لكل من الدخول (الربح) بالنسبة لكل من الاستثمارات • تتطلب شروط الدرجة الاولى ان يتساوى كل من معدل عائد حدى داخلى مع المعدل المقابل لعائد السوق • وتحتم شروط الدرجة الثانيه ان يكون كسل من المعدلات الحديده الداخليه متناقصاً • يطبق التحليل العام على الحالة الخاصه :

دخول نقطة — خروج نقطة : —

يمكن ان يعد تحليل ائزان السوق المنفرد والسوق المتعدد لكى يشمل معيبدل الفائت الجارى وتوقعات الفترات المتعددة • وعند ائزان يكون كل من معدل التفضيل الزمني لكل مستهلك ومعدل العائد الداخلى الحدى لكل منتج مساوياً لمعدل الفائدة •

لقد تم تطوير بنسبه مستعرة يتركب فيها الفائدة باستمرار ، ويمكن ان تحدث فيها الصلقات التجارية (التعاملات التجارية) عند أى نقطة من الزمن ، ويمكن معالجة الزمن نفسه كمضيق • ويمكن استخدام هذه النسبه الثلاثة تطبيقات بالتتابع التاليه •
١ — نقطة دخول — نقطة خروج — بدخول ثابت وخوارج متغيرة • يتساوى معدل العائد

الحدى الداخلى مع معدل الفائدة فى نهاية فترة الاستثمار الامثل •

٢- دخول مستر - خروج نقطه بكل من الدخول والخروج متغيرين ، يكون معيار فترة الاستثمار كما هو فى (١) فيما هذا ان المعدل الحدى للعائد بحسب كسافى للتكلفه الصغيره •

٣- دخول نقطى - خروج مستر بدخول متغير وخروج ثابت ، تكون القيمه الحالبيه للدخل (الربح) الحدى عند نهاية فترة الاستثمار الامثل نتيجة لتطوّل الفترة مساويا للتكلفه الحديه لديها (لتطوّلها) •

يعطى تشغيل التجهيزات المتبينه أمّة لحالة الدخول المستر - الخروج المستر تعطى دالة (الايجار الظاهرى) اقترقى فرق بين الربح (الدخل) تدفق التكلفه المتغير عند كل لحظه من الزمن • ونحصل عليها لمساواة مجموع الدخل الحدى وتدفع التكلفه الثابته مع السمر • سيجعل الماثل آله واحده للعتاد يتساوى الايجار الظاهرى الحدى بطروحا منه نفس العائد مع فائد الفائدة البديل على قيمة الخردة (الضايف) سوف تصيدل الآله داخل سلسله محدوده عندما يتساوى الايجار الظاهرى الحدى لها بطروحا منه تدهور العائد مع متوسط صافى العائد لتكلفه الاستثمار لآلة جديدة •

يمثل الاتفاق المباشر والاستحقاقات السابقه بكلفه الاستثمار فى رأس المال البشرى ، وتكون قيمة الزيادة فى الناحيه بحمل هى العائد •

يحين معدل العائد من الاستثمار فى صلية التعليم بمساواة القيمه الحالبيه لمجالات الدخول التى سوف تستحق (تكتسب) بالتعلم وبدون تعلم • سيباشر الاستثمار اذا كان عائده يتعدى معدل الفائدة للسوق • تعطى تكلفه التدريب للمهنة بالقيم الحالبيه للفرق بين قيمة الانتاج الحدى للعامل المدرب وتلك القيمه للعامل أثناء فترة التدريب • فى نموذج بسيط لدائره استحقاقات الفرد ، يفترض ان دخل الشخص يتناسب مع مخزونه من رأس المال البشرى • يزداد المخزون خلال الاستثمار مع تكلفه الاستحقاقات السابقه ، وتقل خلال تدهور القيمه مع الزمن • يمكن استخدام المخزون الكلى لرأس المال البشرى لانتاج مزيد من رأس المال البشرى خلال المرحله المبكرة من دائره الاستحقاق • بالرغم من ذلك فانه نحمد مثل هذه المرحله يقل معدل الاستثمار فى رأس المال البشرى مع الزمن مما يطبع يكون الاستثمار أقل من النقص فى القيمة (التدهور) •

EXERCISES

12-1 Consider two alternative income streams: $y_1 = 300$, $y_2 = 321$, and $y_1 = 100$, $y_2 = 535$. For what rate of interest would the consumer be indifferent between the two streams?

12-2 A consumer's consumption-utility function for a two-period horizon is $U = c_1 c_2^{1/2}$; his income stream is $y_1 = 1000$, $y_2 = 648$; and the market rate of interest is 0.08. Determine values for c_1 and c_2 that maximize his utility. Is he a borrower or lender?

12-3 An entrepreneur invests on one marketing date and receives the resultant revenue on the next. The explicit form of his investment-opportunities function is $R_2 = 24\sqrt{I_1}$, and the market rate of interest is 0.20. Find his optimum investment level.

12-4 Consider a bond market in which only consumers borrow and lend. Assume that all 150 consumers have the same two-period consumption-utility function: $U = c_1 c_2$. Let each of 100 consumers have the expected-income stream $y_1 = 10,000$, $y_2 = 8400$, and let each of the remaining 50 consumers have the expected-income stream $y_1 = 8000$, $y_2 = 14,000$. At what rate of interest will the bond market be in equilibrium?

12-5 An entrepreneur will receive 1000 dollars at $t = 5$. Determine an equivalent constant continuous-income stream from $t = 0$ to $t = 5$ if the interest rate is 10 percent. Note: $e^{0.5} = 1.64872$.

12-6 Consider an entrepreneur engaged in a point-input-point-output wine-aging process. His initial cost is 20, the sales value of the wine is $R(T) = 100\sqrt{T}$, and the rate of interest is 0.05. How long is his optimal investment period?

12-7 An entrepreneur is engaged in a repeated point-input-point-output process. He invests I_0 dollars and receives a revenue of $R(T)$ dollars T years later. At T he will again invest I_0 dollars and receive another revenue of $R(T)$ dollars at $2T$. Assume that he repeats this cycle indefinitely. Interest is compounded continuously at the constant rate i . What is the present value of the entrepreneur's profit from such an infinite chain? Formulate his first-order condition for profit maximization. Compare this result with the first-order condition for the unrepeatable case.

12-8 An entrepreneur is engaged in tree growing. He purchases a seedling for 4 dollars, incurs a cultivation cost flow at a rate of $G(t) = 0.4t$ dollars per year during the life of the tree, and sells the tree at $t = T$ for $R(T) = 4 + 8T - T^2$ dollars. The market rate of interest is 0.20. Determine an optimal length for his cultivation period, T . Apply the appropriate second-order condition to verify that your solution is a maximum.

12-9 An entrepreneur is considering the variable revenues and costs from the operation of a machine to produce the output Q which sells at the fixed price $p = 52$. His input cost flow would be at the rate $C_i = 5q_i^2$ dollars per year, and his maintenance cost flow would be at the rate $M_i = 2q_i + 3t$ dollars per year. Construct a quasi-rent function for the machine.

12-10 An entrepreneur plans for a one-machine horizon. He purchases the machine for 500 dollars. Its scrap value at time T is $S(T) = 500 - 40T$. The rate of interest is 0.05. The machine yields a quasi-rent flow at the rate $Z_t = 85 - 4t$ dollars per year. When should the entrepreneur retire this machine?

12-11 An entrepreneur with a two-year horizon desires to extract 100 units of output from an exhaustible resource. His extraction costs are $C_t = 0.5q_t^2$, the interest rate is 10 percent, and the constant selling price for the output is 100 dollars. How much output should he extract in each year?

SELECTED REFERENCES

- Allen, R. G. D.: *Macro-economic Theory* (New York: St Martin's, 1967). Chap. 3 contains a discussion of investment theory using differential and integral calculus.
- Fisher, Irving: *The Theory of Interest* (New York: Kelley and Millman, 1954). A classic statement of many of the concepts of this chapter which contains verbal, geometric, and mathematical descriptions.
- Friedman, Milton: *A Theory of the Consumption Function* (Princeton, N.J.: Princeton, 1957). Chap. II contains a theory of multiperiod consumption. The remainder of the volume is devoted to its statistical verification.
- Hicks, J. R.: *Value and Capital* (2d ed., Oxford: Clarendon Press, 1946). Parts III and IV and the mathematical appendix contain multiperiod analyses.
- Lutz, Friedrich, and Vera Lutz: *The Theory of Investment of the Firm* (Princeton, N. J.: Princeton, 1951). A detailed study of many different investment problems in which time is treated as a continuous variable. A knowledge of differential and integral calculus is helpful, but not absolutely necessary.
- Modigliani, Franco, and Richard Brumberg: "Utility Analysis and the Consumption Function," in Kenneth K. Kurihara (ed.), *Post Keynesian Economics* (New Brunswick, N.J.: Rutgers, 1954), pp. 388-436. A theoretical and empirical study of lifetime consumption patterns. Some knowledge of calculus and mathematical statistics is required.
- Nickell, S. J.: *The Investment Decisions of Firms* (Cambridge: Cambridge University Press, 1978). An exposition of modern theory using the calculus.
- Smith, Vernon L.: *Investment and Production* (Cambridge, Mass.: Harvard, 1961). A detailed treatment of investment theory. Geometry and calculus are used.

ملحق رياضي
APPENDIX

APPENDIX

يحتوي هذا الطحق الرياضى على مراجعة قصيرة لبعض الافكار والطاھيم الرياضيه
التي نوقشت فى هذا الكتاب • ولقد حددنا الاثباتات الصعبه وفى الحقيقه فان كثيرا من
المنطوقات لم تثبت بالمرة •

ان معظم الادوات المستخدمة في التحليل تكون مستقلة عن الجبر ومن حساب
الفاضل والتكامل فحل المعادلات الاثنية simultaneous equations واستخدام المعادلات
determinants تكون ملحقه في الفصل (١ - ١) (A-1) ونناقش اساسيات
حساب الفاضل في الفصل (١ - ٢) A-2 اما الفصل (١ - ٣) A-3 فانه يناقش
تحليل النهايات العظمى والصغرى maxima and minima ونراجع في الفصل (١ - ٤)
A-4 الخواص الاساسيه للتكاملات integrals وننتهي بالطريق الرياضي ههنا
بمناقشة المعادلات الفاضليه والمعادلات الفترقه difference and differential equations
في الفصلين (٥ - ١) A-5 و (٦ - ١) A-6 على التوالي .

١ - المعاداة الآكبة ، المصفوفات ، والمحددات :

A-1 SIMULTANEOUS EQUATIONS, MATRICES, AND DETERMINANTS

يمكن كتابة نظام المعادلات المكون من n معادلة محتوية على n متغير:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

© 2006 The Authors
Journal compilation © 2006 Blackwell Publishing Ltd

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b$$

حيث ان جميع الـ a تكون معاملات وان جميع الـ b تكون حدود ثابتة فأي مجموعته
 n من الاعداد التي تحافظ على جميع الـ n من المتساويات في (١-١) عندما نعوّض
 بها مكان الـ x فتكون هي الحل لهذا النظام . ونورد فيما يلي مثالا بسيط لنظام
 المعادلات الاتيه التالي :

$$3x_1 - 5x_2 = 11$$

$$x_1 + 2x_2 = 11$$

ويكون حلها الوحيد هو : $x_1 = 7, x_2 = 2$.

ومن الممكن تجميع جميع الـ a والـ b والـ x في (١-١) في مصفوف مستطيلة
 تسمى المصفوفات *matrices* ونرمز لها بالحروف الفلظه :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ و } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

فالمصفوفه المكونه من m من الصفوف rows و n من الاعدد columns تكون
 بالترتيب order $(m \times n)$ فأي مصفوفه بالترتيب $(m \times 1)$ تسمى كمية متجه صفيه
 column vector وأي مصفوفه بالترتيب $(1 \times n)$ تسمى كمية متجه صفيه
 row vector ويمكن تسميه كل واحد منهما بكمية متجهه للتبسيط . فأي عنصر من عناصر
 المصفوفه A مثل a_{ij} يرمز الى الصف والمعمود الموجود فيه هذا العنصر حيث
 الحرف الاسفل الاول i يشير الى الصف ويشير الحرف السفلي الثاني j الى العمود
 في a تعطى الجمع والطرح للمصفوفات تعرف عادة للمصفوفات التي تنتمي الى نفس
 الترتيب . ففي هذه الحاله تكون عناصر المصفوفات $C = A + B$ هي $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
 فعملية الطرح تعرف بابدال علامات الجمع بعلامات الطرح فعملية الجمع والطرح لم
 تعرف للمصفوفات التي لا تنتمي الى نفس الترتيب . فحاصل الضرب $C = AB$ يعرف اذا
 كان فقط اذا كان iff عدد الاعدد في A هو نفسه عدد الصفوف في B
 فلو كانت A بالترتيب $(m \times n)$ وكانت B بالترتيب $(n \times p)$ وكانت C بالترتيب $(m \times p)$
 فان عناصر هذه المصفوفات سوف تكون :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

ونورد هنا حالة خاصه لها وضع خاص وهي ان المصفوفه A تكون كمية متجه صفيه وتكون
 B كمية متجه عمودي بنفس عدد العناصر فيكون حاصل ضرب الكميات المتجهه
 هو حاصل جمع ضرب العناصر المتماظه العدد . ان المصفوفه المربعه square
 matrix يكون عدد الاعدد هو نفسه عدد الصفوف . فلو كانت A و B مصفوفتان
 مربعتان ونفس الترتيب . فان حاصل الضرب BA يعرف كما يعرف AB وصوما

عمليات ضرب المصفوفات لا تكون أبدًا commutative حيث أن $BA \neq AB$ كما حصلنا ضرب المصفوفات العددية scalar product kA حيث أن k أي عدد وأن A أي مصفوفة فإن عناصره هو k يمكننا الآن كتابة نظام المعادلات الخطية (١-١) بطريقة مصفوفة بالرمز المصفوفي على النحو التالي : $AX = b$ (٢-١) حيث أن b, x, A معروفين كما سبق .

وتعرف المحددة determinant بأحد عدد مشتق من صف مربع من الأعداد وذلك حسب قواعد معينة ويرمز لها عادة Δ بخطين صوديين على كل جنب من جنبها أو بحرف Δ فلورمنا للمصفوفة بالحرف المخطط A فاننا نرمز للمحددة بالحرف المخطي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

فالقاعدة التي نتكئ من حساب المحددة من أي صف كالتالي (١) تكون حواصل ضرب أعداد (أو عناصر) من المصفوفة A بحيث أن كل حاصل ضرب يحتوي على عنصر واحد فقط من كل صف وعنصر واحد فقط من كل صود وهذا نكون قد مررنا بعدة نقط للمصفوف المربعة ويمكن كتابة حواصل ضرب هذه بحيث تكون مؤشرات الصف في ترتيب طبيعي $(1, 2, 3, \dots, n)$ ومثال هذا : حواصل ضرب $a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ و $a_{12}a_{21}a_{33} \dots a_{nn}$

فلو كان عدد التماكسات inversions (٢) بين مؤشرات الصود وعدد زوجي فإن إشارة حاصل الضرب سوف تترك بدون تغيير ولكن إذا كان عدد التماكسات عدد فردي فإن إشارة حاصل الضرب سوف تتغير من سالبة إلى موجبة أو من موجبة إلى سالبة وتكون قيمة المحددة هي حاصل الجمع الجبري algebraic sum لمثل حواصل الضرب هذه . اعتبر المحددة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(١) لدراسة أكثر مفًا في هذا الموضوع، راجع :

A. C. Aitken, *Determinants and Matrices* (New York:

Interscience, 1951), chap. II; S. Perlis, *Theory of Matrices* (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1952), chap. IV; or G. Birkhoff and S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra* (rev. ed., New York: Macmillan, 1953), chap. X.

(٢) فالتماكسات ما هو إلا مثال للوقت الذي يكون فيه المؤشر الأسفل يتبع مؤشرًا أعلى منه . فعلى سبيل المثال ، المؤشرين ١, ٢ يكونان في ترتيب طبيعي ، فالتماكسات ٢, ١ تحتوي على تماكسات واحد . أما التماكسات ١, ٣, ٢, ٥, ٤ فانها تحتوي على تماكسين لانها تحتوي على مثالين يكون فيهما المؤشر الأسفل يتبع مؤشرًا أعلى منه : فالثلاث ٣ تأتي قبل الاثنين ٢ والخمسة ٥ قبل الأربعة ٤ والتماكسات : ٤, ٣, ٢, ١, ٥ تحتوي على تماكسات .

فحسب القاعدة المذكورة اعلاه فإنه لا يمكن تكوين الاحاصلين للغرب فقط من المصفوفة A ونجد ان اشارة سالب تسبق الحد الثاني ، لانها تحتوى على تماكس واحد (عدد فردى) من مؤشرات العمود وذلك عند ما نكتب مؤشرات الصف فى ترتيبها الطبيعى (١) فلو كانت المصفوفة كالتالى (٢) :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

فان المحدودة تكون : $12 + 2 = 14$

فالقاعدة السابقة تسبب بعض المتاعب وخصوصا اذا كانت المصفوفة تحتوى على عدد كبير من الصفوف والاعداء ، فاستطاع تفهيم محدودة ما بسهولة اكثر وذلك بنفسك المحدودة باستخدام المتعاملات cofactors فلاى عنصر a_{ij} من عناصر المصفوفة A تكون صفا بشطب الصف i والعمود j من المصفوفة الاصلية . فتكون محدودة الصف المتبقى والذى تحتوى على $(n-1)$ من الصفوف و $(n-1)$ من الاعداء هي صغير محدود minor للعنصر a_{ij} (٣) فالعامل لهذا العنصر يكون هو صغيره المحدود مضروبا فى $+1$ اذا كان $(i+j)$ عدد زوجيا ومضروبا فى (-1) اذا كان $(i+j)$ عددا فرديا ويمكن كتابة المحدودة كالتالى :

$$M = a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} + \dots + a_{1n}M_{1n}$$

وذلك لاي مؤثر الصف i حيث ان M_{ij} هو العامل للعنصر فى الصف i

(١) يمكن الحصول على نفس النتيجة بحساب عدد التماكسات بين مؤشرات الصف وذلك عند ما نكتب مؤشرات العمود فى الترتيب الطبيعى لها . ويمكن للقارى ان يراجع ما اذا كانت مصفوفة ما محتوية على n من الصفوف و n من الاعداء ، بحيث يكون عدد الحدود فى المحدودة الخاصة بها هو n اى ان :

$$n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

ولمراجعة هذا الموضوع انظر فى كتاب Aitken المشار اليه سابقا طمس الصفحات 26-36 .

(٢) فالمصفوفة او الصف نفسه سوف يكتب داخل اقواس مربعة او دائرية square or round brackets اما عملية تكوين المحدودة فانها تظهر بالقضبان العمودية بدلا من الاقواس .

(٣) فقطر المصفوفة الجارى فى الاتجاه الشمالى الغربى - الجنوبى الشرقى يكون هو القطر الرئيسى للمصفوفة ونسمى صفار محدود Minors للعناصر الموجودة طمس على القطر الرئيسى (اى انها لـ a_{11}, a_{22}, \dots الخ) بصغار محدود الرئيسيه ، فهصغير محدود الرئيسى لـ a_{11} فى المحدودة الاصلية يكون هو نفسه محسوبة بالترتيب $(n-1) \times (n-1)$ ويرمز لها بالحرف M_{11} وصغير محدود الرئيسى لـ a_{22} فى صغير محدود M_{11} هو المحدود بالترتيب $(n-2) \times (n-2)$

ويرمز لها بالرمز $M_{11,2}$ وهى المحدودة بالترتيب $(n-2) \times (n-2)$ نفسها تكون صغير محدود رئيسيه للمحدودة الاصلية .

والعمود i والمثل ،

$$a_i = a_{i1}e_{i1} + a_{i2}e_{i2} + \dots + a_{in}e_{in}$$

وذلك لا يـؤثر العمود i وبما انه يمكن فك أى محددة بالنسبة لأى صف أو عمود منفرد فإن ضرب أى صف أو عمود من الصفوف A بالرقم k سوف يغير قيمة المحددة بنفس قيمة الرقم المضروب به .

تخيل ان الصف i للصفوفة قد ضرب بالرقم k ومن ثم فإن مفكوك المحددة الجديدة بالنسبة للصف i يكون كالتالى : (نرسم له بالحرف a_i^*)

$$a_i^* = ka_{i1}e_{i1} + ka_{i2}e_{i2} + \dots + ka_{in}e_{in} = ka_i$$

فالطوك من اجل $i \neq j$

$$a_{i1}e_{j1} + a_{i2}e_{j2} + \dots + a_{in}e_{jn}$$

ما هو الا الطوك من طريق المتعاملات الدخيلة $alien cofactors$ وضاهى حفر (١) .
فباستخدام هذه النظرية يمكن اثبات ان اضافة مضروب أى من الصفوف (او الاضدة) الى أى صف (او عمود) اخر سوف يترك قيمة المحددة بدون تغيير . فعلى سبيل المثال ،
نضرب الصف i بـ k ثم نضيفه الى الصف j ونرمز للمحددة الجديدة بالحد يد قبل الحرف a_j^{**} فهناك a_j^{**} بالنسبة لصفها j :

$$\begin{aligned} a_j^{**} &= (a_{j1} + ka_{i1})e_{j1} + (a_{j2} + ka_{i2})e_{j2} + \dots + (a_{jn} + ka_{in})e_{jn} \\ &= a_{j1}e_{j1} + a_{j2}e_{j2} + \dots + a_{jn}e_{jn} + k(a_{i1}e_{j1} + a_{i2}e_{j2} + \dots + a_{in}e_{jn}) \end{aligned}$$

وذلك لان الحد الموجود بين القوسين فى الممادلة الثانية هو الطوك بالمتعاملات الدخيلة وعلى ذلك فانه يساوى صفر .

ومن الممكن ايضا حل نظام المعادلات الاتية فى (١ - ١) باستخدام قاعدة كرامر ،
والتي تنص على ان الحل لـ x_i يكون معطى بالنسبة بين محددين بحيث ان المقام يكون مكونا من محددة معاملات $coefficients$ نظام المعادلات وان البسط يكون مكونا من محددة معاملات العمود i الذى حل محلها العمود المكون من حدود ثابتة . هذا بشرط ان تكون قيمة المحددة فى المقام ساوية لصفر .
فالاولا نطبق القاعدة التي تنص على ان ضرب عمود ما فى الصفوفة هو بمثابة ضرب قيمة المحددة بنفس العدد ومن ثم نطبق القاعدة التي تنص على ان اضافة ضربات أى عمود الى بعض الاضدة الاخرى سوف لا يغير قيمة المحددة ، ونشتق بعد ذلك الحل لـ x_i كما يلى :

$$x_1 \mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \dots$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وذلك يتمييز صود الثوابت من (١-١) بدلا من حواصل الجمع في العمود الاول ونرمز للمحددة على الجانب الايمن بـ \mathcal{A} فان الحل لـ x_1 يكون :

$$x_1 = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} \quad (\mathcal{A}' = 1)$$

وذلك كما نرى عليها • ونصموم (١-٢) لا يكون له اى معنى ان كانت $\mathcal{A} = 0$ ففي هذه الحالة لا يوجد حل فريد ، وتكون صفوف المصفوفة مستقلة خطيا *linearly dependent* او ما يعادل ذلك فان المصفوفة تكون فريده *singular* (١) •

فلو كانت قيمة محددة ما هى صفر ، فان اى من المعادلات الـ n يمكن وضعها كتوافق خطى *linear combination* للمعادلات الـ $(n-1)$ المتبقية فعلى سبيل المثال ، يمكن الحصول على المعادلة الـ n وذلك بضرب المعادلة الاولى بـ 6 ثم اضافته 3 مشروبه في الثانيه الى الاولى ، فالمعادله الـ n لاحتوت على معلومات جديدة ويمكن حذفها ، لانها تعتمد خطيا على المعادلات الـ $(n-1)$ الاولى • فعلا افترض ان المعادلة الـ n تكون بمثابة توافق خطى للمعادلات الـ $(n-1)$ الاولى فتكون المعادلة الـ i هى :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$$

$$\sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^n c_i b_i$$

حيث ان جميع الـ c تكون ثوابت ليس جميعا مساويه لصفر ، فإى مجموعة من الـ x الى تحقق المعادلات الـ $(n-1)$ الاولى سيكون من الضروري انها تحقق المعادلة الـ n فالمعادلة الاخيرة لا تضيف اى معلومات جديد • فليكون النظام قد خفض الى $(n-1)$ من

(١) نعرف صفوف المصفوفة A بان تكون مستقلة خطيا اذا كان ممكنا ايجاد مجموعة من الاعداد c_1, c_2, \dots, c_n بحيث ان $\sum_{i=1}^n c_i a_{ij} = 0$ لجميع قيم المؤشر j بحيث ان ليس جميع الـ c مساويين لصفر • ويمكن اثبات ان قيمة محدد قالمصفوفة سوف تكون صفرا اذا كان فقط اذا كانت صفوف (او اعمدة) المصفوفة مستقلة خطيا •

راجع في هذا *Aitken* الذى سبق الاشارة اليه على الصفحتين 62 64

المعادلات محتوية على n من المتغيرات فلو لم يكن احدا من صغير محدود للمصفوف $(n-1)$: مساويا لصفر، فانه من الممكن الحصول على حل لاي واحد من ال $(n-1)$ من المتغيرات بالنسبة للحدود الثابتة والمتغير المتبقى .

اذا كان النظام الاحلى المكون من n من المعادلات نظاما متجانسا (جميع الحدود الثابتة تساوى صفر) فان جميع ال x تكون صفرا وهذا اذا كانت محددة النظام فيسر صفر . فحسب قاعدة كرامر نجد ان كل x يمكن التعبير عنها ككسر . فالعالم لا يكون صفرا بالافتراض ويتلشى البسط لكل x لان جميع ال b تساوى صفرا وتكون المحددة لاية مصفوفة محتوية على عود من الاصغار ستكون هي نفسها صفرا فلو ثلاثت المحددة فان من الممكن الحل فقط للقيم النسبية للمتغيرات ويكون الحل فريدا ما عدا لعامل التناسب فعلى سبيل المثال ، فلو كان نظام المعادلات الاتيه كما يلي :

$$3x_1 - 4x_2 = 0$$

$$6x_1 - 8x_2 = 0$$

فان المحددة تكون $0 = (4)(6) - (8)(3)$ وعلى هذا فان المعادلتين لا تكونا مستقلتين، ويمكن الاستغناء عن المعادلة الثانية ^(١) وعلى هذا فان :

$$3x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{4}{3}$$

فاى مجموعه قيم سوف تحقق النظام مادامت العلاقة القائمة بين x_1 و x_2 تكون 4:3 فاختيار قيم عدديه للمتغيران يتم باختيار مشوائى لقيمة لاحدهما .

تعرف مرتبة المصفوفة بانها ترتيب اكبر محددة غير صفريه التى يمكن تكوينها من صفوفها واعديتها . وما ان المحددة لم تعرف الا من خلال المصفوفة المربعة فلوان، الصفوف A كانت بالترتيب $(m \times n)$ وكانت $m < n$ فان مرتبتها لا تفوق m وتكون المرتبة ايضا مساويه لعدد الصفوف المستقلة خطيا (او ما يعادله ، الاعداد) فسى المصفوفة . ويمكن النش على الشروط الضرورية وشروط الكفايه لحل نظام معادلات انيه بالنسبة لمرتبة مصفوفات معينه وتتحقق هذه الشروط بغض النظر عما اذا كان عدد المعادلات اكبر من ، مساو له ، او اقل من عدد المتغيرات . فلو اعطينا نظام المعادلات $ax = b$ حيث ان A بالترتيب $(m \times n)$ فقد لا يكون هناك حلا واحدا ، او حلا واحدا بالضبط او حلول متعددة . فاذا عرفنا C على اساس انها مصفوفة بالترتيب $(n+1) \times (n+1)$ بحيث ان الاعداد ال n الاولى منها تكون هي الصفوف A وتكون الاعداد ال $(n+1)$ هى المصفوفة b فشرط الضرورة والكفايه لوجود حل (ليس من

¹ It does not matter which equation is omitted. Discarding the first leads to the same answer.

الضروري ان يكون وحيدا) هو ان تكون مرتبة A مساوية لمرتبة C فلو كانت مرتبة C اكبر من مرتبة A فان النظام سوف لا يكون متطابقا او متوافقا inconsistent ولا يوجد له حل والمثال على هذا هو :

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 10x_1 + 4x_2 &= 11 \end{aligned}$$

فمرتبة A تكون الوحدة ومرتبة C تكون اثنين . وبطرح اثنين مضروب في المعادلة الاولى من المعادلة الثانية فاننا نتحصل على النتيجة المستحيلة $0 = -9$

١ - ٢ حساب التفاضل والتكامل : CALCULUS

الدوال والنهايات والاتصال : Functions, Limits, Continuity

تعني العلاقة $y = f(x)$ (ونقرأ : y دالة x) بأنه توجد قاعدة يمكن من خلالها انساب قيم للمتغير y الى قيم للمتغير x وامثلة هذا $y = 3x^2$, $y = 1/x$, $y = \ln \sin x$, $y = 1$ وذلك عندما تكون x عددا صحيحا فرديا وتكون $y = 0$ لاي قيمة اخرى لـ x ففي كل حالة تكون قيم y موافقة لقيم معطاة لـ x حسب القاعدة المخصوص طيها في شكل الدالة .

فالدالة قد لا تكون معرفة لجميع القيم المحتملة لـ x فالمثال $y = 1/x$ لا يمكن تعيينه عندما تكون $x = 0$ والمثال $y = \ln \sin x$ لا يمكن تعيينه ايضا لقيم x التي تكون عندها قيمة $\sin x$ سالبة . فالجزء من مجموعة الاعداد الحقيقية التي تكون الدالة معرفة عنده يسمى " مجال " domain الدالة . فمجال الدالة $y = x^2$ على سبيل المثال هو جميع الاعداد الحقيقية . اما قيم الدالة المقابلة لقيم x في المجال فهي نفسها تكون جزءا من مجموعة الاعداد الحقيقية ، ويسمى هذا مدى $range$ الدالة فمدى الدالة $y = x^2$ هو الاعداد الحقيقية الغير سالبة .

تكون العلاقة $y = f(x)$ " دالة صريحة " explicit function لان y صيغت بالنسبة لـ x فلو ان العلاقة الدالية functional relation بين y و x يشار لها هي $0 = g(y, x)$ فان y سوف تكون " دالة ضمنية " x implicit function فتحدد قيمة لـ x يعرف معنا قيمة لـ y بحيث ان الصيغة (او التعبير) على الجانب الايسر تخفص الى صفر عندما نعوض فيها بالقيم المناسبة لـ $\{x\}$ و $\{y\}$ فالعلاقات :

$$y = \sqrt{x}, y = ax + b, y = x^2$$

تعدا بأمثلة للدوال الصريحة اما الصيغ :

$$e^y + y - x + \ln x = 0, x^2 - y^2 = 0, ax + b - y = 0$$

فانها تعدنا باطله للدوال الضمنية . فمن اجل اعادة صيغة دالة ضمنية في شكل صريح فانه من الضروري حل المعادلة $g(y, x) = 0$ لقيم y . وهذا لا يكون ممكنا دائما .
فالدالة الضمنية : $e^y + y - x + \ln x = 0$ لا يمكن اعادة صيغتها في شكل صريح لان ،
المعادلة لا يمكن حلها تحليليا لـ x او y اما الدوال الصريحة فان الممكن دائما
اعادة صيغتها على شكل دالة ضمنية . فمثلا الدالة الصريحة : $y = 3x^4 + 2 \sin x - 1$
صيح $y - 3x^4 - 2 \sin x + 1 = 0$ على الشكل الضمني .

قد يكون للدالة اكثر من متغير واحد . ففي هذه الحالة تكون دالة متعددة المتغيرات *function of several variables* ويرمز لها بـ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
اوندع x تكون الكمية المتجهة (x_1, x_2, \dots, x_n) vector. وندع $f(x)$ ترمز لها بـ $f(x)$
فالطاهيم العاقشة سابقا تكون محققة بالساواة ايضا للدوال المتعدده المتغيرات
تعرف الدالة $f(x)$ بانها محدبة " *convex* عبر الفترة او البند *over the interval* (a, b) اذا كان :

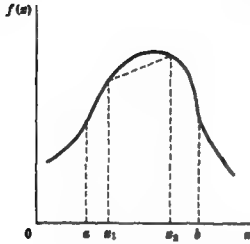
$$(1-4) \quad f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

وذلك لجميع $x_1 \leq a$, $x_2 \leq b$, وجميع $0 \leq \lambda \leq 1$ وتكون محدبـه
بالنضباط *strictly convex* عبر الفترة لو ان المتباينه المنضبطه *strict inequality*
تتحقق في (1-4) لجميع $0 < \lambda < 1$. وتكون الدالة " مقعرة " *concave* عبر
الفترة (a, b) اذا كان :

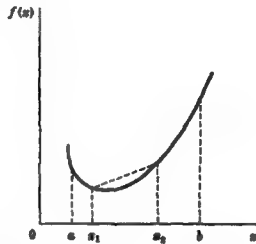
$$(1-5) \quad f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

وذلك لجميع $0 \leq \lambda \leq 1$ وتكون الدالة مقعرة بانضباط اذا تحققت المتباينه
المنضبطه لجميع $0 < \lambda < 1$

يعطى طرفى المعادلتين (1-4) و (1-5) الايسر قيم دالة عند النقط التى تكون
محممة *interpolations* يبين قيمى x_1 , x_2 اما الجانبين الايمنين فانهمما
يعطيان اقصادا لقيم الدالة العاقلة لـ x_1 , x_2 . ويعنى التجوب المنضبط (او التضر
المنضبط) عبر فترة ما انه لاى زوج من قيم x فى الفترة x_1 , x_2 بحيثان $x_1 < x_2$
فان قيم الدالة $f(x)$ تقع اسفل (اعلى) قطعة الخسـط
line segment الواصل بين $f(x_1)$, $f(x_2)$ فالدالة المصوره فى الشكل (1-1) تكون
مقعرة عبر الفترة (a, b) اما الدالة المصوره فى الشكل (1-1ب) فانها تكون محدبه عبر
الفترة (a, b) وفى الحقيقه فان الدالة تكون محدبه عبر فترة اكثر اتساعا . فـ $f(x)$ دالة
خطيه *linear function* سوف تحقق المتساويات في (1-4) وفى (1-5) ، وكذلك
الاتصاين سوف يعطيان قيم متطابقه وعلى هذا فان الدالة الخطيه تكون محدبه (ولكن
ليس محدبه بانضباط .) ومقعرة معا (ولكن ليس مقعرة بانضباط .)



شكل (١ - أ)



شكل (١ - ب)

شكل (١ - ج)

ان من الممكن عني هذه التعريفات والفاهيم للذوال تعتمد دة المتغيرات فالدالة $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ تكون دالة محدبة عبر منطقة ما اذا كان :

$$\begin{aligned} f[\lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}, \lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)}, \dots, \lambda x_n^{(1)} + (1-\lambda)x_n^{(2)}] \\ \leq \lambda f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) + (1-\lambda)f(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) \end{aligned} \quad (٧-١)$$

وذلك لنزجي النقاط $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ و $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ في المنطقة وكذلك جميع $0 \leq \lambda \leq 1$ وتكون الدالة محدبة بانضباط اذا تحققت المتباينة المنضبطة لجميع $0 < \lambda < 1$ وتكون الدالة مقعرة عبر المنطقة اذا كانت

$$\begin{aligned} f[\lambda x_1^{(1)} + (1-\lambda)x_1^{(2)}, \lambda x_2^{(1)} + (1-\lambda)x_2^{(2)}, \dots, \lambda x_n^{(1)} + (1-\lambda)x_n^{(2)}] \\ \geq \lambda f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) + (1-\lambda)f(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) \end{aligned} \quad (٧-٢)$$

وتكون الدالة مقعرة بانضباط اذا تحققت المتباينة المنضبطة ل $0 < \lambda < 1$ هناك مفهوم رياضي مختلف ولكن له صلة بالمواضيع السابقة وهو موضوع شبه المقعر quasi-concavity اعتبر الدالة السابقة المستوية على n من المتغيرات وذلك عند نقطتين هما :

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), \quad x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}).$$

تكون الدالة شبه - مقعرة عبر منطقة ما اذا كان :

$$(٨-١) \quad f[\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}] \geq \min\{f(x^{(1)}), f(x^{(2)})\}$$

وذلك لجميع $x^{(1)}, x^{(2)}$ في المنطقة ولجميع $0 \leq \lambda \leq 1$ وتكون الدالة شبه - مقعرة بانضباط وذلك اذا تحققت المتباينة المنضبطة ل $0 < \lambda < 1$ اما تعاريف شبه - التحدب المنضبط فانها تعرف بقلب reversing المتباينة في (٨-١) .

ان من السهولة اثبات ان كل دالة مقمرة تكون دالة شبه - مقمرة . ولا نقصد شيئا من العمومية اذا افترضنا ان $f(x^{(1)}) \geq f(x^{(2)})$.

وبوضع تعريف المقمرة في (١-٧) بمعرفة الكميات المتجهة نحصل على :

$$f[\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}] \geq \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda)f(x^{(2)}) \geq f(x^{(2)})$$

مفتين بذلك شبه - المقمرة ولكن شبه - المقمرة لا يتطلب المقمرة . فلو كانت

$$f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = y, \text{ فان } (1-\lambda) \text{ صحيح :}$$

$$f[\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}] \geq y$$

وهذه الحالة الخاصة تكون مهمة جدا وتبرز اهتماما معينا في نظرية سلوك المستهلك وكذلك في نظرية الوحدات الانتاجية .

ان اى متتالية عددية ما هي الا عبارة من قائمة اوسرد اعداد مثل :

$$1, 0, -1, 0, 1, \dots \text{ او } 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \text{ او } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \text{ او } 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

فكل عدد في المتتالية سوف يعطى مؤشرا موضحا مقدار بعده في المتتالية وطيه فان $x_2 = 1$ في المتتالية السابقة ونقول بان المتتالية توّول الى converges to النهاية K اذا وجد عددا K بالخصايه بان القيم العددية للفرق بين K وفردة نفس المتتالية يكون صغيرا جدا (ويمكن عمله باى صفر الشخص يرغب) وذلك اذا اخسند الشخص ففرده ما في المتتالية بهعد كاف ، اى ففرده بمؤشر على بدرجة كافيه ، وكذلك اذا ظل الفرق بذلك الصغر على الاقل لكل ففرده item في المتتالية حتى ولو كانت بمؤشر على . فالمتتالية الاولى والرابعة من المتتاليات السابقة لا يكون لها نهاية . اما الثاني والثالث فان لها نهاية مساوية لصفر .

نقرب الدالة الصريحة (او ما هو نفس الشيء المتغير y) من النهاية L كلما اقتربت من العدد a . وذلك اذا ظلت قيمة الدالة على الاقل قريبا من L لجميع قيم x حتى تكون قريبا من a . ويمكن تصور عليه ايجاد نهاية $f(x)$ عندما تكون $x = a$ بالطريقة التالية . نأخذ القيم المتلاحقة x_1, x_2, \dots للمتغير x والتي تكون متتالية توّول الى العدد a . نموض هذه القيم x في $f(x)$ فينتج عن هذا متتالية من القيم $f(x_1), f(x_2), \dots$ فلوات هذه المتتالية الى العدد L فان $f(x)$ سوف يكون لها النهاية L عندما تكون $x = a$. ويكون النهاية قائمه (موجودة) اذا كانت L محدودة finite ونميز لمعطية ايجاد النهاية للدالة $f(x)$ بالرمز :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ان الدالة $f(x) = 1 + 1/x$ توّول الى النهاية 1 كلما اقتربت x من ∞ . ولكن على كل حال ، وهذه النصيحة لا يمكن الحصول عليها بخصيص ∞ مكان x نفس

$1 + 1/x$ لان $1/\infty$ لا تساوي صفرا • فالتساوية $A/B = C$ تتطلب ان $A = BC$ فلو كانت $1/\infty = 0$ فان $1 = (\infty)(0)$ وبما ان هذه النتيجة غير صحيحة ، فان المسألة تتطلب منطقاً مختلفاً ، وبالتحديد تطبيق تعريف النهاية • ففى الحقيقة ∞ ليست عدداً ولكنها بالآخرى اتجاه a direction فيظهرها فى اى صيغة يكون معادلا لطلب تقديم قائمه للاعداد الصحيحة الموجبه بالترتيب التصاعدي وان تعدد هذه الارقام الى ابعد رقم ممكن ، ان نجد النهاية فيمكن جعل قيمة y لا تكون مختلفه من 1 وباقل من 0.1 وذلك باختيار قيمة لـ x اكبر من 10 فلو كانت $1 + 1/x = 1.05$ ، $x = 20$ فانها تختلف من (1) فقط بـ 0.05 وبالمثل فان بالامكان جعل y مختلفه من (1) باقل من $1/1,000,000$ وذلك باختيار قيمة لـ x اكبر من 1,000,000 الى y التى تكون كبيرة بدرجة كافية • فالدالة $f(x)$ تكون متصله عند النقطة $x = a$ اذا تحققت الشروط التاليه :

(١) اذا كانت النهاية قائمه ، اى $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

(٢) اذا كانت الدالة $f(a)$ قائمه •

(٣) اذا كانت $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (١) فإى دالة متصله فى الفترة: $a < x < b$ فانها تكون متصله عند كل نقطة من نقاط هذه الفترة فهذا التعريف للاتصال يتطلب بان تكون الدالة " متصله " باستخدام الجارى اليومى لهذه الكلمه : فإى شخص يستطيع ان يرسم الدالة بدون رفع مرصاه من الورق (٢) ويمكن الحصول على تعاريف مشابهة لنهاية الدالة لوجود الاتصال للدوال المتعددة •

(١) فعند هذه النقطة $x = a$ يجب ان تكون قيمة الدالة محدودة وان تكون هذه القيمة مساوية لنهاية الدالة عندما تقترب x من a فالدالة $y = 1$ عندما تكون x عدداً صحيحاً فردياً وتكون $y = 0$ لاي قيمة اخرى لـ x لا تكون متصله عندما تكون x عدداً صحيحاً فردياً فلو كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين عند $x = a$ فان:

($f(x) + g(x)$) وكذلك ($f(x)/g(x)$) بحيث ان $[g(x) \neq 0]$ يكونا ايضا متصلين •

(٢) لاحظ ان الدالة التى لها " اركان " " corners " او نتوءات " kinks " ولكن ليس فيها فرجات gaps اى ان اى من اطرافها متباعدة عن الآخر فانها تكون دالة متصله ونعرف القيمة المطلقة absolute value للرقم x (ونرمز لها بـ $|x|$) كالآلى :

$$x \geq 0 \text{ اذا كانت } x = x$$

$$x < 0 \text{ اذا كانت } x = -x$$

وطيه فان الدالة $y = |x|$ يكون لها نتوءا عند $x = 0$ ولكنها فى نفس الوقت دالة متصله •

مشقات الدوال ذات المتغير الواحد :

Derivatives for Functions of One Variable

افترض ان الدالة $y = f(x)$ تكون متصلة في فترة ما . فلو تغير المتغير المستقل x بمقدار صغير وليكن Δx فان قيمة الدالة سوف تتغير بالمقدار Δy . وطيه فان $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ ويمكن صيغة التغير في قيمة الدالة بالنحو التالي :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (٩ - ١)$$

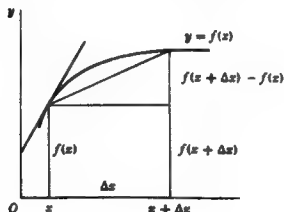
ونقسم كلا طرفي (٩-١) على Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (١٠ - ١)$$

وهذه المعادلة تعطي متوسطا معدل التغير y لكل وحدة تغير في x للفترة مسن x الى $x + \Delta x$ فعلا تخيل انه لو مشى شخص ما لمدة نصف ساعة اخرى فانه بالتأكيد سوف يغطي مسافة اضافية بما يعادل ميلين ، وطيه فان المتغير المستقل وهو الزمن في هذه الحالة قد تغير من x الى $x + \frac{1}{2}$ من الساعات وهكذا فان $\Delta y = 2$ من الاميال وتكون $\Delta x = \frac{1}{2}$ من الساعات وتكون $\Delta y / \Delta x = 4$ وهو متوسط السرعة (اربعه اميال في الساعة) . ونعرف مشتقة (اشتقاق) $f(x)$ ونرمز له بالرمز dy/dx او $f'(x)$ او $\frac{dy}{dx}$ على انها معدل تغير $f(x)$ كلما اقتربت Δx من صفر

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

فالاشتقاق يكون عبارة عن معدل التغير (او السرعة في المثال السابق) او وضعها بصورة اخرى ، هي نهاية متوسط معدل التغير (متوسط السرعة) وذلك عندما تقترب Δx (الفترة الزمنية) من صفر . فلورسنا $f(x)$ فان الاشتقاق محسوبا عند النقطة $x = a$ سوف يكون هو ميل المنحنى مملا $f(x)$ عند النقطة $x = a$. ويكون متوسط معدل التغير هو ميل 'التقاطع' secant بين النقطتين على المنحنى ويكون الاشتقاق هو ميل



شكل (١٠ - ١)

خط التماس للمنحنى عند نقطه معطاه . وشرح الشكل (٢-١) هذه المفاهيم فاصال
 $f(x)$ يكون شرط ضروريا ولكنه غير شرط كافيا ، لوجود (القيايم) الاشتقاق . فالدالة
 $y = |x|$ تكون متصله في كل مكان ، ولكن النهايه لا توجد عند نقطة الاصل ، اى ان :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta y / \Delta x) \text{ لا يوجد}$$

ونرمز لدالة الدالة ، والتي هى عبارة عن اشتقاق الدالة الثانى ، بالرمز d^2y/dx^2 ونعرفها كالتالى :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

فالاشتقاق الثانى ما هو الا عبارة عن معدل تغير الاشتقاق الاول ، اى انه المعدل
 الذى يتغير عنده ميل الدالة . وبلغه المثال السابق ، تكون هى المعادلة
 acceleration او معدل تغير السرعة وتعرف اشتقاقات بمراتب عاليه بطريقة مشابهة .

Techniques of Differentiation

طرق التفاضل :

نعمدما نقوم بتفاضل دالة ما فاننا نقوم بايجاد اشتقاقها . ونسرد فيما يلى بعض
 قوانين التفاضل بدون اثباتات : (١)

1. $f(x) = \text{constant}$, $f'(x) = 0$
 2. $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$
 3. $f(x) = g(x)h(x)$, $f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$
 4. $f(x) = g(x)/h(x)$, $h(x) \neq 0$, $f'(x) = [g'(x)h(x) - g(x)h'(x)]/[h(x)]^2$
- وهذه هى قاعدة دالة الدالة .
5. $f(x) = g[h(x)]$, $f'(x) = g'[h(x)]h'(x)$
 6. $f(x) = \ln x$, $f'(x) = 1/x$
 7. $f(x) = \ln [g(x)]$, $f'(x) = g'(x)/g(x)$
 8. $f(x) = e^{g(x)}$, $f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$
 9. $f(x) = a^x$, $f'(x) = a^x \ln a$

اما القاعدة الاخيره فهى اذا كانت $y = f(x)$ متصله وذات قيمه منفرده وكان من الممكن
 كتابتها على النقط المطلوب مثل $x = g(y)$ بحيث ان $f'(x)$ تكون متصله ولا تساوى
 صفرا فان :

$$dy/dx = 1/(dx/dy) \quad \text{أو} \quad \neq 0, f'(x) = 1/g'(y)$$

وهذه هى قاعدة دالة المقلوب .

(١) اثباتات هذه القوانين موجوده في اى كتاب للتفاضل والتكامل فيمكن مراجعته :

الاشتقاق الجزئية للدوال المتعددة المتغيرات :

Partial Derivatives for Functions of Many Variables

ان من السهولة تعميم تعريفات النهايات والاعمال تغطي الدوال المتعددة المتغيرات افترض وجود الدالة المحتوية على n من المتغيرات المستقلة

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

فيكون اشتقاقها الجزئي بالنسبة لـ x_i هي :

$$f_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

وهذا الاشتقاق الجزئي عبارة عن معدل تغير الدالة بالنسبة لـ x_i مع بقا جميع المتغيرات الاخرى. في حالة ثابتة اما طرق التفاضل فانها هي نفسها طرق تفاضل الدوال ذات المتغير الواحد ، ونعامل المتغيرات جميعا ما عدا x_i كتوابت فمثلا اذا كانت

$$y = 3x_1x_2^2 + x_2 \ln x_1$$

فالاشتقاق الجزئية لها تكون كالآلى :

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 6x_1x_2 + \ln x_1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} = 3x_2^2 + \frac{x_2}{x_1}$$

وتحدد اشتقاقات التفرع الاطى بالتفاضل الجزئي الملاحق فالاشتقاق الجزئى $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}$ هو اشتقاق f_i بالنسبة لـ x_i (يرمز له بالرمز f_{ii})
اما $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}$ فهي الاشتقاق الجزئي لـ f_i بالنسبة لـ x_j ويرمز لها بالرمز f_{ij} . فبالنسبة للمثال السابق •

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = 6x_2 + \frac{1}{x_1}$$

وتكون $f_{ij} = f_{ji}$ اذا كانت الاشتقاقات الجزئية لامتقاطعة الاولى والثانية متصلة • اما الاشتقاقات الجزئية للدالة الضمنية :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \text{فاننا نحصل عليها بافتراض ان}$$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{ثم نحسب} \quad \frac{\partial y}{\partial x_i} \quad \text{وكذلك} \quad \frac{\partial y}{\partial x_j} \quad \text{وهكذا}$$

The Total Differential

التفاضل الكلى :

يرمز dy للاشتقاق لدالة ذات متغير واحد وتكتب :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ولكن لا يمكن تفسيرها على انها كسر مكون من الكهتين dy و dx فلو فرضنا dy على انها زيادة في او التغير في المتغير المستقل فانه يمكن كتابته dx كالآلى في

$$.. (1) \Rightarrow (1)$$

$$dy = f'(x) dx$$

وهذه تكون هي تفاضليه $f(x)$ differential فعند نقطة معينة x^0 تكون قيمة الدالة هي $y^0 = f(x^0)$ وتكتب (١١-١) باستخدام الانحرافات deviations من هذه النقط) كالآتي :

$$(12-1) \quad y - y^0 = f'(x^0)(x - x^0)$$

وهذه هي معادلة خط التماس للدالة $y = f(x)$ عند النقطه (x^0, y^0) ولهذا فإن (١ سم) هي الصيغة العامة لمعادلة خط التماس لدالة $y = f(x)$ اما (١٢-١) فانها تعطى قيمة تقريبيه للتغير المقابل في $f(x)$ وذلك عندما تحدث تغيرات في x ونعرف التفاضليه الكاطه لدالة متعددة المتغيرات (n متغير في هذه الحاله) كالآتي :

$$(13-1) \quad dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$$

وهذه هي المعادلة العامة لمعادلة مستوى التماس tangent plane للسطح surface المعروف $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ وتعطى هذه المعادله ايضا قيمة تقريبيه للتغير في الدالة عندما يسمح لجميع المتغيرات بان تتغير بشرط ان تكون التغيرات في المتغيرات المستقله صغيره فيكون الاشتقاق الكلى للدالة بالنسبه لـ x_i هي

$$\frac{dy}{dx_i} = f_1 \frac{dx_1}{dx_i} + \dots + f_i + \dots + f_n \frac{dx_n}{dx_i}$$

او ان معدل تغير y بالنسبه لـ x_i عندما يسمح لجميع المتغيرات الاخرى بالتغير بحيث ان جميع x_j تكون دوال معينه لـ x_i .

والان لندع الاشتقاقات الجزئيه من الدرجة الاولى يرمز لها بالكميه المتجهه $\nabla f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ والتي تسمى انحدار f : gradient اعتبر قيا لـ dx بحيث ان قيمة الدالة تظل بدون تغيير $dy = 0$ ويمكن كتابة هذه الحاله الخاصه من (١٣-١) كخارج ضرب كميه متجهه .

$$(14-1) \quad \nabla f dx = 0$$

حيث ان $dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ يعرف (١٤-١) لمحتويات مستويات لـ f وتكون dx هي الكميه المتجهه العذاه المساهم لمحتويات المستويات ويكون الانحدار موديا على خط التماس ويشير الى الاتجاه الذى تتزايد خلاله الدالة (محليا) بسرعة اكبر .

ونحمل على التفاضليه الثانيه لـ $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ باخذ التفاضليه الكليه لـ (١٣-١)

$$d^2y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} dx_i dx_j$$

والتي تعطى قيمة تقريبيه للتغير في قيمة الدالة عندما يسمح لجميع المتغيرات بالتغير ضمن نطاق جوار صغير .

افترض ان :

$$y = f(x_1, x_2), \quad x_1 = g(w_1, w_2), \quad x_2 = h(w_1, w_2).$$

وتحدد الاشتقاقات الجزئية لـ y بالنسبة لـ w_1 و w_2 باستخدام قاعدة الدوال المركبة *composite-function rule* او المولفوا المشتقة لاحقا وباخذنا المفاضلات الكلية التالية :

$$(15-1) \quad dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2$$

$$(16-1) \quad dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial w_1} dw_1 + \frac{\partial x_1}{\partial w_2} dw_2$$

$$(17-1) \quad dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial w_1} dw_1 + \frac{\partial x_2}{\partial w_2} dw_2$$

وبتعمير (16-1) و (17-1) في (15-1) ثم بتجميع حدود dw_1 و dw_2

$$(18-1) \quad dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial w_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial w_1} \right) dw_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial w_2} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial w_2} \right) dw_2$$

فالتعمير (18-1) هو نفسه تفاضليه كلي حيث ان الحد الاول الموجود بين القوسين يساوي $\partial y / \partial w_1$ والثاني يساوي $\partial y / \partial w_2$ وطبقه فان :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial w_1} &= \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial w_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial w_1} = f_{11}g_1 + f_{12}h_1 \\ (19-1) \quad \frac{\partial y}{\partial w_2} &= \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial w_2} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial w_2} = f_{12}g_2 + f_{22}h_2 \end{aligned}$$

فلو كانت المتغيرات المستقلة للدالة $f(x_1, x_2)$ هي نفسها دوال المتغيرات اخرى مثل w_1 و w_2 فان $f(x_1, x_2)$ سوف تفاضل جزئيا بالنسبة لـ w_1 و w_2 حسب (19-1) وهذه هي قاعدة الدالة المركبة (او المولفوا) • وتفاضل اكثر للمعادلة الاولى من (19-1)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial w_1 \partial w_2} = f_{11}g_1g_2 + f_{12}(g_1h_2 + g_2h_1) + f_{22}h_1h_2 + f_{12}g_{12} + f_{22}h_{12}$$

فاذا اعطينا الدالة الضمنية $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ فانه يمكن الحصول على $\partial x / \partial x_i$ وذلك بايجاد التفاضليه الكلية اولا :

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n = 0$$

وبالتقسيم على dx_i

$$f_1 \frac{dx_1}{dx_i} + f_2 \frac{dx_2}{dx_i} + \dots + f_i \frac{dx_i}{dx_i} + \dots + f_n \frac{dx_n}{dx_i} = 0$$

وبوضع جميع التفاضلات هذا dx_i و dx_i مساوية لصفر، نحصل على :

$$f_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + f_i = 0$$

$$(٢٠-١) \quad \therefore \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = -\frac{f_j}{f_i}$$

فالمعادلة (٢٠-١) هي قاعدة الدالة الضمنية . وبفاضل أكثر لـ (٢٠-١) نحصل على :

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial x_j^2} = -\frac{f_i[f_{jj} + f_{jj}(\partial x_i/\partial x_i)] - f_j[f_{ji} + f_{ji}(\partial x_i/\partial x_i)]}{f_i^2} = -\frac{f_{ij}f_j - 2f_{ji}f_j + f_{jj}f_i}{f_i^2}$$

الأغلفة : Envelopes

دع $f(x, y, k) = 0$ تكون دالة ضمنية للمتغيران x و y . ولقد افترضنا ان صيغة هذه الدالة سوف تعتمد على قيمة الكمية المتغيرة k parameter k (او الوسيط k) وعلى وجه العموم فان $f(x, y, k) = 0$ تصف منحنى في مستوى xy plane ولذا فانه سوف يكون هناك منحنى متطابقا مقابل لكل قيمة محتملة لـ k . فيكون الغلاف لهذه العائلة من المنحنيات هو نفسه منحنى بالخاصية بانه ماسا لكل عضو من اعضا العائلة ونحصل على معادلة الغلاف باخذ الاشتقاق الجزئي لـ $f(x, y, k)$ بالنسبة لـ k ثم نتخلص من k من المعادلتين :

$$\begin{aligned} f(x, y, k) &= 0 \\ f_k(x, y, k) &= 0 \end{aligned}$$

والطريقة هذه لا يحدد الغلاف تكون ماسا قابلة للتطبيق بشرط ان :

$$f_k \neq 0 \quad \text{و ان} \quad f_k f_{kk} - f_{kk}^2 \neq 0 \quad (١)$$

مبرهنة الدالة الضمنية والجاكوبيات :

Implicit-Function Theorem and Jacobians

افترض ان الدالة الضمنية $f(x, y) = 0$ تكون متصلة ويكون لها اشتقاق جزئية اولى متصلة . اعتبر النقطة (x^0, y^0) بحيث ان :

$$f(x^0, y^0) = 0$$

ثم افترض ان $f_y(x^0, y^0) \neq 0$ تنص مبرهنة الدالة الضمنية على انه يوجد جوار مكون من نقط حول النقطة (x^0, y^0) بحيث انه لاى قيمة لـ x في هذا الجوار يكون هناك قيمة فريدة لـ y مقابلة لها في نفس الجوار بالخاصية بان $f(x, y) = 0$. وهذا فان مبرهنة الدالة الضمنية تؤكد وجود حلا فريدا $y = \phi(x)$ وذلك تحسنت الشروط المنصوص عليها (٢) . فهي تعطي شرطا كافيا للتكافؤ المحلي الوحيدى

(١) بالاضافة الى ان الحل سوف يكون قابلا للتفاضل تحت الشروط المنصوص عليها

والمشار اليه سابقا W. F. Osgood, Advanced Calculus (New York: Macmillan, 1925), pp. 186-193.

(٢) للحصول على الاشارات راجع :

للحللول *local univalence* فالحللول قد توجد اذا كانت :

$f_j(x^0, y^0) = 0$, ولكن اذا تلاشت f_j في كل مكان من كامل الجوار فانه عندئذ لا يوجد حل فريد في ذلك الجوار . وهذا يكون صحيحا بالتزكية اذا تلاشت f_j تطابقا .

والمثال الذي يكون فيه $f_j(x^0, y^0) = 0$, ولكن يوجد حلا فريد يكون معطاه $f(x, y) = (x - y)^2 = 0$ فالمعادله $(x - y)^2 = 0$ يكون لها الحل الفريد : $y = x$ وبالرغم من هذا فان : $f_y(x, y) = -2(x - y) = 0$ عند اي نقطه تحقق المعادله الاصليه والمثال الذي تكون فيه $f(x, y) = 0$ في كل مكان في الجوار تكون معطاه $y = x - 1$ فمن الواضح ان $f(x, y) = 0$ تتحقق $y = x + 1$ واي قيمة لـ y ولهذا فانه لا يوجد حلا فريدا (١) تتطلب مسالة وجود حلا فريدا وحليا للمعادلات الاتيه وعددها n والمحتوية على n من المتغيرات تممها المبرهنة الدالة الضميه وفكرة الجاكوبيات اعتبر نظام المعادلات الاتيه التاليه :

$$\begin{aligned} f^1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_1 \\ f^2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_2 \\ &\dots \dots \dots \\ f^n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_n \end{aligned} \quad (٢١ - ١)$$

فجاكوبية (٢١ - ١) هي عبارة عن مجموعة الاشتقاقات الجزئيه الاولى للدوال ونشير اليها بـ :

$$J = \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (٢٢ - ١)$$

فتمميم مبرهنة الدالة الضميه يكون كما يلي : فلو كانت الدوال التاليه $f^i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ متصله ولها اشتقاقات جزئيه اولى وكانت جاكوبية (٢٢ - ١) فيسر متلاشيه عند النقطه $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ التي تحقق (٢١ - ١) فانه عندئذ يوجد فسي بعض الجوارات حول النقطه $(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ مغلوب دوال فريده مثل $\phi^i(y_1, y_2, \dots, y_n) = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) وكما هو الحال في مبرهنة الدالة الضميه البسيطة ، فانه لا يمكن التصريح بتاكيد تام اذا تلاشت الجاكوبيه عند $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ولكن اذا كانت $J = 0$ في حوار كلي حول $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ فان التكافؤ الحلي الواحدى سوف

(١) للحصول على اثباتات متعمقه ومناقشات هندسيه راجع :

Courant, vol. II, pp. 111-122.

والشار اليه سابقا .

يتحقق وأثبت هذه المبرهنه يمكن ايضا حه كما يلي فى حالة المتغيران فقط اعتبر
المعادلتان :

$$(٢٣- ١) \quad f(x_1, x_2) = y_1$$

$$(٢٤- ١) \quad g(x_1, x_2) = y_2$$

فلو لم تتلاشى الجاكوبيه ، فان ليس جميع الاشتقاقات الجزئيه تكون مساويه لصفر افترض
ان $f_1 \neq 0$. فنعتمد باستخدام مبرهنه الداله الضميه .

$$(٢٥- ١) \quad x_1 = \phi(x_2, y_1)$$

وبالتعويض فى (٢٤- ١)

$$(٢٦- ١) \quad F = g[\phi(x_2, y_1), x_2] - y_2 = 0$$

$$(٢٧- ١) \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = g_1 \phi_1 + g_2$$

وبتعويض (٢٥- ١) فى (٢٣- ١)

$$G = f[\phi(x_2, y_1), x_2] - y_1 = 0$$

وبما ان G تكون مطابقه تماما لصفر ، فان اشتقاقها الجزئيه بالنسبه لـ x_2 يكون
مطابقا لصفر ايضا :

$$(٢٨- ١) \quad \frac{\partial G}{\partial x_2} = f_1 \phi_1 + f_2 = 0$$

ويحل (٢٨- ١) لـ ϕ_1 ثم بتعويض قيمتها فى (٢٧- ١)

$$(٢٩- ١) \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = g_1 \left(-\frac{f_2}{f_1} \right) + g_2 = \frac{f_1 g_2 - f_2 g_1}{f_1}$$

وبما ان الجاكوبيه (وهى المقام) و f_1 لا يتلاشيان بالافتراض ، فان $\partial F / \partial x_2 \neq 0$ و
(٢٦- ١) يمكن حلها لـ x_2 وطى هذا :

$$(٣٠- ١) \quad x_2 = h(y_1, y_2)$$

وبتعويض (٣٠- ١) فى (٢٥- ١) نتحصل طى الحل لـ x_1

نص نظريه اخرى لهلا علاقه بها سبق بان وجود الداله $H(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$

اى ان الامتداد الدالى بين معادلات (٢١- ١) يكون ضروريا وكافيا لتلاشى الجاكوبيه

(٢١- ١) فى كل مكان فى جوار النقطه $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

ويمكن اقتراح اثبات الكتابه كالتالى :

افتراض وجود استغلال دالى $\overline{H(y_1, y_2)} = 0$ وياخذ الضافليه الكليه ،

$$H_1 dy_1 + H_2 dy_2 = 0$$

وبالتعويض بـ dy_1 ، dy_2 فاننا نحصل على قيمتها بفاضل (٢٣- ١) و (٢٤- ١) ثم نجمع الحدود

$$(H_{1f_1} + H_{2g_1}) dx_1 + (H_{1f_2} + H_{2g_2}) dx_2 = 0$$

وبما ان هذه يجب ان تتحقق لجميع قيم dx_2 ، dx_1 فان الحدود القوسه يجب ان تساوى صفر

$$H_{1f_1} + H_{2g_1} = 0 \quad H_{1f_2} + H_{2g_2} = 0$$

وبتحريك الحدود الثانيه الى الجانب الايمن ونقسمه المعادله الاولى على الثانيه ،

$$\frac{H_{1f_1}}{H_{1f_2}} = \frac{-H_{2g_1}}{-H_{2g_2}}$$

$$(٢١- ١) \quad f_1 g_2 - f_2 g_1 = 0$$

فالطرف الايسر ل (٢١- ١) هو الجاكوبيه التي تساوى صفرا .

مثال : اعتبر الدالتين :

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_2 - 2 &= y_1 \\ x_1^2 - 4x_1^2 x_2 + 4x_2^2 &= y_2 \end{aligned}$$

فيكون الاعتماد الدالى بينهما معطى بـ $(y_1 + 2)^2 - y_2 = 0$ وتكون الجاكوبيه :

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 2x_1 & -2 \\ 4x_1^2 - 8x_1 x_2 & -4x_1^2 + 8x_2 \end{vmatrix} = (-8x_1^2 + 16x_1 x_2) - (-8x_1^2 + 16x_1 x_2) = 0$$

حيث انها تتلاشى تطبيقيا .

فلو كانت الدالتين (٢٣- ١) و (٢٤- ١) دالتين خطيتين ، فان المبرهنة الاولى سوف تتحول الى المقترح المعروف بان محددة مصفوفة المعاملات يجب ان لا تتلاشى ويتحقق هذا الشرط لو كان عدد المعادلات مساويا لعدد المتغيرات وكذلك لو كانت المعادلات غير مستقله دالها . فلو ثلاث جاكوبيه نظام المعادلات انيه ، فـ ان المعادلات ستكون مستقله خطيا (راجع الفصل ١ - ١) .

ونقد بالتكافؤ المحلى الوحدوى هنا وجود حل فريد فى حوار معين . اما التكافؤ الشامل الوحدوى Global فانه يعنى وجود حل فريد بمرمقة كامله فمن الواضح ان التكافؤ الشامل يتطلب التكافؤ المحلى ولكن الجاكوبيه الغير متلاشيه سوف لا تضمن التكافؤ الشامل تعتمد عادة على خواص الدوال المعنيه ، وعلى سبيل المثال ، الضمـر المنضبط (١) وسوف نتاقت باختصار التكافؤ الشامل فى الفصل (١ - ٣) ولقد ناقشنا مبرهنتين لها فى الفصل (١٠ - ١) .

٩ - ٣ النهايات العظمى والنهايات الصغرى

A-3 MAXIMA AND MINIMA

ان النهاية العظمى النسبية (relative) maximum (او النهايه الصغرى الدالة ذات متغير واحد او اكثر تكون هي النقطة القصوى extreme point ضمن مجال domain الدالة بحيث ان جميع النقاط الاخرى المحققة في جوار صغير يكون لها قيم دالة ليست اكبر من قيمة النقطة القصوى (او اصغر منها) .

ان جميع النقاط القصوى تكون نقاط عتق stationary points اي النقاط التي لا تتغير عندها قيمة الدالة . ولكن ليس جميع نقاط التوقف تكون نقاط قصوى فالنهاية العظمى المضطربة (او الصغرى) تكون اكبر انضباط من (او اصغر من) النقاط المجاورة اما النهاية العظمى الشاملة global maximum (او الصغرى الشاملة) فانها تكون اكبر القيم (او اصغرها) حول جميع النقاط المحققة ضمن مجال الدالة . واما النهاية العظمى الغير مقيدة unconstrained (او الصغرى) فقد تكون في اي مكان ضمن مجال الدالة ولكن النهاية العظمى المقيدة constrained لا تحدث الا فقط عند النقاط ضمن المجال التي تحقق قيودا أو أكثر من القيود المسمية .

النهايات العظمى والصغرى الغير مقيدة : Unconstrained Maxima and Minima

دع $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ وارمز لها بـ $y = f(x)$ حيث ان x عبارة عن كمية متجهة مكونة من n من العناصر ونستخدم مفكوك سلسلة تايلور Taylor series expansion لنقدم اثبات للشرط الضروري للنهاية العظمى الغير مقيدة ^(١) .

افترض ان النقطة x^0 تعطي نهاية عظمى ودع $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ تمثل ازاحة displacement في الفضاء للمتغيرات x ودع كذلك θ_1, θ_2 متجان همدان بحيث ان θ_1 منضبط على ان تكون موجبه وان θ_2 تكون $0 < \theta_2 < 1$

فاذا لو كانت $f(x)$ دالة متصله بحيث ان لها اشتقاقات جزئية اوليه وثانيه متصله وتكون قيمة الدالة عند النقطة $x^0 + \theta_1 \Delta x$ اي عند النقطة المزاحه من موقف النهايه العظمى بالكميه المتجه $(\theta_1 \Delta x)$ كما يلي :

$$f(x^0 + \theta_1 \Delta x) = f(x^0) + \theta_1 \sum_{j=1}^n f_j(x^0) \Delta x_j + \frac{\theta_1^2}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{jk}(x^0 + \theta_1 \theta_2 \Delta x) \Delta x_j \Delta x_k$$

وما ان $f(x^0)$ تكون نهاية عظمى ، فان $f(x^0) \geq f(x^0 + \theta_1 \Delta x)$ وذلك لقيم صغيره

ل θ_1 بدرجة صغيرة ، وعندئذ تتطلب المعادلة (٢٢-١)

$$(٢٢-١) \quad \theta_1 \sum_{i=1}^n f_i(x^*) \Delta x_i + \frac{\theta_1^2}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(x^* + \theta_1 \theta_2 \Delta x) \Delta x_i \Delta x_j \leq 0$$

ونقطة طرفى المعادلة (٢٢-١) θ_1 ثم تأخذ النهاية عندما تقترب θ_1 من صفر .

$$(٢٤-١) \quad \sum_{i=1}^n f_i(x^*) \Delta x_i \leq 0$$

وبما أن Δx عبارة عن كمية متجة عشوائية ، فهذه النتيجة تتحقق أيضا للكمية المتجهة

$\Delta x = (-\Delta x_1, \dots, -\Delta x_n)$ وفى مثل هذه الحالة نصبح (٢٢-١) كالآتى :

$$(٢٥-١) \quad -\sum_{i=1}^n f_i(x^*) \Delta x_i \leq 0$$

فالطريقة الوحيدة التي تحقق فيها كلا من (٢٤-١) و (٢٥-١) هو أن تكون

$f_i(x^*) = \partial f(x^*) / \partial x_i = 0$ وذلك لجميع $i = 1, \dots, n$ ونتيجة لذلك فإن الشرط الضروري

للنهاية العظمى (وللنهاية الصغرى) هو أن تكون الاشتقاقات الجزئية من الدرجة الاولى

مساوية لصفر . ولا فائدة ليس من المحتمل تحقيق (٢٤-١) و (٢٥-١) وهذه

المتساويات ضمن شروط الدرجة الاولى .

وبتمييز صفر بدلا من $f_i(x^*)$ فى (٢٢-١) وبالتقسيم على $\theta/2$ ثم نضع θ_1

نقترب من صفر ، نحصل على :

$$(٢٦-١) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(x^*) \Delta x_i \Delta x_j \leq 0$$

فالجانب الايسر من (٢٦-١) هو الشكل التربيعى "quadratic form" بحيث أن Δx

تمثل المتغيرات وأن الاشتقاقات الجزئية من الدرجة الثانية تمثل المعاملات . وتتطلب

المتباينة (٢٦-١) بأن يكون الشكل التربيعى سالبا نصف محدد أى أنه إما سالبا أو

صفرا لجميع احتمالات Δx . ونسمى الشروط المضمنة فى الاشتقاقات الجزئية من الدرجة

الثانية بشروط الدرجة الثانية . أما شروط الدرجة الاولى فأنها نفسها للنهايات

العظمى والصغرى ويجب أن يكون الشكل التربيعى على يسار (٢٦-١) موجبا نصف

محدد فى حالة النهايات الصغرى ، أى يكون موجبا او صفرا لجميع احتمالات Δx .

ومن الممكن إثبات أن (٢٦-١) تكون سالبة محددة definite (أى سالبة لجميع

احتمالات Δx ما دأ $x = 0$ ذلك إذا كان فقط إذا كانت القيم الصغرى المحسوبة

الرئيسية المستخلصة من محددة هيسيان المكونة من الاشتقاقات الجزئية من الدرجة

الثانية :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

وذلك بحذف الامة والصرف ($n-1$) الاخيرة ($n-1, n-2, \dots, 0$) الى تتبادل
الاشارة :

$$f_{11} < 0, \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

ويكون الشكل التريبي موجباً محدد اذا كان فقط اذا كانت القيم المصغرى
المحددة الرئيسيه جميعها موجبه (١) • وتحدد القيم القصوى محل المعادلات n :

$$f_1(x^0) = 0, f_2(x^0) = 0, \dots, f_n(x^0) = 0$$

لقيم ال n متغيرات $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ ثم حسب اشارة القيم المصغرى المحددة
الرئيسيه ليهيئان ، ومن ثم نحدد ما اذا كانت مناسبة لنهاية عظمى أو لنهاية صغرى •

دع $f(x)$ تمثل دالة ذات متغير واحد فتكون الشروط للنهاية العظمى عند $x = x^0$ هي :

$$(A) \quad f'(x^0) = 0 \quad \text{and} \quad f''(x^0) \leq 0$$

وتكون شروط الكفاية :

$$(B) \quad f'(x^0) = 0 \quad \text{and} \quad f''(x^0) < 0$$

اما بالنسبة لحالة النهاية الصغرى فان المتباينات سوف تكون عكس ما هي طيه في حالة
النهاية العظمى • فالشروط في (A) ليست كافيه كما ان الشروط في (B) ليست ضروريه •

ونمثل للحالة (A) بالدالة $f(x) = 3x^2$ فتكون $f'(x) = 6x$ وتكون $f''(x) = 6$ فعندما تكون
 $x = 0$ فان شروط (A) تتحقق ولكن لا يكون للدالة نقطة قصوى عند صفر (بالرغم من ان
لها نقطة عطف) ونمثل لحالة (B) بالدالة $f(x) = -x^4$ والتي تكون نهايتها المظمى
عند نقطة الاصل بالرغم من ان اشتقاقها الثانى (وكذلك الاول) يتلاشى عند تلك
النقطه • فلو كان الاشتقاق الثانى للدالة $y = f(x)$ صفرا فان يكون هناك ثلاث
احتمالات :

$$d^2y/dx^2 \neq 0 \quad (1)$$

$$d^4y/dx^4 \neq 0 \quad \text{and} \quad d^2y/dx^2 = 0 \quad (2)$$

$$d^4y/dx^4 = 0 \quad \text{and} \quad d^2y/dx^2 = 0 \quad (3)$$

فلو تحققت (١) فان الدالة سوف يكون لها نقطة انعطاف inflection point

(اى ان للاشتقاق الاول قيمه قصوى) بدلا من نهاية عظمى أو صغرى • اما اذا تحققت

(١) ان ترتيب المتغيرات يعمل بطريقة متوائمه وتتطلب اشارة الشروط طى القيم المصغرى
المحددة الرئيسيه بان تكون لجميع القيم المصغرى المحددة بترتيب معين نفس
الاشارة فمثلا في حالة النهاية العظمى ذات المتغيرين فان الشرطين $f_{11} < 0$ و
 $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$ تتطلب بان تكون f_{22} سالبه •

(٢) فإن الدالة سوف يكون لها نهاية منظمى أو صفري . وذلك حسب ما إذا كان الاشتقاق الرابع سالها أو موجبا . فإذا تحققت (٣) فإن اشارات الاشتقاق الخامس والسادس يجب اختيارها ونطبق (١) و (٢) بحيث ان :

$$(d^4y/dx^4) \text{ محل مكان } (d^3y/dx^3) \text{ وان محل } (d^4y/dx^4) \text{ مكان } (d^5y/dx^5)$$

وهذه الطرق لا تغطي جميع الحالات كما توضح الدالة التالية $y = e^{-x^2}$ $x \neq 0$ و $y = 0$ ط $x = 0$ ^(١) فالدالة تكون لها نهاية صفري عند الاصل ويكون لها عددان غير محدودان من الاشتقاق التي لها قيمة صافية لمغرو ذلك عند نقطة الاصل . وتتحقق جميع الاعتبارات للدوال المتعدده المتغيرات .

نعمند تحقيق شرط الدرجة الاولى عند نقطة ما في اى فترة تكون خلالها الدالة متفاضله مرتين وتكون دالة مقعرة بانضباط (تحدبة بانضباط) فان هذا يمثل شرطا ضروريا ولكنها لوجود نهاية منظمى فريده شامله (نهاية صفري) عند تلك النقطة . فلو اننا اهلنا حالة تلاشى الاشتقاق الثانى المشار اليها في الفقرة السابقة فان الاحتمال يكون سهلا ^(٢) اعتبر حالة الدالة المقعرة بانضباط . اختار قيمتين متميزتين من x_1 وليكونا x_1 و x_2 ضمن الفترة اذ كتابة (١- λ) بدلالة λ .

$$g(\lambda) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \lambda f(x_1) - (1-\lambda)f(x_2) > 0$$

وذلك ل $0 < \lambda < 1$ بحيث تكون القيمتين المحددين $g(0) = 0$ و $g(1) = 0$ فبمع من اتصال $f(x)$ ان $g(\lambda)$ يكون لها نهاية منظمى في الفترة المغلقة $0 \leq \lambda \leq 1$ ويكون شرط الدرجة الاولى لهذه النهاية المعظمى .

$$g'(\lambda) = f'(x)(x_1 - x_2) - f(x_1) + f(x_2) = 0$$

حيث ان x تمثل $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ ويكون شرط الدرجة الثانية ^(٣) :

$$\frac{d^2g(\lambda)}{d\lambda^2} = f''(x)(x_1 - x_2)^2 < 0$$

والى يتطلب بان تكون $f''(x) < 0$. وبالا مكان التوصل الى اشتقاق مائل يتطلب بان تكون $f''(x) > 0$ لحالة الدالة المحدبة بانضباط . ولهذا فان المقعر المنضبط

(١) راجع K. Sydenstr, "Letter to the Editor on Some Frequently Occurring Errors in the Economic Literature Concerning Problems of Maxima and Minima," *Journal of Economic Theory*, vol. 9 (December, 1974), pp. 464-466.

(٢) ان الاشتقاق الثانى لدالة محدبة او مقعرة بانضباط لا يتلاشى الا فقط عند القطر المميزه ، ولكنها لا تتلاشى عند الجوار .

(٣) لقد استخدمنا قاعدة دالة الدالة للاشتقاق الثاني . وصوباً اذا كانت $\phi''(x) = \phi''(h(x))h'(x)^2 + \phi'(h(x))h''(x)$. فان :

(التحديب المنضبط) يضمن تحقيق شرط الدرجة الثانية لنهاية مظمى (نهاية صفري) .
والآن ، لنعد f'' تعطى نهاية مظمى بحيث ان $f''(x_0) = 0$ واما ان $f''(x) < 0$ ،
 $f'(x) < 0$ لجميع $x > x_0$ وان $f'(x) > 0$ لجميع $x < x_0$ فانه لا يمكن ان يكون هناك
نتيجة ثانية لـ x يكون عندها الاشتقاق الاول مساويا لصفر ، f'' تكون نهاية مظمى
فريدة شاطه . والمثل فان النهايات الصفري للدوال المحدبه بانضباط تكون فريدة
شاطه . واما في حالة الدوال المحتويه على n من المتغيرات فان مناقشة معاملة تحقق
كل طلباتها . افترض انضمم المنضبط ودع x تشير الى كمية متجه ، ففي هذه الحالة :

$$g'(A) = \sum_{i=1}^n f_i(x)(x_{i1} - x_{i2}) - f(x_1) + f(x_2) = 0$$

وكذلك :

$$g''(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(x)(x_{i1} - x_{i2})(x_{j1} - x_{j2}) < 0$$

والتي تتطلب بان تكون مصفوفة هيسيان هي مصفوفة الاشكال المربعة السالبة المحددة
والتي تكون كافيه (مع شروط الدرجة الاولى) للنهاية المظمى والتي يمكن اثباتها لتكون
فريدة شاطه .

تتم البرهونات الحليفه Allied theorems بانها اذا كانت $f''(x) > 0$ عبر الفترة
فان $f(x)$ تكون محدبه بانضباط عبر الفترة وانه اذا كانت $f''(x) < 0$ عبر الفترة فان
تكون مقعرة بانضباط عبر الفترة . وتعدنا هذه البرهونات بوسائل سهلة لاختصار
التحديب والتضمير لدوال معينه . فعلا ، نعتبر الدالة : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ ،
فيكون اشتقاقها الثاني هو $f''(x) = 6x - 6$ والذي يكون سالبا لـ $x < 1$ ويكون موجبا
لـ $x > 1$ ولذا فان $f(x)$ تكون مقعرة بانضباط لـ $x < 1$ ويكون محدبه بانضباط لـ $x > 1$
اما في حالة وجود n من المتغيرات فان المحددات المعطاة بـ (١ - ٣٧) سوف
تعدنا بوسائل لاختبار التحديب والتضمير لدوال محدده . فاذا كانت المحددات
تتبادل في الاشارات كما هو واضح من (١ - ٣٧) عبر الفترة ، فان الدالة المقابله
سوف تكون مقعرة بانضباط عبر الفترة ، ولكن اذا كانت المحددات في (١ - ٣٧) موجبه
جميعها عبر الفترة ، فان الدالة تكون محدبه بانضباط عبر الفترة . فعلا اعتبر الدالة :

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^{13}x_2^{14}.$$

ونقيم المحددتين الاوليتين من (١ - ٣٧) ،

$$f_{11} = -0.5x_1^{-13}x_2^{14} \quad f_{11}f_{22} - (f_{12})^2 = 0.08x_1^{-14}x_2^{13}$$

فيصبح من هذا ان $f(x_1, x_2)$ تكون مقعرة بانضباط لـ $x_1 > 0, x_2 > 0$ قد يكون للدوال
المحددة المتغيرات نقاط توقف ليست نهاية مظمى ولا نهاية صفري فمثل نقاط التوقف
هذه قد تكون نقاط انعطاف (كما هو الحال في حالة المتغير الواحد) او قد تكون

نقاط سرج saddle point. وهذه النقاط الاخيره (نقاط السرج) هي عبارة عن نقاط توقف للدالة ولا يوجد لها نقاط مقابله في حالة المتغير الواحد ، وتتميز بالحقائق بان الداله تصل الى نهايتها العظمى عبر بعض الاتجاهات ولكنها ايضا تصل الى نهايتها الصغرى عبر اتجاهات اخرى . فمثلا الدالة $f(x, y) = x^2 - y^2$ يكون لها سرج عند نقطة الاصل .

النهايات العظمى والصغرى يقيود على شكل مساويات :

Maxima and Minima with Equality Constraints

ان مسائل النهايات العظمى والصغرى في الاقتصاد تكون بحيث ان المتغيرات المستقلة لايسمح لها بان تأخذ جميع قيمها المحتملة فالمعادلات تكون " مقيدة " لتحقيق بعض العلاقات الجانبية . فمسألة النهاية العظمى المقيدة تكون عبارة عن تحقيق الحد الاعلى للدالة $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ تحت شرط القيد بان القيم x_1, x_2, \dots, x_n فقط هي التي تحقق المعادلة ، وتكون جائزة admissible :

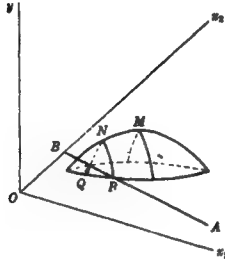
$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

فمثلا ، الدالة :

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$$

يكون لها نهاية عظمى غير مقيدة عند النقطة $x_1 = 1, x_2 = 2$ ولكن لو كانت هذه الدالة معرضة للمتطلبات : $x_1 - x_2 - 2 = 0$ فان قيمتها الصغرى سوف تتحقق عند النقطة $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$ فالدالة $f(x_1, x_2)$ تصرف سطحا في فضاء بابعاد ثلاثية three-dimensional space. ان المعادلة $x_1 - x_2 - 2 = 0$ تعرف خطا مستقيما في المستوى x_1, x_2 السطحي . ونعرف مسالة النهاية الصغرى المقيدة بانها المسألة التي نبحث في ايجاد احدى نقط السطح المعرف $f(x_1, x_2)$ بحيث ان هذه النقطة تكون فوق الخط المستقيم المعرف بالقيد . وهذه الظاهيم تكون موضحة بالنسبة لمسألة النهاية العظمى كما في الشكل (١ - ٣) فالنهاية العظمى الغير مقيدة تحدث عند النقطة M . اما القيد فانه يكون ممثلا بالخط AB وتكون جميع النقاط على السطح ما عدا تلك التي تقع فوق الخط AB وهي النقاط عبر الخط المنحني PNQ ليست ذات فائدة وتقع النهاية العظمى المقيدة عند النقطة N وتكون النتيجة كما هي منطوقه من حالة عدم القيد .

وتكون النهاية العظمى المقيدة احدى من النهايات العظمى التي يمكن ان تكون طبيعيا الحال اولى . تشق شروط الكفاية للنهاية العظمى لمثال المتغيرين المقيدتين بالاشارة الى حالة عدم القيد . ونذكر هنا فقط شروط الكفاية لمعادلة n .



شكل (١ - ٣)

بمختبر بدون اثبات •

لندع $f(x_1, x_2)$ تكون دالة لتحقيق الحد الاعلى منها مرسة للقيد $g(x_1, x_2) = 0$. لنفترض ان احد اشتقاقات $g(x_1, x_2)$ الجزئية على الاقل ، وليكن $\partial g / \partial x_2 \neq 0$ ، لا يتلاشى في بعض المناطق • فعندئذ باستخدام مبرهنة الدالة الضمنية ، يمكن لنا ايجاد حلا فريدا $x_2 = h(x_1)$ شم بالصيغ في الدالة التي نريد ان تحقق حداها الاعلى فنحصل على : $f[x_1, h(x_1)]$. وهذا يكون دالة بمختبر واحد ، وتحقق نهايتها العظمى الغير مقيدة بالنسبة لـ x_1 للقيد • وكما اسلفنا فان شروط الكفاية للنهاية العظمى تكون :

$$df[x_1, h(x_1)]/dx_1 = 0, \quad d^2f[x_1, h(x_1)]/dx_1^2 < 0.$$

وبالمفاضل للحصول على شرط الدرجة الاولى :

$$(٣٨ - ١) \quad \frac{df}{dx_1} = f_1 + f_2 \frac{dh}{dx_1} = 0$$

ولكن $dh/dx_1 = dx_2/dx_1 = -g_1/g_2$ وذلك لان القيد يجب ان يتحقق لجميع قيم (x_1, x_2) المتوفرة فيها الشروط $g_1 dx_1 + g_2 dx_2 = 0$ ومن ثم فان :

$$(٣٩ - ١) \quad f_1 + f_2 \left(-\frac{g_1}{g_2} \right) = 0$$

والان ، دعنا نعرف $-f_2/g_2 = \lambda$. فعندئذ تصبح (٣٩ - ١) ،

$$(٤٠ - ١) \quad f_2 + \lambda g_2 = 0$$

$$(٤١ - ١) \quad f_1 + \lambda g_1 = 0 \quad \text{وايضا :}$$

وعين المعادلتين (٤٠ - ١) و (٤١ - ١) وكذلك القيد هي شروط الدرجة الاولى

للنهاية العظمى •

ويمكن الحصول أيضا على شروط الدرجة الأولى باستخدام دالة لا قرائج •

$$(٤٢-١) \quad F(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$$

حيث أن λ تسمى مضروب لا قرائج ويوضع مشتقاتها الجزئية بالنسبة لـ x_1, x_2, λ مساوية لصفر، فإن هذا سوف يعطى ثلاثة معادلات محتوية على ثلاثة من المتغيرات x_1, x_2, λ ، ويعطى الحل لهذا النظام من المعادلات النقطه او النقطه التي تتحصل عندها الدالة $f(x_1, x_2)$ على نهايتها العظمى (بشرط ان يتحقق شرط الدرجة الثانية الذي سوف نناقشه فيما يلي) وذلك مرضة لـ $g(x_1, x_2) = 0$ (١) •

يتطلب شرط الدرجة الثانية بان يكون اشتقاق الدالة : $f(x_1, h(x_1))$ الثاني سالبها •
ويضاغل (٢٨-١) بالنسبة لـ x_1 •

$$(٤٣-١) \quad \frac{d^2 f}{dx_1^2} = f_{11} + f_{12} \frac{dh}{dx_1} + f_{21} \frac{dh}{dx_1} + f_{22} \left(\frac{dh}{dx_1} \right)^2 + f_2 \frac{d^2 h}{dx_1^2} < 0$$

وبملاحظة ان $f_{12} = f_{21}$ للدوال التي تكون اشتقاقها الجزئية الثانيه متساويان $dh/dx_1 = -g_1/g_2$ ، فان (٤٣-١) تصبح :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx_1^2} &= f_{11} - 2f_{12} \left(\frac{g_1}{g_2} \right) + f_{22} \left(\frac{g_1}{g_2} \right)^2 - f_2 \left[\frac{[g_{11} + g_{12}(-g_1/g_2)]g_2^2 - [g_{21} + g_{22}(-g_1/g_2)]g_1}{g_2^3} \right] \\ &= \frac{1}{g_2^3} \left[f_{11}g_2^3 + f_{22}g_1^2 + 2f_{12}g_1g_2 - \left(\frac{f_2}{g_2} \right) (g_{11}g_2^3 + g_{22}g_1^2 - 2g_{12}g_1g_2) \right] < 0 \end{aligned}$$

ونلاحظ ايضا ان $-f_2/g_2$ قد عرفت على انها λ ، وهذه تصبح

$$(٤٤-١) \quad \frac{d^2 f}{dx_1^2} = \frac{1}{g_2^3} [(f_{11} + \lambda g_{11})g_2^3 + (f_{22} + \lambda g_{22})g_1^2 - 2(f_{12} + \lambda g_{12})g_1g_2] < 0$$

وبما ان $g_2^3 > 0$ (لاحظ انه لكي نتكهن من تطبيق مبرهنة الدالة الضمنية فان g_2 يجب ان تغتري من ان لا تكون مساوية لصفر) فان الشرط (٤٤-١) سوف يتحقق بسهولة ويكون معادلا لـ الشرط التالي المحددة هيسيان المحدوديه +

$$\begin{vmatrix} f_{11} + \lambda g_{11} & f_{12} + \lambda g_{12} & g_1 \\ f_{12} + \lambda g_{12} & f_{22} + \lambda g_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

فتكون الحدود في الجزء الايسر الا على هي المشتقات الجزئية الثانيه للدالة $F(x_1, x_2, \lambda)$ بالنسبة لـ x_2, x_1 ويحتوى العمود الموجود في اقصى اليمين والصف السفلى على الاشتقاقات الجزئية الاولى للقيود، ويكون العنصر الموجود في الزاوية

(١) لو ان الدالة F قد تكونت بكتابة $g - \lambda g$ بدلا من $f + \lambda g$ ، فان الفرق الوحيد سوف يكون تغيرا في اشارة λ •

الجنوبي الشرقي مساويا لصفر • ويكون شرط الدرجة الثانية (١-٤٥) معادلا للمتطلب بأن الشكل التربيعة :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} dx_i dx_j \quad \text{يكون سالبا لجميع قيم } dx \quad \text{التي تحقق :}$$

$$g_1 dx_1 + g_2 dx_2 = 0 \text{ except } dx_1 = dx_2 = 0.$$

تعطى المعادلتان (١-٤٥) و (١-٤٦) شروط الدرجة الاولى للنهاية الصغرى المقيدة في حالة المتغيران • ويتطلب شرط الدرجة الثانية بأن تكون محددة هيسيان المحددة سالبة • ففي هذه الحالة يجب ان يكون الشكل التربيعة موجبا لقيم dx التي تحقق : $g_1 dx_1 + g_2 dx_2 = 0$ معادلا $dx_1 = dx_2 = 0$ •

ويمكن اشتقاق شروط الكفاية من الدرجة الاولى والثانية للنهايات العظمى والصغرى للدوال المحتوية على n من المتغيرات بحيث ان يكون لها $m < n$ من القيود • وذلك على نعط مشابه لما سبق • فمسألة القيد الواحد هي ان نتحقق الحد الاعلى من $f(x_1, \dots, x_n)$ عرضة ل $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ تكون الان دالة لا قرائج :

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, \dots, x_n)$$

ويتطلب شروط الدرجة الاولى بأن تتلاشى الاشتقاقات الجزئية الاولى للدالة F لكل من النهايات العظمى والصغرى • وهذا الشرط يعطى (١+ n) من المعادلات المستوية على (١+ n) من المتغيرات •

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1 + \lambda g_1 = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = f_n + \lambda g_n = 0$$

(١-٤٥)

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

وتضمن المعادلة الاخيرة بتحقيق القيد • ويعطى حل هذا النظام من المعادلات الاتية النقطه او النقط التي يحقق عندها $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نهاية عظمى (او صغرى) عرضة ل $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

ويتطلب شروط الدرجة الثانية بأن يكون الشكل التربيعة :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} dx_i dx_j$$

سالبا للنهاية العظمى (موجبا للنهاية الصغرى) لجميع قيم dx التي تحقق :

$$g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + \dots + g_n dx_n = 0$$

معادلا $dx_1 = dx_2 = \dots = dx_n = 0$ جميع i تكون الان المعادلات :

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & g_1 \\ F_{21} & F_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & g_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & g_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} & g_1 \\ F_{12} & F_{22} & \dots & F_{2n} & g_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} & g_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_n & 0 \end{vmatrix}$$

والتي تتكون من ربط حدود القيم الصغرى المحددة الرئيسية لمحددة هيسيان المكونه من الاشتقاق الجزئية الثانية للدالة F بالصف والعمود المحتويان على الاشتقاق الجزئية الاولى للقيده . ويكون العنصر في الركن الجنبى الشرقى لكل واحدة من هذه المصفوفات مساويا للصفر .

وسوف نتحقق شروط الدرجة الثانية للنهاية العظمى القيدة اذا كانت هذه المحددات المحدودة تتبادل في الاشارة ومبتدئه بالموجب . اى ان اشارات المحددات من اليسار الى اليمين يجب ان تكون $+, -, +, \dots$ وهكذا وسوف نتحقق شروط الدرجة الثانية للنهاية الصغرى القيدة اذا كانت جميعها سالبه . وتكون هذه الشروط مع (١ - ٤) شروط كتابه للنهايات العظمى والصغرى القيدة (١) .

ان دالة لاقرانج لحالة المتغيرات تكون :

$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g^1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_2 g^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$
حيث ان λ_1 و λ_2 يمثلان مضروب لاقرانج الغير محددة . فشروط الدرجة الاولى للنقاط القصوى تتطلب :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1 + \lambda_1 g_1^1 + \lambda_2 g_1^2 = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = f_n + \lambda_1 g_n^1 + \lambda_2 g_n^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = g^1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = g^2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

تتطلب شروط الدرجة الثانية بان يكون الشكل التربيعى المكون من الاشتقاق الجزئيه من الدرجة الثانية سالبا في حالة النهايه العظمى (موجبا في حالة النهايه الصغرى)

(١) راجع كتاب Samuelson المذكور سابقا في الطبع ٨ وايضا كتاب Allen: المذكور سابقا في الباب ١٩ وللحصول على معالجه اكثر مفصلا لبعض افكار هذه المسأله راجع :

"Definite and Semi-definite Quadratic Forms," *Econometrica*, vol. 20 (April, 1952), pp. 295-300.

لجميع مجموعات القيم (القيم الغير بديهية nontrivial لـ dx التي تحقق •

$$g_1^1 dx_1 + g_2^1 dx_2 + \dots + g_n^1 dx_n = 0$$

$$g_1^2 dx_1 + g_2^2 dx_2 + \dots + g_n^2 dx_n = 0$$

يربط القيم الصغرى المحددة الرئيسة للهيسيان الخاص بـ F بحدود الاشتقاقات الجزئية الاولى للقيدین :

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & g_1^1 & g_1^2 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & g_2^1 & g_2^2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & g_3^1 & g_3^2 \\ g_1^1 & g_2^1 & g_3^1 & 0 & 0 \\ g_1^2 & g_2^2 & g_3^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} F_{11} & \dots & F_{1n} & g_1^1 & g_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n1} & \dots & F_{nn} & g_n^1 & g_n^2 \\ g_1^1 & \dots & g_n^1 & 0 & 0 \\ g_1^2 & \dots & g_n^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

نفي حالة القيدین ، فان شروط الدرجة الثانية للنهاية العظمى سوف يتحقق اذا تبادلنا المحددات العليا في الاشارات ، مبتدئه بالسالب ، وذلك للنهاية الصغرى سوف تتحقق اذا كانت جميعها موجبه • فلو كان هناك $m < n$ من القيود فاننا سوف نربط حدود القيم الصغرى المحددة الرئيسة من الدرجة $(m+1)$ الى n بالاشتقاقات الجزئية للقيود الـ m وسوف تتحقق شروط الدرجة الثانية للنهاية العظمى اذا ، تبادلنا المحددات في الاشارة ، مبتدئه بالاشارة $(-1)^{m+1}$ وذلك للنهاية الصغرى سوف تتحقق اذا كانت جميع المحددات المقررة خاضعة للاشارة $(-1)^m$ •

الامتليات المفيدة وشبه المتطرفة (شبه التحدب)

Constrained Optima and Quasi-Concavity (Quasi-Convexity)

لقد ثبت باستخدام طرق رياضية متقدمة بان $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ لا يمكن ان يكون لها اكثر من نهاية عظمى مفيدة واحدة (نهاية صغرى) في الفترة وذلك اذا تحققت الشروط المحددة للنهاية العظمى المفيدة (النهاية الصغرى) عبر الفترة وفي هذه يكون تحقيق الشروط (٤٥-١) كافيا لوجود نهاية عظمى وحيدة شاملة (نهاية صغرى) ضمن الفترة •

تكون المحددة التالية يربط حدود هيسيان f مع الاشتقاقات الجزئية من الدرجة الثانية الخاصة بها :

$$(٤٦-١) \quad \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} & f_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} & f_n \\ f_1 & \dots & f_n & 0 \end{vmatrix}$$

فلو كانت f شبه مقعرة فإن القيم الصغرى المحددة الرئيسيه من الدرجة (٢) الى الدرجة n لـ (١١-٤٦) سوف تتبادل بحيث تكون غير سالبه أو الصغريات (٢) فلو كانت f شبه مقعرة بانضباط منتظم ضمن المجال فمثل هذه النقاط سوف لا توجد ضمن ذلك المجال وتكون القيم الصغرى المحددة الرئيسيه لـ (١١-٤٦) موجهه بانضباط. وسالبه بانضباط .

اما في حالة القيد الواحد فانه لو كانت f شبه مقعرة بانضباط منتظم وكانت g خطيه فان شروط الدرجة الثانيه النهاية العظمى المقيدة سوف تتحقق عندما تتحقق شروط الدرجة الاولى .

وتمويش $f_i = \lambda g_i$ من (١٠-٤٥) في (١١-٤٦) ثم بقسمة الصف الاخير والعمود الاخير لمحددة الحصلة بالمقدار $1/\lambda$ بحيث ان (١١-٤٦) تصبح :

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} & g_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} & g_n \\ g_1 & \dots & g_n & 0 \end{vmatrix}$$

وتكون قيمها الصغرى المحددة الرئيسيه باشارات يتطلبها تحقيق شروط الدرجة الثانيه وبالمثل ، اذا كانت f شبه محدبة بانضباط منتظم فاللحصول على نهايتها الصغرى تحت شرط القيد الخطي فان شروط الدرجة الثانيه سوف تتبع من شروط الدرجة الاولى .

فاذا وجد اكثر من قيد واحد وكانت f او كانت g غير خطيه ، فان الارتباطات بين شروط الدرجة الثانيه وشبه المقعر (شبه المحدب) تصبح اكثر تعقيدا فلو كانت g غير خطيه في حالة القيد الواحد ، فان $f_g \neq F$ وان شبه المقعر المضبط بانتظام سوف لا يكون كاف بعد ذلك لضمان شروط الدرجة الثانيه في حالة النهاية العظمى المقيدة . وهذه الحالة سوف تنطلي بالتمرين (١١-١١) .

النهايات العظمى والصغرى بقيد على شكل متباينات :

Maxima and Minima with Inequality Constraints

يرغب الانسان في بعض الاحيان من الحصول على النهاية العظمى للدالة $f(x_1, \dots, x_n)$ مرصه لمجموعتين من القيود على شكل متباينات :

(١) راجع

K. J. Arrow and A. C. Enthoven, "Quasi-Concave Programming," *Econometrica*, vol. 29 (October, 1961), pp. 779-800.

(٢) ولمراجعة امثلة لمت هذه الدوال ، راجع :

D. W. Katzner, *Static Demand Theory* (New York: Macmillan, 1970), pp. 34, 311.

$$(٤٧- ١) \quad g^i(x_1, \dots, x_m) \geq 0 \quad i=1, \dots, m$$

$$(٤٨- ١) \quad x_1, \dots, x_m \geq 0$$

فالمجموعة الاولى تضبط العلاقات بين جميع الـ x والمجموعة الثانية تتطلب بان تكون المتغيرات غير سالبه فهذه مساله برمجيه غير خطيه nonlinear-programming وقد تمس على شروط الكفايه والضرورة للنهاية المعظمى بدلالة دالة مشابهة لدالة لاقرانج التى استخدمت فى حالة القيود على شكل مستويات ، لذا تكون الدالة :

$$(٤٩- ١) \quad F(x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_m) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g^i(x_1, \dots, x_m)$$

وتكون شروط كون ونكر *Kuhn-Tucker conditions* (٤٩- ١) كالتالى :

$$(٥٠- ١) \quad \frac{\partial F}{\partial x_j} = f_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_j^i \leq 0 \quad j=1, \dots, n$$

$$(٥١- ١) \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = g^i \geq 0 \quad i=1, \dots, m$$

$$(٥٢- ١) \quad x_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n$$

$$(٥٣- ١) \quad \lambda_i \geq 0 \quad i=1, \dots, m$$

$$(٥٤- ١) \quad \left(f_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_j^i \right) x_j = 0 \quad j=1, \dots, n$$

$$(٥٥- ١) \quad \lambda_i g^i = 0 \quad i=1, \dots, m$$

فمجموعتى الشروط الاولى (٥٠- ١) و (٥١- ١) تكونا مشابهين لشروط الدرجة الاولى فى حالة القيود على شكل مستويات ، والفرق هو ان هذه الاشتقاقات الجزئية ليس شرط ان تكون صفرا ولكن غير سالبه وغير موجب على التوالى ويضمن زوج الشرط الثانى ان جميع المتغيرات ، بما فى ذلك مضروبى لاقرانج ، تكون غير سالبه ، اما المجموعة الاخير من الشروط فانها تكون الشروط التكميلية complementarity اما اسباب وجود متباينات فى (٥٠- ١) و (٥١- ١) فانه سوف يعطى بطريقة بديهيه بالنسبه لحالة المتغير الواحد عرضة لمطلب الغير سالبه nonnegativity עבור ان احدا من الناس يرغب فى الحصول على النهاية المعظمى للدالة $f(x)$ عرضه لـ $x \geq 0$ فهناك احتمالين ، اذا وجدت نهاية عظمى :

- (١) تحدث نهاية عظمى غير مقيدة عن بعض النقاط حيث ان x تكون اما موجبته او صفر . ففى هذه الحالة يكون شرط الدرجة الاولى المناسب : $f'(x) = 0$
- (٢) يوجد نهاية عظمى غير مقيدة عند نقطة ما بحيث ان $x < 0$ وما ان القيم السالبة لـ x غير مقبولة بمنطق المسألة ، فان اكبر قيمة مقبولة للدالة يجب ان تحدث عند $x = 0$ ولكن الدالة عند هذه النقطة يجب ان تكون تنازلية فى القيم ، اى ان $f'(x) < 0$

يجب ان تكون سالبه ، لانه لو ان هذا غير صحيحا ، فان النهاية العظمى الغير هقيده سوف تحدث عند بعض القيم الموجبه لـ x متضاه مع الافتراض بانها لا تحدث . لذا فان $f'(x) \leq 0$ سوف تعطي جميع الحالات المحتمله وذلك عندما نفرض الانقباض $x \geq 0$ وبالاضافه لهذا فان هذا سوف يعطي تميزا يديهي للشرط التكميلي (١ - ٥٤) ، ويجب ان تكون $f'(x)$ مساويه لصفر عند النهاية العظمى : اذا كانت $x > 0$ فان $f'(x)$ يجب ان تساوى صفر كما ذكرنا سالفا ، اما اذا كانت $f'(x)$ غير صفريه (اي سالبه) فان x يجب ان تساوى صفر وتحدث النهاية العظمى عندئذ عند نقطة الاصل .

لو كانت $f(x_1, \dots, x_n)$ وكانت $g'(x_1, \dots, x_n) = 1, \dots, m$ جميعها مقعرة فـان شروط كون ونكر سوف تكون شروط كفايه للنهاية العظمى . ومعنى اخر لو تحقققت النظر فان الكميات المتجهه x^0, λ^0 والتي تحل (١ - ٥٠) الى (١ - ٥٥) تتـلك الخاصية بان x^0 تحل مساله النهاية العظمى ، وتكون شروط كون ونكر شروطا ضروريه للنهاية العظمى اذا تحققت ما يسمى بشرط " القيد المشـروط - *constraint-qualification* " ويضمن هذا الشرط اساسا ان منطقه النقط في الفراغ x لم تلغس بالقيود وتسمى " المنطقه الرئيه " ويكون لها شكلا منتظما ولكن بالمعنى المذكور هنا لا تكون المناطق الرئيه منتظمه اذا اصبحت القيود ملاسمة لبعضها (راجع النص - (١ - ١٥) فتمت هذه المناطق لاجتاجه في الاقتصاد . ففى هذا الكتاب سوف نفترض ان القيد المشروط سوف يتحقق بحيث اننا لو اطينا دوالا مقعرة ، فان شروط كون ونكر سوف تكون شروط ضروريه وكفايه .

فالاطار السابق يمكن تكيفه ليضم صليه الحصول على النهاية الصغرى تحت شرط القيود التى على شكل متباينات . فبمعكس المتباينات فى (١ - ٤٧) و (١ - ٥٠) و (١ - ٥١) تكون شروط كون ونكر شروطا ضروريه وكفايه لحالة النهاية الصغرى هذا اذا كانت الدوال تحت الاعتبار جميعها محدبة وان القيد المشروط قد تحقق . وكبدل . فان من الممكن القيام بحطية الحصول على النهاية العظمى باستخدام الدالة بعلامه سالبه ويكون المطلوب هو النهاية الصغرى بدون تغيير فى الشروط .

ان ضروريات لاقتران فى حالة القيود على شكل متباينات سوف يكون لها تفسير مماثلا للضروريات فى حالة القيود على شكل مساويات والمتغيرات الثنائيه للمرجـه الخطيه (راجع الفصل ٥ - ٧) فهم يعطوا المعدل الذى يزداد عنده القيمه العظمى للدالة المطلوبه لكل وحده زباده فى القيود وذلك اذا كانت الاشتقاقات الجزئيه المناسبه قد عرفت . فلو حققت القيم العظمى للمتغيرات اى قيد مثل المتباينه المنقبضه فان المتغير الششائى المقابل سوف يساوى صفر .

A-4 INTEGRALS

١ - ٤ التكاملات :

ان تكامل اى دالة $f(x)$ هى عبارة عن دالة اخرى $F(x)$ بحيث ان اشتقاقها يساوى $F'(x) = f(x)$ ويكون التكامل فريدا ما عداى لقيمة ثابت c مضاف لها بطريقة عشوائية ، لان هذا الثابت سوف يتلاشى عندما نقوم بعملية التفاضل . ولهذا فانه اذا كانت $F(x)$ تكاملا للدالة $f(x)$ فان $F(x) + c$ هى كذلك تكاملا للدالة $f(x)$ ونعبر عن التكامل بأنه عملية ايجاد التكامله وهى عبارة عن تفاضل مالمطلوب ونسمى التكامله $F(x) + c$ تكامله غير محدودة indefinite integral ونرمز لها كالتالى:

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

ان طرق ونهيات ايجاد التكاملات الغير محدودة لانواع مختلفة من الدوال قد تكون صعبه ونسرد فيما يلى بعض طرق التكامل البسيطة بدون اثبات (١)

1. $f(x) = g'(x)$, $\int f(x) dx = g(x)$
2. $f(x) = g(x) + h(x)$, $\int f(x) dx = \int g(x) dx + \int h(x) dx$
3. $f(x) = cg(x)$ (c a constant), $\int f(x) dx = c \int g(x) dx$
4. $f(x) = x^k$ ($k \neq -1$), $\int f(x) dx = x^{k+1}/(k+1)$
5. $f(x) = 1/x$, $\int f(x) dx = \log x$
6. $f(x) = e^{ax}$, $\int f(x) dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
7. $x = g(u)$, then $\int f(x) dx = \int f[g(u)]g'(u) du$
8. $u = u(x)$, $v = v(x)$, $\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx$

ونسمى هذه تكامل بالاجزاء Integration by parts

قد نستخدم التكامل في ايجاد المساحة تحت المنحنى . فالدالة المرسومة في الشكل (١ - ٤) هى الدالة $f(x)$ فالمساحة المساحة بين محور x والمنحنى بين نقطتى a و b فاننا نقوم بعملية تقسيم جزئى للمسافة $(b - a)$ الى قطع بعرض Δx_i ثم نقيم مستطيلات بطول $f(x_i)$ على كل قطعة فيكون ارتفاع كل مستطيل عبارة عن قيمة الدالة عليه عند الحدود على الجانب الايسر لكل قطعة . فتكون المساحة المطلوبة A هى $\sum f(x_i) \Delta x_i$ (٢) فكما صغر عرض المستطيلات فكما اقترب $\sum f(x_i) \Delta x_i$ من المساحة الصحيحة اكثر فاكثر وفى الحقيقة:

$$A = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum f(x_i) \Delta x_i$$

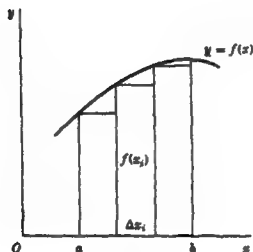
وذلك بشرط ان هذه النهاية سوف تكون موجودة exists ^(٢) الآن ، نغير الحدود على الطرف الايمن (هي b) للمساحة تحت الاعتبار الى حدود متغير مولتكن x فتكون المساحة من a الى الحدود على الطرف الايمن المتغيره x بدلالة x وسوف نرمز لها بالرمز $A(a, x)$ فينتج عن هذا مساحه اكبر بعض الشيء هذا اذا كانت الحدود المتغيره بعيدة اكثر الى جهة اليمين اي ان هذه الحدود تكون $x + \Delta x$ سوف نرمز الى حصيله المساحه الناتجه بالرمز $A(a, x + \Delta x)$ ويكون الفرق بين هاتين المساحتين :

$$A(a, x + \Delta x) - A(a, x) = A(x, x + \Delta x)$$

وتكون المساحه بين النقطتين x و $x + \Delta x$ معطاة بعرض الفترة Δx مضروب في قيمة الدالة $f(x)$ عند اى نقطه بين x و $x + \Delta x$ نرمز لهندة القيمة لـ x بالحروف x_0 :

$$A(a, x + \Delta x) - A(a, x) = f(x_0) \Delta x$$

$$\frac{A(a, x + \Delta x) - A(a, x)}{\Delta x} = f(x_0)$$



شكل (١ - ٤)

(١) وسوف تكون هذا النهاية موجودة (قائمة) اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة .

وهذا يثبت ان اشتقاق المساحة تحت دالة ما هي الدالة نفسها وان تكامل الدالة سوف يكون المساحة تحتها . وتكون المساحة $A(a, b)$ هي التكامل المحدود للـ $f(x)$ بين النقطتين a و b فلو كانت $F(x)$ هي التكامل الغير محدود للدالة $f(x)$ فان التكامل المحدود بين a و b يكون :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ونعطي فيما يلي مثالا للتكامل المحدود :

$$\int_0^1 ae^{-x} dx = -\frac{ae^{-x}}{1} + \frac{a}{1} = \frac{a(1-e^{-1})}{1}$$

تتم مبرهنة القيمة الوسطى في التكامل mean value theorem على انه اذا

كانت $f(x)$ متصلة عبر الفترة من a الى b فان :

$$\int_a^b f(x) dx = f(a\theta + b(1-\theta))(b-a)$$

وذلك لبعض $0 \leq \theta \leq 1$ وهذا يعنى ان التكامل المحدود يساوى عرض الفترة مضروباً بـ

الدالة المتكاملة integrand متقيمة عند نقطة مناسبة في الفترة .

قد تكون نهايات التكامل بدلالة المتغير x كما هو الحال في $g(x) = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy$.

ففي هذه الحالة يكون اشتقاق التكامل كالتالى :

$$g'(x) = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy - \psi_1'(x)f[x, \psi_1(x)] + \psi_2'(x)f[x, \psi_2(x)]$$

DIFFERENCE EQUATIONS

١ - ٥ المعادلات الفرقية :

اعتبر المتتاليه العدديه $1, 4, 9, 16, 25$ وارمز لهم كالتالى

فتكون الفروق الاولى لهذه المتتاليه : $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 3, \Delta y_2 = y_3 - y_2 = 5, \Delta y_3 = y_4 - y_3 = 7,$$

وهكذا . وتكون الفروق الثانيه هي الفروق بين الفروق الاولى او

$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 2, \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 2,$$

وهكذا . ففي هذه المتتاليه العدديه بالذات تكون الفروق الثانيه شابه وتساوى

ويمكن كتابتها كالتالى :

$$\Delta^2 y_1 = 2 \quad (١ - ٥)$$

ومعادلة (١ - ٥) يمكن ايضاً كتابتها كالفرق بين اثنين من الفروق الاولى

$$\Delta^2 y_{1+1} - \Delta y_1 = 2 \quad (١ - ٥)$$

او

ويمكن ايضاً كتابة كل من الفروق الاولى في (١ - ٥) كالفرق بين ضروب من المتتاليه

$$(٥٨-١) \quad (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = 2 \quad \text{او}$$

فالمعادلة (٥٨-١) تكون معادلة فرقته ، ولقد وضعت باعتبارات فروقات متتاليته
مده فيه فهي تربط العضو الـ $(i+2)$ في المتتاليه بالعضو الـ $(i+1)$ والعضو الـ i
ومما فان المعادلات الفرقية تربط العضو الـ i للمتتاليه باعضاء اخرى سابقة وتكون
المعادلة الفرقية العامه الخطيه من الدرجه n بمعاملات ثابتة كالتالي :

$$(٥٩-١) \quad a_0 y_i + a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + \dots + a_n y_{i-n} + b = 0$$

فمعادلة (٥٩-١) تكون معادلة خطيه لانه لا يوجد اى y مرفوعه الى اى قوة اكبر من
واحد ولانها لا تحتوى على اى خارج ضرب او اى دوال اخرى بدلالة y فهي من
الدرجه n لان اقصى قيمة لـ y الممتدة عليها y_i هي y_{i-n} ولهذا فان
(٥٨-١) تكون معادلة فرقته خطيه من الدرجه الثانيه بمعاملات ثابتة وتكون المعادلة
الفرقيه متجانسه اذا كانت $b = 0$ ولكن المعادلة (٥٨-١) ليست متجانسه .

The Nature of the Solution

طبيعة الحل :

ان المعادلة التاليه هي عبارة عن معادلة متجانسه من الدرجه الاولى :

$$(٦٠-١) \quad y_i = a y_{i-1}$$

وباعطاء المعلومات بان $y_0 = 2$ فان بالامكان تحديد $y_1 = 2a$ من (٦٠-١) وذلك
بتعويض قيمة y في الجانب الايمن ، ولذا فان : $y_2 = a(2a) = 2a^2$ وبهذه الطريقه يكون
من الممكن حساب قيمة y لاي قيمة لـ i ولكن هذه الطريقه تكون صعبه بعض الشئ
ويمكن تلافيها بايجاد حلا عاما للمعادلة الفرقية فالحل العام هو عبارة عن تعبيره ، عادة
بدلالة i يعطى قيمة y_i حالما يتم تمويض القيمة المرغوبه لـ i فيجب ايجاد
دالة i بحيث ان $y_i = f(i)$ فاي دالة مثلا هذه سوف تكون حلا اذا حققت المعادلة
الفرقيه ففي حالة الدرجه الاولى فان الحل $f(i)$ يجب ان يحقق ^(١) :

$$(٦١-١) \quad f(i) = af(i-1)$$

وبالاضافه لهذا فان الحل يجب ان يكون ايضا متوافقا consistent مع الشروط
الابتدائيه initial conditions فالشروط الابتدائيه هي عبارة عن منطوقا
من قيمة y نقطة واحد معينه او اكثر في المتتاليه ويجب ان يكون عدد الشروط
الابتدائيه مساويا لنفس درجه المعادلات وذلك من اجل الحصول على حلا كاملا ولهذا
فانه يوجد فقط شرطا ابتدائيا واحدا ضروريا في حالة الدرجه الاولى . وهذا كان معنا

(١) ان من الممكن اعتبار اى معادلة فرقته كتعريف لـ y بدلالة i فكل قيمة من قيم i
توجد قيمة من قيم y مقابله لها بشرط ان المتغير المستقل i يستطيع ان يتحمل
على قيم تكا عليه فقط ، اى : $0, 1, 2, 3, \dots$

بـ $y_0 = 2$ في المثال السابق • ولكن المشكلة هي في إيجاد حلا أو حلولاً تحقق المعادله الفرقية ومن ثم اختيار الحل الذي تحقق الشروط الابتدائية أيضاً ^(١) وسوف نركز اهتمامنا فيما يلي على المعادلات الفرقية الخطية من الدرجة الاولى بمعاملات ثابتة •

Homogeneous Equations

المعادلات المتجانسة :

يمكن كتابة المعادلة (١ - ٦٠) كالآتي :

$$\frac{y_i}{y_{i-1}} = a$$

وذلك لجميع :

$$y_i = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot \frac{y_{i-1}}{y_{i-2}} \cdots \frac{y_2}{y_1} y_0 = a^i y_0$$

ان الحد a^i هو نفسه حلاً لأنه يحقق (١ - ٦٠) :

$$a^i = a(a^{i-1})$$

فلو كانت $f(t)$ حلاً فإن $cf(t)$ سوف تكون حلاً أيضاً حيث ان ثابتة a يعطى بالمعادلة الفرقية والحد c سوف يحدد على اساس الشرط الابتدائي بحيث ان الحل العام ca^i سوف يكون متوافقاً معها • ففي المثال السابق نجد ان الشرط الابتدائي قد اُعطى بـ $y_0 = 2$ ، $y_0 = ca^0 = c = 2$ ويكون الحل العام هو $y_i = 2a^i$.

Nonhomogeneous Equations

المعادلات الغير متجانسة :

يتطلب الحصول على حل للمعادلات الفرقية الغير متجانسة خطوتين • فالخطوة الاولى تكون لإيجاد الحل $f(t)$ للمعادلة المتجانسة المقابلة • اما الخطوة الثانية فهي لإيجاد الحل الخاص *particular solution* والذي يرمز له بالرمز $g(t)$ ويكون الحل العام الاخير هو : $f(t) + g(t)$ فاذا كانت المعادلة الغير متجانسة كالآتي :

$$ay_i + by_{i-1} + c = 0 \quad (١ - ٦٢)$$

فان حل الجز المتجانس من (١ - ٦٢) يكون $k(-b/a)^i$ ولايجاد الحل الخاص نموض في (١ - ٦٢) بـ $y_i = K$ حيث ان ثابت K ثم نحل لقيمة :

(١) راجع :

W. J. Baumol, *Economic Dynamics* (2d ed., New York: Macmillan, 1959), chaps. 9-13;
and S. Goldberg, *Introduction to Difference Equations* (New York: Wiley, 1958),
chaps. II-III.

$$aK + bK + c = 0$$

$$K = \frac{-c}{a+b}$$

بحيث ان $a + b \neq 0$ ومن ثم فان الحل العام يكون :

$$y = k\left(-\frac{b}{a}\right)^t - \frac{c}{a+b}$$

حيث ان k تتحدد حسب الشروط الابتدائية . فلو كانت $a + b = 0$ فاننا — سوف نفترض عندئذ ان الحل الخاص يكون $y_t = Kt$ ثم نموض بهذا في (١ - ٦٢) ونحل لقيمة K ويكون الحل العام في هذه الحالة هو :

$$y = k(-b/a)^t + Kt, \text{ حيث ان } K = c/b$$

DIFFERENTIAL EQUATIONS

١ - ٦ المعادلات التفاضلية :

ان المعادلة التي تكون المتغيرات فيها هي الاشتقاقات تسمى معادلة تفاضلية .
والأمثلة على هذا :

$$dy/dt = 17 \quad (١) \quad d^2y/dt^2 + b dy/dt + cy = 0 \quad (٢) \quad dy/dt + by^2 = c \quad (٣)$$

فالمعادلتان (١) و (٢) يكونان معادلتين تفاضلتين خطيه لانهما غير خطيتان في (١) وفي اشتقاقاتها . اما المعادلات في (٣) فنهما غير خطيه وسوف لنعتمدها هنا . (١)
وتكون المعادلة التفاضلية الخطيه العامه من الدرجة n كالآتي :

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y + b = 0 \quad (٦٣-١)$$

وتكون هذه المعادلة خطيه اذا كانت $b = 0$ اما معادلة الدرجة الاولى المتجانسه فهي كالآتي :

$$\frac{dy}{dt} = by \quad (٦٤-١)$$

ان الحل العام للدالة $y = f(t)$ الذي يحقق المعادلة ويعطى قيمة y بعد تعويضه بقيمة المتغير المستقل t وكما هو الحال في المعادلات الفرقية فان الحلول يجب ان تحقق ايضا الشروط الابتدائية .

(١) وتسمى المعادلات ايضا المعادلات التفاضلية المادية لان اشتقاقاتها تكون اشتقاقات كليه . وتسمى المعادلات التي تحتوي على اشتقاقات جزئية بالمعادلات التفاضلية الجزئية وسوف نواجه مثل هذه المعادلات الاخير في اقل اعتيادا في التطبيقات الاقتصادية من المعادلات التفاضلية المادية .

يمكن الحصول على حل لـ (٦٤-١) بالتكامل . فبمعادلة dy و dt كتفاضلات فإنه يمكن كتابة (٦٤-١) كالآتي :

$$\frac{dy}{y} = b dt$$

وبتكامل كلا الطرفين :

$$\int \frac{1}{y} dy = \int b dt$$

$$\log y = bt + c \quad (٦٥-١)$$

حيث أن c هي معيار ثابت التكامل والذي يحدد من الشروط الابتدائية فمن (٦٥-١) يكون حل (٦٤-١) كالآتي :

$$y = e^{bt+c} = ke^{bt}$$

حيث أن $k = e^c$ فإذا إعطينا الشرط الابتدائي $y = y_0$ عندما تكون $t = 0$ فإنه يتبع أن $k = y_0$ ويكون الحل كالآتي :

$$y = y_0 e^{bt}$$

إن اشتقاقات حلول المعادلات الدرجات العليا يكون له أوجه عدة معاملة للاشتقاقات المقابلة للمعادلات التفرعية . فإلى معادلة تفاضلية على الشكل (٦٤-١) فإن الحل سوف يكون e^{at} حيث أن a لم يحدد بعد أما في حالة الدرجة الثانية

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0$$

فإن التعميم بـ e^{at} سوف يعطى :

$$a\lambda^2 e^{at} + b\lambda e^{at} + ce^{at} = 0$$

وبالقسمه على e^{at} :

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

وبما أن الشكل التربيعي يعطى عامّة جزيرين λ_1 و λ_2 فإن الحل العام سوف يكون على الشكل $y = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$ فإذا إعطينا الشروط الابتدائية : $y = y_0$ و $\frac{dy}{dt} = y'_0$ عندما تكون $t = 0$

$$y_0 = k_1 + k_2 \quad y'_0 = k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2$$

ويعتبر الثوابت كالآتي :

$$k_1 = \frac{y'_0 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad k_2 = -\frac{y'_0 - \lambda_1 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

وذلك إذا كانت $\lambda_1 \neq \lambda_2$ فلو كان الحل للمعادلة المميزة characteristic equation $\lambda = \theta_1 \pm \theta_2 i$ complex numbers عبارة عن زوج من الأعداد المركبة المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية يصبح :

$$y = e^{\theta_1 t} (k_1 \cos \theta_2 t + k_2 \sin \theta_2 t)$$

حيث ان K_1 و K_2 سوف تتحدد كالسابق من الشروط الابتدائية. نجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة بنفس طريقة ايجاد حل المعادلات التفرعية :

افترض ان $y' = K$ ثابت K وهذا يعطى حلا عوض بهذا الحل التجريبي في :

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy + d = 0$$

ثم حل لقيمة K بشرط ان $c \neq 0$ ^(١) . فيكون الحل العام ، مطلقا سبق هو حاصل جمع الحل الخاص والحل للمعادلة المتجانسة .

(١) فلو كانت $c = 0$ فيمكن افتراض ان $y = Kt$ ولو كانت b ايضا تساوى صفر ، فان الحل الخاص التجريبي يصبح Kt^2 راجع الفصل (١ - ٥) .

EXERCISES

A-1 Use Cramer's rule to solve the following system of simultaneous equations:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 &= -13 \end{aligned}$$

A-2 Differentiate the following functions:

- $f(x) = 6x^3 + 2x^2 - x + 12$.
- $f(x) = 4\sqrt{x}$.
- $f(x) = e^{-x}(x-2)$.
- $f(x) = 4x^3/(2x^2 - x)$.
- $f(x) = \ln(x^{-1})$.

A-3 Determine the values of x at which the following functions possess maximum and minimum values:

- $f(x) = x^3 - 2x + 5$.
- $f(x) = x^3 - 27x^2 + 195x + 3$.
- $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$.

A-4 Determine whether the following functions are strictly convex, strictly concave, or neither over the specified intervals:

- $f(x) = x^3 - 3x + 4$, for $x = \text{any real number}$.
- $f(x) = \ln x$, for $x > 0$.
- $f(x) = e^{ax}$, for $x \leq 0$.
- $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, for $x \geq 0$.

A-5 Determine f_{11} and f_{12} for the following functions of two variables:

- $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3 - x_1 x_2 + 3x_1 - 2x_2$.
- $f(x_1, x_2) = \ln(2x_1 + 3x_2)$.
- $f(x_1, x_2) = x_1^2$.

A-6 Take the total differential of $y = 2x_1 x_2^3 + x_2 e^{x_1} + \ln x_1$.

A-7 Construct the envelope of the family of curves in the xy plane given by $y - 2x^2 - xk + k^2 = 0$.

A-8 Find values for x_1 and x_2 which maximize

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 10x_2 + x_1 x_2 - 0.5x_1^2 - 3x_2^2$$

A-9 Let $f(x_1, x_2) = e^{-1/2}(2x_1^2 + 3x_2^2)$. Verify that this function has maxima at $(1, 0)$ and $(-1, 0)$, saddle points at $(0, 1)$ and $(0, -1)$, and a minimum at $(0, 0)$. Draw the (approximate) contours or level curves of the function.

A-10 Let $f(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$, where $A, \alpha, \beta > 0$, be defined for the domain $x_1, x_2 > 0$. Demonstrate that the function is strictly concave within its domain if and only if $\alpha + \beta < 1$.

A-11 Let $f(x_1, x_2)$ be maximized subject to $g(x_1, x_2) = 0$. Assume that optimal values for the appropriate Lagrange multiplier are strictly positive. Show that strict quasi-concavity for both f and g and regular strict concavity for one of the two functions is sufficient to ensure the second-order conditions whenever the first-order conditions are satisfied.

A-12 Find values for x_1 and x_2 that maximize $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ subject to the requirement that $5x_1 + 2x_2 = 300$. Demonstrate that the appropriate second-order condition is satisfied.

A-13 Find values of x_1 and x_2 that maximize $f(x_1, x_2) = (x_1 + 25)^{1/4} x_2^{1/4}$ subject to the requirements that $5x_1 + 10x_2 \leq 100$ and $x_1, x_2 \geq 0$.

A-14 Find functions of two variables with the domains $x_1, x_2 > 0$ that are

- Quasi-concave, but not strictly quasi-concave and not concave.
- Strictly quasi-concave, but not concave.
- Quasi-concave, but not strictly quasi-concave and not strictly concave.
- Strictly quasi-concave and concave, but not strictly concave.

A-15 Find the optimal solution to the nonlinear-programming problem: maximize x_1 subject to $(1 - x_1)^3 - x_2 \geq 0$ and $x_1, x_2 \geq 0$. Show that the Kuhn-Tucker conditions are not satisfied at the

maximum. Explain why they are not.

A-16 Demonstrate that the simultaneous equations

$$\begin{aligned}x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 &= y_1 \\ x_1 + 2x_2 &= y_2\end{aligned}$$

do not possess solutions of the form $x_i = \phi(y_1, y_2)$, $i = 1, 2$.

A-17 Find $\int f(x) dx$ if

(a) $f(x) = x^2 - 2x$.

(b) $f(x) = (2x + 1)/(x^2 + x)$.

(c) $f(x) = ae^{-bx}$.

A-18 Evaluate the following definite integrals:

(a) $\int_0^8 (2x + 3) dx$.

(b) $\int_1^e (1/x) dx$.

A-19 Solve the following nonhomogeneous difference equation:

$$2y_t - y_{t-1} - 6 = 0 \quad \text{and} \quad y_0 = 10$$

A-20 Solve the homogeneous second-order differential equation:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

where $y_1 = 6$ and $y'_1 = 3$.

SELECTED REFERENCES

- Aitken, A. C.: *Determinants and Matrices* (New York: Interscience, 1951). A concise reference work that is too difficult for the beginner.
- Allen, R. G. D.: *Basic Mathematics* (New York: St. Martin's, 1964). A modern text of particular interest to economists.
- : *Mathematical Analysis for Economists* (London: Macmillan, 1938). A survey of the calculus with many economic illustrations.
- Apostol, T. M.: *Calculus*, vols. I and II (2d ed., New York: Wiley, 1967). A comprehensive and definitive treatise.
- Baumol, W. J.: *Economic Dynamics* (2d ed., New York: Macmillan, 1959). Chaps. 9-13 contain an introduction to linear difference equations and chap. 14 contains an introduction to differential equations.
- Chiang, A. C.: *Fundamental Methods of Mathematical Economics* (2d ed., New York: McGraw-Hill, 1974). A detailed treatment of algebra, calculus, linear and nonlinear programming, and other topics of interest to economists. The level of the work makes it accessible for readers without advanced preparation.
- Goldberg, S.: *Introduction to Difference Equations* (New York: Wiley, 1958). A beginning text with many examples drawn from economics.
- Goursat, E.: *A Course in Mathematical Analysis*, vol. I, trans. by E. R. Hedrick (Boston: Ginn, 1904). A classic treatise. Recommended for intermediate and advanced students.
- Hadley, G.: *Linear Algebra* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961). Determinants are covered in chap. 3.
- Intriligator, Michael D.: *Mathematical Optimization and Economic Theory* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1971). A text covering the theory of maximization and applications to many subjects in economics.
- Klein, E.: *Mathematical Methods in Theoretical Economics* (New York: Academic, 1973). A comprehensive and fairly advanced coverage of the parts of algebra and topology most frequently employed in economics. Calculus is not covered.
- Nikaido, H.: *Convex Structures and Economic Theory* (New York: Academic, 1968). Global univalence is covered in chap. 7. Advanced mathematics is used.
- Perlis, S.: *Theory of Matrices* (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1952). A specialized treat-

ment of determinants and matrices.

Roberts, B., and D. L. Schulze: *Modern Mathematics and Economic Analysis* (New York: W. W. Norton, 1973). An intermediate-level exposition of most mathematical tools encountered in economics.

Samuelson, Paul A.: *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). A mathematical approach to economic theory. An appendix contains a survey of some of the mathematical tools employed in the text. The treatment will prove difficult for all but advanced students.

إجابات التمارين ذات الأعداد الزوجية

ANSWERS FOR EVEN-NUMBERED EXERCISES

Chapter 2

2-2 For a strictly concave function $f[\lambda q_1^0 + (1-\lambda)q_1^1, \lambda q_2^0 + (1-\lambda)q_2^1] > \lambda f(q_1^0, q_2^0) + (1-\lambda)f(q_1^1, q_2^1)$. Let $\lambda = 0.5$, multiply through by 2, and rearrange terms to obtain the desired result.

2-4 Form the function $V = q_1 q_2 + \lambda(y - p_1 q_1 - p_2 q_2)$, and set its partial derivatives equal to zero:

$$\gamma q_1^{-1} q_2 - \lambda p_1 = 0 \quad q_1 - \lambda p_2 = 0 \quad y - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$$

which yields $p_1 q_1 = \gamma p_2 q_2$, a positively sloped straight line through the origin.

2-6 V is a monotonic transformation of the utility function given in Exercise 2-3. Specifically, $V = U^4 + \ln U$.

$$1-8 \quad \frac{r}{W} \frac{dW}{dr} = \frac{(48 - T)r}{(r+1)(T(r+2) - 48)}$$

2-10 Here, $S_{11} = -p_1^2 \lambda / \mathcal{D}$, $S_{12} = p_1 p_2 \lambda / \mathcal{D}$, and $p_1(-p_1^2 \lambda / \mathcal{D}) + p_2(p_1 p_2 \lambda / \mathcal{D}) = 0$.

2-12 Form the Lagrange function

$$V = f(q_1, q_2, q_3) + \lambda(y - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) + \mu(z - c_1 q_1 - c_2 q_2 - c_3 q_3)$$

where the p 's and c 's are dollar prices and ration-coupon prices respectively. The Kuhn-Tucker conditions are

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = f_i - \lambda p_i - \mu c_i \leq 0 \quad q_i \geq 0 \quad q_i \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = y - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3 \geq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \lambda \frac{\partial V}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = z - c_1 q_1 - c_2 q_2 - c_3 q_3 \geq 0 \quad \mu \geq 0 \quad \mu \frac{\partial V}{\partial \mu} = 0$$

There are three possible outcomes: (1) the budget constraint is binding, but the coupon constraint is not; (2) the coupon constraint is binding, but the budget constraint is not; and (3) both constraints are binding. The imposition of rationing would not alter the consumer's purchases if his coupon allotment were sufficiently generous so that z is not less than the coupon requirements for his former purchases; i.e., case (1) above provides the optimal solution.

Assume that (3) prevails, and that all outputs are positive. The Kuhn-Tucker conditions yield

$$\frac{f_i}{f_j} = \frac{\lambda p_i + \mu c_i}{\lambda p_j + \mu c_j} \quad i, j = 1, 2, 3$$

RCSs (the f_i/f_j) equal generalized price ratios where the generalized prices are the dollar and ration-coupon prices weighted by the corresponding marginal utilities, i.e., the Lagrange multipliers.

Chapter 3

3-2 Using vector notation let $g(q)$ be a homogeneous function and let $f(q)$ be a monotonic increasing function of g . Since the two functions provide the same ordering, $g(q^*) = g(q^{**})$. From homogeneity

$$g(tq^*) = t^k g(q^*) = t^k g(q^{**}) = g(tq^{**})$$

and finally, it follows that $f(tq^*) = f(tq^{**})$.

3-4 Maximization of utility subject to the budget constraint $v_1q_1 + v_2q_2 = 1$ yields the demand functions

$$q_1 = \frac{\alpha v_1}{v_1} \quad q_2 = \frac{1}{v_2} - \alpha$$

and the indirect utility function

$$U = \alpha \ln \left(\frac{\alpha v_1}{v_1} \right) + \frac{1}{v_2} - \alpha$$

with the derivatives

$$\frac{\partial U}{\partial v_1} = -\frac{\alpha}{v_1} \quad \frac{\partial U}{\partial v_2} = -\frac{1 - \alpha v_1}{v_1^2}$$

Finally, by Roy's identity

$$q_1 = \frac{-\alpha/v_1}{[-\alpha v_1/v_1 - v_2(1 - \alpha v_1/v_1)]} = \frac{\alpha v_1}{v_1}$$

$$q_2 = \frac{-(1 - \alpha v_1/v_1)/v_1}{[-\alpha v_1/v_1 - v_2(1 - \alpha v_1/v_1)]} = \frac{1}{v_2} - \alpha$$

which are the same as the demand functions derived above.

3-6 The consumer maximizes $q_1q_2q_3$ subject to $y = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 = p_1q_1 + p_2q_2$. Substituting $q_3 = q_1 + p_2q_2/p_1$ in her utility function, write the Lagrange function as

$$V = \left(q_1 - \frac{p_2}{p_1} q_2 \right) q_1 q_2 + \lambda (y - p_1 q_1 - p_2 q_2)$$

and set the partial derivatives equal to zero:

$$q_2 q_3 - \lambda p_1 = 0 \quad \left(-\frac{p_2}{p_1} \right) q_1 q_2 + \left(q_1 - \frac{p_2}{p_1} q_2 \right) q_3 = 0$$

$$\left(q_1 - \frac{p_2}{p_1} q_2 \right) q_2 - \lambda p_2 = 0 \quad y - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$$

Solving for q_1 yields $q_1 = (2y)/(3p_1)$.

3-8 Choose two points on the utility scale arbitrarily; for example, $U(A) = 200$ and $U(D) = 100$. Then

$$U(B) = (0.4)(200) + (0.6)(100) = 140$$

$$U(C) = (0.2)(140) + (0.8)(100) = 108$$

3-10 The consumer can only reduce the dispersion of outcomes in this case. She cannot eliminate uncertainty. Equate the expected utilities from insurance and no insurance:

$$(0.10)(152,380 - R)^{0.5} + (0.90)(160,000 - R)^{0.5}$$

$$= (0.05)(90,000)^{0.5} + (0.05)(40,000)^{0.5} + (0.90)(160,000)^{0.5} = 385$$

The value $R = 11,004$ provides a solution for this equation.

Chapter 4

4-2 The MPs, $f_1 = 100 + 20x_2 - 25x_1$ and $f_2 = 100 + 20x_1 - 25x_2$, are positive over the domain

$0.8x_1 + 4 > x_2 > 1.2x_1 - 5$, and $f_{11} = f_{22} = -25 < 0$, $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 225 > 0$ throughout two-dimensional space. It is also necessary to impose the condition that the input values be nonnegative.

4-4 Equating MC to price:

$$3q^2 - 20q + 17 = 5 \quad \text{and} \quad 3q^2 - 20q + 12 = 0$$

which has the roots $q = 6$ and $q = \frac{1}{3}$. At $q = 6$, $d^2C/dq^2 = 6q - 20 = 16 > 0$, hence this is the maximum profit solution; MC is decreasing at $q = \frac{1}{3}$.

The output elasticity of cost at $q = 6$ is

$$\frac{C}{q} \frac{dq}{dC} = \frac{q^2 - 10q^2 + 17q + 66}{q} \cdot \frac{1}{3q^2 - 20q + 17} = \left(\frac{24}{6}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = 0.8$$

since $dq/dC = 1/(dC/dq)$.

4-6 Total profit is

$$\pi = p_1q_1 + p_2q_2 - rK = p_1q_1 + p_2q_2 - rA(q_1^\alpha + q_2^\beta)$$

Setting the partial derivatives equal to zero.

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = p_1 - r\alpha A q_1^{\alpha-1} = 0 \quad \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = p_2 - r\beta A q_2^{\beta-1} = 0$$

Whence

$$q_1 = \left(\frac{p_1}{r\alpha A}\right)^{1/(\alpha-1)} \quad q_2 = \left(\frac{p_2}{r\beta A}\right)^{1/(\beta-1)}$$

The production relation is strictly convex for $q_1, q_2 > 0$ if the principal minors of the relevant Hessian are positive within this domain. The second direct partials are the first-order minors:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2} = -\alpha(\alpha-1)Aq_1^{\alpha-2} \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} = -\beta(\beta-1)Aq_2^{\beta-2}$$

These are both positive for $q_1, q_2 > 0$ since $\alpha, \beta > 1$ by hypothesis. Finally,

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1 \partial q_2} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^2 > 0$$

Chapter 5

5-2 Let k_1 and k_2 denote the input use ratios for Q_1 and Q_2 respectively, and let r denote the input price ratio. The equilibrium conditions are

$$k_1 = a_1 r^{\sigma_1} \quad \text{and} \quad k_2 = a_2 r^{\sigma_2}$$

By hypothesis, $\sigma_1 > \sigma_2$ and $a_1 < a_2$. The input use ratios would be the same if $k_1 = k_2$: $a_1 r^{\sigma_1} = a_2 r^{\sigma_2}$ which implies that $r = (a_2/a_1)^{1/(\sigma_1 - \sigma_2)}$. Dividing the expression for k_1 by that for k_2 ,

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{a_1}{a_2} r^{(\sigma_1 - \sigma_2)}$$

Since $\sigma_1 - \sigma_2 > 0$ by hypothesis, a price ratio greater than $(a_1/a_2)^{1/(\sigma_1 - \sigma_2)}$ would make $k_1 > k_2$ and conversely.

5-4 By Shephard's lemma

$$\frac{\partial C}{\partial r_1} = (1 + r^{-1/2})q = x_1 \quad \frac{\partial C}{\partial r_2} = (1 + r^{1/2})q = x_2$$

where $r = r_1/r_2$. Solving for $r^{1/2}$,

$$r^{1/2} = \frac{q}{x_1 - q} = \frac{x_2 - q}{q}$$

which yields the production function

$$q = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{1}{1/x_1 + 1/x_2} = 0.5(0.5x_1^{-1} + 0.5x_2^{-1})^{-1}$$

which by (5-7) is CES with $\sigma = 0.5$ ($\rho = 1$), $A = 0.5$, and $\alpha = 0.5$.

5-6 The input requirements for a unit of output producing half with the first activity and half with the third are

$$(0.5)(1, 6) + (0.5)(3, 3) = (2, 4.5)$$

The second activity requires (2, 5), and consequently is inefficient.

5-8 The appropriate Lagrange function for (5-31) and (5-32) is

$$L = \sum_{j=1}^n p_j q_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(x_i^j - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)$$

Since all functions are concave (linear), the Kuhn-Tucker conditions are applicable.

$$(1) \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = p_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} \leq 0 \quad (2) \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} q_j = 0 \quad (3) \quad q_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$(4) \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = x_i^j - \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \geq 0 \quad (5) \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} \lambda_i = 0 \quad (6) \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

Conditions (1) are the same as dual constraints (5-39). Conditions (2) ensure the satisfaction of (5-41) and (5-43), and conditions (5) ensure (5-40) and (5-42).

Chapter 6

6-2 $AVC = 0.04q^2 - 0.8q + 10$ and its minimum is found by setting its derivative equal to zero:

$$\frac{d(AVC)}{dq} = 0.08q - 0.8 = 0$$

Hence $q = 10$, at which point $AVC = 6$ and $MC = 0.12q^2 - 1.6q + 10$. Substitute $p = MC$, multiply through by 12.5, and solve for $q = (20 \pm 5\sqrt{3p - 14})/3$. The positive branch gives outputs at which MC is increasing. Hence

$$S = 0 \quad \text{if} \quad p < 6 \quad \text{and} \quad S = \frac{20 + 5\sqrt{3p - 14}}{3} \quad \text{if} \quad p \geq 6$$

6-4 Firms will have a profit maximum of zero if $p = MC = AC$, which occurs at the minimum of the AC curve. $AC = q^2 - 4q + 8$ and reaches a minimum at $q = 2$, at which point $p = 4$. The long-run supply curve is horizontal and the amount supplied is $2n$ where n is the number of firms. At $p = 4$ the quantity demanded is 1600. Hence $1600 = 2n$, and $n = 800$.

6-6 The entire supply will come from domestic sources as long as price is less than 20. When price reaches 20, domestic supply is 180. Thereafter, the supply curve is horizontal. Domestic supply remains at 180, price remains at 20, and imports are $q - 180$.

6-8 The cost functions including cost of transportation are $c_1 = 0.5q_1^2 + 6q_1$ for firms in location I and $C_2 = 0.5q_2^2 + 10q_2$ for firms in location II. The first-order conditions for profit maximization are $(q_1 + 6) = p = (q_2 + 10)$, and the two types of supply functions for the firms are

$$\begin{aligned} S_1 &= 0 & \text{if} & \quad 0 \leq p < 6 & \quad \text{and} & \quad S_1 = p - 6 & \quad \text{if} & \quad 6 \leq p \\ S_2 &= 0 & \text{if} & \quad 0 \leq p < 10 & \quad \text{and} & \quad S_2 = p - 10 & \quad \text{if} & \quad 10 \leq p \end{aligned}$$

The aggregate supply function is

$$S = 0 \quad \text{if} \quad 0 \leq p < 6, \quad S = 50p - 300 \quad \text{if} \quad 6 \leq p < 10$$

and

$$S = 100p - 800 \quad \text{if} \quad 10 \leq p$$

6-10 By (6-21), $dp/dt = kE(p)$ and local stability in the neighborhood of the equilibrium price p_* requires that $dp/dt = kE(p_*) (p - p_*)$ have a negative real root. In the present case $E(p) = 25p - \sqrt{5p}$, and $E(p) = 0$ yields $p_* = 5$. $E'(p) = -25/p^2 - 0.5\sqrt{5}/p$ and $E'(5) = -1.5 < 0$ which ensures local stability.

6-12 If $p_0 = 0.8p_*$ and applying (6-27), the time path is $p_t = [1 - 0.2(A/a)^2] p_0$ and $0.99p_0 \leq p_t \leq$

1.01 p , when $-0.05 \leq (A/a) \leq 0.05$.

(a) Substituting for A and a gives $-0.05 \leq (-0.9t) \leq 0.05$. Taking the logarithm of $0.9 = 0.05$ gives $t = 28.4$.

(b) Substituting gives $0.2 = 0.05$ for the right limit which is attained for $t = 1.8$.

Chapter 7

7-2 The monopolist's profit is

$$\pi = (85 - 3q)q - 5x = (85 - 6\sqrt{x})(2\sqrt{x}) - 5x = 170\sqrt{x} - 17x$$

Maximizing,

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{85}{\sqrt{x}} - 17 = 0$$

which has the solution $\sqrt{x} = 5$, $x = 25$. Since $d^2\pi/dx^2 = -42.5x^{-3/2} < 0$, this is a maximum. When $x = 25$,

$$q = 2\sqrt{x} = 2\sqrt{25} = 10 \quad \text{and} \quad p = 85 - 3q = 55$$

7-4 The monopolist's profit is

$$\pi = a(q_1 + q_2) - b(q_1 + q_2)^2 - \alpha_1 q_1 - \beta_1 q_1^2 - \alpha_2 q_2 - \beta_2 q_2^2$$

Set the partial derivatives equal to zero:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = a - 2b(q_1 + q_2) - \alpha_1 - 2\beta_1 q_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = a - 2b(q_1 + q_2) - \alpha_2 - 2\beta_2 q_2 = 0$$

Take total differentials with respect to q_1 , q_2 , and a , rearrange terms,

$$2(b + \beta_1) dq_1 + 2b dq_2 = da$$

$$2b dq_1 + 2(b + \beta_2) dq_2 = da$$

and solve for dq_1 and dq_2 :

$$dq_1 = \frac{2\beta_2}{\mathcal{D}} da \quad dq_2 = \frac{2\beta_1}{\mathcal{D}} da$$

where $\mathcal{D} = 4(b(\beta_1 + \beta_2) + \beta_1\beta_2) > 0$. Hence, $dq_1/da > 0$ and $dq_2/da > 0$. Furthermore, since the rate of change of MC in the i th plant is $dMC/dq_i = 2\beta_i$, output will increase more in the first plant if MC is increasing faster in the second ($\beta_2 > \beta_1$). It will increase more in the second if $\beta_1 > \beta_2$.

7-6 Profit is

$$\pi = (100 - 3q + 4\sqrt{A})q - (4q^2 + 10q + A)$$

Setting the partials equal to zero,

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = (100 - 6q + 4\sqrt{A}) - (8q + 10) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial A} = \frac{2q}{\sqrt{A}} - 1 = 0$$

From the second equation $q = \sqrt{A}/2$. Substituting in the first equation and solving for $\sqrt{A} = 30$ and $A = 900$, the corresponding output and price are $q = 15$, $p = 175$. It can be verified that the second-order conditions are satisfied.

7-8 The k th firm equates its MR and MC:

$$MR_k = 150 - 2q_k - 0.02 \sum_{i=1}^{100} q_i = 1.5q_k^2 - 40q_k + 270 = MC_k$$

Since all firms produce identical outputs under the present circumstances,

$$\sum_{i=1}^n q_i = 100q_n$$

The equality of MR and MC may be expressed by

$$150 - 4q_n = 1.5q_n^2 - 40q_n + 270$$

and

$$q_n^2 - 24q_n + 80 = (q_n - 4)(q_n - 20) = 0$$

with the roots $q_n = (4, 20)$. It is easily verified that only the larger of these outputs is relevant. For $q_n = 20$, $p_n = 90$, and $\pi_n = 400$.

Chapter 8

8-2 I's profit is

$$\pi_1 = q_1(100 - 2q_1 - 0.5q_2) - 2.5q_1^2 = 100q_1 - 5q_1^2$$

Setting the first derivative equal to zero, and solving for q_1 yields

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = 100 - 10q_1 = 0$$

$$q_1 = 10 \quad q_2 = 5 \quad p_1 = 75 \quad \pi_1 = 500$$

8-4 The profit functions are

$$\pi_1 = 2(13x_1 - 0.2x_1^2) - [2 + 0.1(x_1 + x_2)]x_1$$

$$\pi_2 = 3(12x_2 - 0.1x_2^2) - [2 + 0.1(x_1 + x_2)]x_2$$

Setting the appropriate partial derivatives equal to zero yields the input reaction functions

$$x_1 = 24 - 0.1x_2 \quad x_2 = 42.5 - 0.125x_1$$

Solving the reaction functions for x_1 and x_2 , and substituting in the production and profit functions yields

$$x_1 = 20 \quad q_1 = 180 \quad \pi_1 = 200$$

$$x_2 = 40 \quad q_2 = 320 \quad \pi_2 = 640$$

8-6 The sum of the market shares equals one. Consequently, this is a constant-sum game. The payoff matrix in terms of I's shares is

I/II	0-mile	1-mile	2-mile	3-mile	4-mile
0-mile	0.500	0.125	0.250	0.375	0.500
1-mile	0.875	0.500	0.375	0.500	0.625
2-mile	0.750	0.625	0.500	0.675	0.750
3-mile	0.625	0.500	0.375	0.500	0.875
4-mile	0.500	0.375	0.250	0.125	0.500

Each duopolist will locate at the midpoint (the 2-mile marker) with equal shares

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 0.500$$

8-8 For the monopoly case the buyer's profit maximum is derived from

$$\pi_B = 3(270q_2 - 2q_2^2) - p_2q_2 \quad \frac{d\pi_B}{dq_2} = 810 - 12q_2 - p_2 = 0$$

and the demand function is $p_2 = 810 - 12q_2$. The monopolistic seller's profit maximum is derived from

$$\pi_2 = (810 - 12q_2)q_2 - 1.5q_2^2 \quad \frac{d\pi_2}{dq_2} = 810 - 27q_2 = 0$$

The monopoly solution is

$$q_2^* = 30 \quad p_2^* = 450 \quad \pi_2^* = 5400 \quad \pi_2^* = 12,150$$

For the monopsony case the seller's profit maximum is derived from

$$\pi_2 = p_2 q_2 - 1.5q_2^2 \quad \frac{d\pi_2}{dq_2} = p_2 - 3q_2 = 0$$

and the supply function is $p_2 = 3q_2$. The monopsonistic buyer's profit maximum is derived from

$$\pi_2 = 3(270q_2 - 2q_2^2) - (3q_2)q_2 \quad \frac{d\pi_2}{dq_2} = 810 - 18q_2 = 0$$

The monopoly solution is

$$q_2^* = 45 \quad p_2^* = 135 \quad \pi_2^* = 3037.50 \quad \pi_2^* = 18,225$$

The quasi-competitive solution is obtained by equating price and MC

$$q_2^* = 54 \quad p_2^* = 162 \quad \pi_2^* = 4374 \quad \pi_2^* = 17,496$$

with a total profit of 21,870. The bargaining limits are $135 \leq p_2 \leq 450$.

Chapter 9

9-2 The equilibrium conditions for the consumers are

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{E_{12} + 42}{E_{11} + 11} = \frac{q_{12} + 12}{q_{11} + 3} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{E_{22} + 8}{E_{21} + 19} = \frac{q_{22} + 8}{q_{21} + 9}$$

where the rightmost terms are obtained by substituting $E_{ij} = q_{ij} - q_{ij}^0$. Substituting for p_1/p_2 into the budget constraints gives the offer curves

$$2q_{11}q_{12} - 18q_{11} - 5q_{12} = 186 \quad 2q_{22}q_{21} - 2q_{21} - q_{22} = 170$$

Substituting the equilibrium price ratio, $p_1/p_2 = 0.5$, in the individual excess demand functions derived in Exercise 9-1: $q_{11} = 13$, $q_{12} = 20$, $q_{21} = 5$, $q_{22} = 20$. Substituting these quantities in the offer curves shows that they are satisfied.

9-4 The budget constraint for the i th consumer includes her excess demand for money:

$$p_1 E_{i1} + p_2 E_{i2} + 0.2(p_1 q_{i1}^0 + p_2 q_{i2}^0) - q_{i1}^0 = 0 \quad i = 1, 2$$

where q_{i1}^0 is i 's initial money stock. Individual excess demand functions are obtained from the consumers' first-order conditions.

Setting aggregate excess demand equal to zero for each of the commodities,

$$E_{11} + E_{21} = 10 - \frac{12p_2}{p_1} + \frac{2q_1^0}{3p_1} = 0$$

$$E_{12} + E_{22} = \frac{9 - 20p_1}{p_2} + \frac{q_2^0}{p_2} = 0$$

where $q_1^0 = q_{11}^0 + q_{21}^0$ is the aggregate money stock. Multiplying the first equation by p_1 and the second by p_2 , and rearranging terms,

$$-10p_1 + 12p_2 = \frac{2q_1^0}{3} \quad 20p_1 - 9p_2 = \frac{q_2^0}{3}$$

These linear equations have the solution

$$p_1 = \frac{q_1^0}{15} \quad p_2 = \frac{q_2^0}{9}$$

It is obvious that commodity prices vary in proportion to the aggregate money stock.

If money endowments are $43 + 2 = 45$, prices are $p_1 = 3$, $p_2 = 5$. If money endowments are tripled to $129 + 6 = 135$, prices are tripled to $p_1 = 9$, $p_2 = 15$.

Chapter 10

10-2 Substitution for p_2 from the second equation into the first gives the quadratic equation $p_1^2 - 5p_1 + 6 = 0$ with the roots 3 and 2. The second equation gives 4 and 2 as the corresponding values for p_2 . Thus, there are two equilibrium solutions: $(p_2 = 4, p_1 = 3)$ and $(p_2 = 2, p_1 = 2)$.

10-4 For a three-commodity system (10-23) is

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{33})\lambda + (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) = 0$$

For the system of Exercise 10-2

$$\begin{aligned} b_{22} &= 4p_1 + 22 - 13p_3 & b_{33} &= -13p_2 - 64 + 40p_1 \\ b_{31} &= 1 & b_{32} &= -2 \end{aligned}$$

For the equilibrium (4, 3), the quadratic is $\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$ with the roots $\lambda = -1.5 \pm \sqrt{4.25}$. The equilibrium is unstable since one of the roots is positive. For the equilibrium (2, 2) the quadratic is $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ with the roots $\lambda = 1 \pm i$. This equilibrium is also unstable since the real part of the roots is positive.

10-6 The consumer's excess demand function for Q_2 , derived from the constrained utility maximization, multiplied by p_2 is

$$p_2 E_2 = \frac{\alpha(p_1 q_{11}^{\frac{1}{2}} + p_2 q_{21}^{\frac{1}{2}} + (1 - p_1 - p_2)q_{31}^{\frac{1}{2}})}{(1 + \alpha + \beta)} - p_2 q_{21}^{\frac{1}{2}}$$

This is a linear equation in prices when k_2 is substituted for E_2 to form a boundary. Similar derivations can be made for the other boundaries.

10-8 Let $d_1 = 0.7$, $d_2 = 0.8$, and $d_3 = 1.0$. Then

$$(0.7)(0.2) + (0.8)(0.5) + (1.0)(0.1) = 0.64 < 0.7$$

$$(0.7)(0.1) + (0.8)(0.4) + (1.0)(0.4) = 0.79 < 0.8$$

$$(0.7)(0.6) + (0.8)(0.4) + (1.0)(0.2) = 0.94 < 1.0$$

and the conditions are satisfied. Many other values for the d 's will also satisfy the conditions.

Chapter 11

11-2 The producer's profit is $96q - 12q^2$, and its maximization yields $q = 4$, $x = 8$, $r = 18$, and $p = 84$. Total cost with r as a parameter is

$$C = rx + 2rq$$

The Pareto condition is that price equal the appropriate MC:

$$100 - 4q = 2r = 2[2 + 2(2q)] = 4 + 8q$$

with the solution $q = 8$, $x = 16$, $r = 34$, $p = 68$.

11-4 Let q_{11} and q_{21} be the quantities of the ordinary good, q_2 and q_1 the quantities of the public goods, and x^0 the fixed quantity of the primary factor. A Pareto-optimal allocation is found by maximizing the utility of the first consumer subject to the condition that the second enjoy a fixed level of utility and subject to the requirement that the production function be satisfied. Maximize

$$V = U_1(q_{11}, q_2, q_1) + \lambda[U_2^0 - U_2(q_{21}, q_2, q_1)] + \theta F(q_{11} + q_{21}, q_2, q_1, x^0)$$

where F denotes the production function. The first-order conditions are

$$\frac{\partial V}{\partial q_{11}} = \frac{\partial U_1}{\partial q_{11}} + \theta F_1 = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{\partial U_1}{\partial q_2} - \lambda \frac{\partial U_2}{\partial q_2} + \theta F_2 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_{21}} = -\lambda \frac{\partial U_2}{\partial q_{21}} + \theta F_1 = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{\partial U_1}{\partial q_2} - \lambda \frac{\partial U_1}{\partial q_2} + \theta F_2 = 0$$

and the requirements that the constraints be satisfied.

The RPT between the public goods is F_2/F_1 . Moving the last terms in the equations on the right to their right-hand sides and dividing one by the other, and then substituting for λ its solution from the equations on the left,

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\frac{\partial U_1}{\partial q_2} - \lambda \frac{\partial U_2}{\partial q_2}}{\frac{\partial U_1}{\partial q_1} - \lambda \frac{\partial U_2}{\partial q_1}} = \frac{\frac{\partial U_1/\partial q_2}{\partial U_1/\partial q_{11}} + \frac{\partial U_2/\partial q_2}{\partial U_2/\partial q_{21}}}{\frac{\partial U_1/\partial q_1}{\partial U_1/\partial q_{11}} + \frac{\partial U_2/\partial q_1}{\partial U_2/\partial q_{21}}}$$

which requires that the RPT equal the ratio of the sums of the RCSs of the consumers between the ordinary good and the public goods.

11-6 Equating private MCs to price,

$$\frac{\partial C_1}{\partial q_1} = 4q_1 + 20 - 2q_2 = 240 \quad \frac{\partial C_2}{\partial q_2} = 6q_2 + 60 = 240$$

which have the solution $q_1^* = 70$, $q_2^* = 30$.

The social cost function is the sum of the individual cost functions:

$$C = 2q_1^2 + 20q_1 - 2q_1q_2 + 3q_2^2 + 60q_2$$

The social MCs of the firms are now equated to the market price:

$$\frac{\partial C}{\partial q_1} = 4q_1 + 20 - 2q_2 = 240 \quad \frac{\partial C}{\partial q_2} = -2q_1 + 6q_2 + 60 = 240$$

which have the solution $q_1^* = 84$, $q_2^* = 58$.

11-8 If unit subsidies of s_1 and s_2 are paid to producers, their cost functions become

$$C_1 = 2q_1^2 + 20q_1 - 2q_1q_2 - s_1q_1 \quad C_2 = 3q_2^2 + 60q_2 - s_2q_2$$

Letting private MC equal price for each producer,

$$4q_1 + 20 - 2q_2 - s_1 = 240 \quad 6q_2 + 60 - s_2 = 240$$

which for $q_1^* = 84$, $q_2^* = 58$ yields $s_1 = 0$, $s_2 = 168$.

While the producers were maximizing profits without subsidies, their maximum profits were $\pi_1^* = 9800$, $\pi_2^* = 2700$. After subsidization their profits are $\pi_1^* = 14,112$, $\pi_2^* = 348$. The appropriate lump-sum taxes and social dividend are

$$L_1 = \pi_1^* - \pi_1^* + s_1q_1^* = 4312 \quad L_2 = \pi_2^* - \pi_2^* + s_2q_2^* = 7392$$

$$S = L_1 + L_2 - s_1q_1^* - s_2q_2^* = 1960$$

11-10 A Scitovsky contour is found by minimizing the total quantity of Q_1 , given the quantity of Q_2 and the utility levels of the consumers. Using the first-order conditions and the constraints, λ_1 and λ_2 can be eliminated with the result

$$U_1^* - U_1^* - q_1q_2 + 2\sqrt{U_1^*q_1q_2} = 0$$

Letting $q_1q_2 = Z^2$, this is a quadratic equation:

$$Z^2 - (2\sqrt{U_1^*})Z + (U_1^* - U_1^*) = 0$$

which has the solution

$$Z = \frac{2\sqrt{U_1^*} \pm \sqrt{4U_1^*}}{2} = \sqrt{U_1^*} \pm \sqrt{U_1^*}$$

Since the solution $\sqrt{U_1^*} - \sqrt{U_1^*}$ might make Z negative, which makes no sense in the present context, the final solution is

$$q_1q_2 = Z^2 = (\sqrt{U_1^*} + \sqrt{U_1^*})^2$$

as required.

11-12 If $\alpha \geq 1$, welfare is maximized by allocating all income to the individual for whom β_i is

largest. If two or more individuals tie for the largest β_i , all income is allocated to one of those tying. If $\alpha = 0$, all income distributions give $W = \pi$. If $\alpha < 0$, no finite welfare maximum exists since welfare can be made infinitely large by depriving any individual of all income.

Chapter 12

12-2 The function to be maximized is

$$V = c_1 c_2^{0.6} + \lambda [(1000 - c_1) + (1/1.08)(648 - c_2)]$$

The first-order conditions are

$$\frac{\partial V}{\partial c_1} = c_2^{0.6} - \lambda = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial c_2} = 0.6c_1 c_2^{-0.4} - \frac{\lambda}{1.08} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 1000 - c_1 + \frac{1}{1.08}(648 - c_2) = 0$$

with the solution $c_1 = 1000$, $c_2 = 648$. The consumer is neither borrower nor lender.

12-4 The Lagrange function for each consumer is

$$V^* = c_1 c_2 + \mu [(y_1 - c_1) + (y_2 - c_2)(1+i)^{-1}]$$

See the partials equal to zero,

$$\frac{\partial V^*}{\partial c_1} = c_2 - \mu = 0 \quad \frac{\partial V^*}{\partial c_2} = c_1 - \mu(1+i)^{-1} = 0$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial \mu} = (y_1 - c_1) + (y_2 - c_2)(1+i)^{-1} = 0$$

and solve for

$$c_1 = \frac{y_1 + y_2(1+i)^{-1}}{2}$$

The consumer's excess demand for bonds is

$$y_1 - c_1 = \frac{y_1 - y_2(1+i)^{-1}}{2}$$

Bond-market equilibrium requires that aggregate excess demand by the two groups of consumers equal zero:

$$100[5000 - 4200(1+i)^{-1}] + 50[4000 - 7000(1+i)^{-1}] = 700,000 - 770,000(1+i)^{-1}$$

with the solution $i = 0.10$.

12-6 The present value of the entrepreneur's profit is

$$\pi = 100\sqrt{T} e^{-0.05T} - 20$$

which is maximized when $d\pi/dT = 0$:

$$\frac{d\pi}{dT} = \left(\frac{50}{\sqrt{T}} - 5\sqrt{T} \right) e^{-0.05T} = 0$$

which has the solution $T = 10$.

12-8 The present value of the entrepreneur's profit is

$$\pi = (4 + 8T - T^2)e^{-0.2T} - 4 - \int_0^T 0.4te^{-0.2t} dt$$

Setting the derivative with respect to T equal to zero,

$$\frac{d\pi}{dT} = (8 - 2T)e^{-0.2T} - 0.2(4 + 8T - T^2)e^{-0.2T} - (0.4T)e^{-0.2T} = 0$$

with the roots $T = (2, 18)$. The second-order condition requires that

$$\frac{d^2\pi}{dT^2} = e^{-0.2T}(-0.04T^2 + 1.2T - 3.44) < 0$$

and is satisfied for $T = 2$, but not for $T = 18$.

12-10 The present value of the entrepreneur's profit is the present value of the quasi-rent stream, minus the original cost, plus the present value of the scrap value:

$$\pi = \int_0^T (85 - 4t)e^{-0.05t} dt - 500 + (500 - 40T)e^{-0.05T}$$

Letting $d\pi/dT = 0$ gives the solution $T = 10$.

Appendix

A-2 The derivatives are:

- (a) $f'(x) = 18x^2 + 4x - 1$.
- (b) $f'(x) = 2/\sqrt{x}$.
- (c) $f'(x) = -e^{-x}(x-2) + e^{-x} = e^{-x}(3-x)$.
- (d) $f'(x) = (12x^2(2x^2-x) - (4x-1)4x^3)/(2x^2-x)^2$.
- (e) $f'(x) = (1/x^{-3})(-3x^{-4}) = -3/x$.

A-4 The answers are determined by the signs of the second derivatives:

- (a) $f''(x) = 2 > 0$, and $f(x)$ is strictly convex.
- (b) $f'(x) = -1/x^2 < 0$, and $f(x)$ is strictly concave.
- (c) $f''(x) = a^2 e^{ax} > 0$, and $f(x)$ is strictly convex.
- (d) $f''(x) = 6x - 4$ which does not have a unique sign for $x \geq 0$, and $f(x)$ is neither strictly convex nor strictly concave over the entire interval.

A-6 The total differential is

$$dy = \left(2x_1^2 + \frac{1}{x_1}\right) dx_1 + (4x_1x_2 + e^{x_2}) dx_2 + x_2 e^{x_2} dx_2$$

A-8 Setting the partial derivatives equal to zero,

$$f_1 = 5 + x_2 - x_1 = 0 \quad f_2 = 10 - 6x_2 + x_1 = 0$$

These equations have the solution $x_1 = 8$, $x_2 = 3$. The second-order conditions for a maximum are satisfied by this solution:

$$f_{11} = -1 < 0 \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

A-10 If $\alpha + \beta < 1$, the principal minors of the Hessian will alternate in sign, beginning with minus, as required for strict concavity:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \alpha(\alpha-1)Ax_1^{\alpha-2}x_2^\beta < 0 \\ \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \alpha(\alpha-1)Ax_1^{\alpha-2}x_2^\beta & \alpha\beta Ax_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta Ax_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1)Ax_1^\alpha x_2^{\beta-2} \end{vmatrix} \\ &= \alpha\beta(1-\alpha-\beta)A^2x_1^{\alpha-\alpha-1}x_2^{\beta-\beta-1} > 0 \end{aligned}$$

Conversely, $\alpha + \beta \geq 1$ will violate the requirement that the Hessian be positive, and concavity cannot hold.

A-12 Form the Lagrange function

$$V = x_1^2x_2 + \lambda(5x_1 + 2x_2 - 300)$$

where λ is an undetermined multiplier, and set its partial derivatives equal to zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} &= 2x_1x_2 + 5\lambda = 0 & \frac{\partial V}{\partial x_2} &= x_1^2 + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \lambda} &= 5x_1 + 2x_2 - 300 = 0 \end{aligned}$$

Substitute $2x_2 = 5x_1/2$ from the first two equations into the third:

$$5x_1 + \frac{5x_1}{2} - 300 = 0$$

which gives the solution $x_1 = 40$, $x_2 = 50$.

The second-order condition, which requires that the bordered Hessian be positive, is satisfied:

$$\begin{vmatrix} 2x_2 & 2x_1 & 5 \\ 2x_1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 40x_1 - 8x_2 = 1200 > 0$$

A-14 A function is concave if $f_{11} \leq 0$ and $\mathcal{H} = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 \geq 0$, and strictly concave if the strict inequalities hold. A function is quasi-concave if $\mathcal{Q} = f_{12}^2 f_{11} - f_{11}f_{12}^2 - f_{22}f_{11}^2 \geq 0$, and strictly quasi-concave if the strict inequality holds. The reader may verify that the following functions have the desired properties by evaluating the appropriate determinants:

(a) $f(x_1, x_2) = -(\ln x_1 - \ln x_2)$.

(b) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

(c) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

(d) $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{3/2}$.

A-16 The Jacobian is

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} 2x_1 + 4x_2 & 4x_1 + 8x_2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

and vanishes identically. Since the left-hand side of the first equation is the square of the left-hand side of the second, any solution satisfying one will satisfy the other if $y_1 = y_2$. If $y_1 \neq y_2$ there is no solution at all.

A-18 (a) $\int_4^{10} (2x + 3) dx = (x^2 + 3x)_{10} - (x^2 + 3x)_4 = 130 - 54 = 76$.

(b) $\int_1^e \frac{1}{x} dx = (\ln x)_e - (\ln x)_1 = 1 - 0 = 1$.

A-20 The appropriate quadratic is $x^2 + 5x + 6 = 0$ with the roots $(-2, -3)$. The solution has the form

$$y = k_1 e^{-2x} + k_2 e^{-3x}$$

Using the initial conditions, $y_0 = k_1 + k_2 = 6$, $y'_0 = -2k_1 - 3k_2 = 3$ gives $k_1 = 21$, $k_2 = -15$.

رقم الإيداع ٨٤/١٦٥١

5000001
30.000

مطابع الكتب النادرة والتراث